

1 способ (следует из определения): Метод полного перебора для нахождения наибольшего общего делителя (НОД) натуральных чисел.

1. Выписываем все делители числа а;
2. Выписываем все делители числа b;
3. Выбираем среди них общие делители;
4. Среди общих делителей выбираем самое большое число – это и есть НОД(а, b).

Например: Найти НОД(32;48).

Обозначим делители числа буквой D.

$$D(32) = \{1; 2; 4; 8; 16; 32\};$$

$$D(48) = \{1; 2; 3; 4; 6; 8; 12; 16; 24; 48\}.$$

$$D(32; 48) = \{1; 2; 4; 8; 16\}.$$

$$\text{НОД}(32; 48) = 16.$$

Примеры: Найти а) НОД (54, 78), б) НОД (39,153)

2 способ : Метод перебора делителей меньшего числа для нахождения наибольшего общего делителя (НОД) натуральных чисел.

1. Найти делители меньшего из данных чисел.
2. Найти, начиная с большего, тот из выписанных делителей, который является также делителем другого числа.
3. Записать найденное число – НОД.

Например: Найти НОД(12;32).

$$D(12) = \{1; 2; 3; 4; 6; 12\}.$$

12 не является делителем числа 32;

6 не является делителем числа 32;

4- делитель 32.

$$\text{НОД}(12; 32) = 4.$$

Этот алгоритм легко реализуется, но его недостатком является то, что необходимо проверять много вариантов.

Примеры: Найти а) НОД (24, 38), б) НОД (22,242)

3 способ: Метод нахождения наибольшего общего делителя (НОД) натуральных чисел с помощью разложения на множители.

1. Находим разложение чисел на простые множители.
2. Подчеркиваем общие числа.
3. Находим произведение подчеркнутых чисел у одного числа.
4. Записываем ответ.

Например:

Найти НОД(36; 48).

$$36 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3,$$

$$48 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3.$$

$$\text{НОД}(36, 48) = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$$

Этот способ часто удобен, но у него есть большой недостаток: разложить большое число на множители чрезвычайно трудно, например, НОД(54739; 205 757).

Примеры: Найти а) НОД (24, 38), б) НОД (22, 242)

Есть сравнительно простой алгоритм нахождения общего делителя двух чисел. Его приписывают Евклиду, одному из величайших математиков древности. Евклид жил в III-II в до н.э. в Александрии, а по другим источникам, в Дамаске. Оставил несколько сочинений, известных в латинских и арабских переводах, наиболее значительное из которых – состоящие из 13 книг «Начала» («Elements»)- представляет собой систематическое изложение математики того времени.

4 способ: Алгоритм Евклида нахождения наибольшего общего делителя (НОД) двух натуральных чисел вычитанием.

Древнегреческие математики называли этот алгоритм — «взаимное вычитание». Этот алгоритм, видимо, не был открыт Евклидом, так как упоминание о нём имеется уже в Топике Аристотеля. В «Началах» Евклида он описан дважды — в VII книге для нахождения наибольшего общего делителя двух натуральных чисел и в X книге для нахождения наибольшей общей меры двух однородных величин. В обоих случаях дано геометрическое описание алгоритма, для нахождения «общей меры» двух отрезков.

1. Из большего числа вычитается меньшее.

2. Если получается 0, то числа равны друг другу и являются наибольшим общим делителем.

3. Если результат вычитания не равен 0, то большее число заменяется на результат вычитания

4. Переход к пункту 1.

Например: Найти НОД(30; 18).

$$30 - 18 = 12;$$

$$18 - 12 = 6;$$

$$12 - 6 = 6;$$

$$6 - 6 = 0.$$

НОД – это уменьшаемое или вычитаемое.

$$\text{НОД} (30; 18) = 6.$$

Приведенный метод вычисления не является оптимальным. Например, для нахождения НОД(100; 2) следует выполнить 50 (!!) операций вычитания. Для ускорения вычисления НОД операцию вычитания следует заменить операцией взятия остатка от деления.

Примеры: Найти а) НОД (24, 38), б) НОД (1092, 2470)

5 способ: Алгоритм Евклида нахождения наибольшего общего делителя (НОД) двух натуральных чисел делением.

1. Большее число делится на меньшее

2. Если делится без остатка, то меньшее число и есть наибольший общий делитель.

3. Если есть остаток, то большее число заменяем на остаток от деления.

4. Продолжаем деление до тех пор, пока не получим в остатке нуль. Последний неравный нулю остаток и есть НОД данных чисел.

Например: Найти НОД (273; 1014).

Решение. Выполняем деление с остатком: По лемме:

$$1014 = 273 \cdot 3 + 195$$

$$273 = 195 \cdot 1 + 78$$

$$195 = 78 \cdot 2 + 39$$

$$78=39*2$$

$$\text{НОД}(273;1014) = \text{НОД}(195;273) = \text{НОД}(195;78) = \text{НОД}(78;39) = 39$$

$$\text{НОД}(273;1014)=39$$

6 способ: Бинарный алгоритм Евклида нахождения наибольшего общего делителя (НОД) двух натуральных чисел.

Данный алгоритм быстрее обычного алгоритма Евклида, т.к. вместо медленных операций деления и умножения используются сдвиги. Алгоритм был известен еще в Китае 1-го века, но опубликован был лишь в 1967 году израильским физиком и программистом Джозефом Стайном. Он основан на использовании следующих свойств НОД:

$$\text{НОД}(2a; 2b) = 2 \text{НОД}(a; b),$$

$$\text{НОД}(2a; 2b+1) = \text{НОД}(a; 2b+1),$$

$$\text{НОД}(-a; b) = \text{НОД}(a; b)$$

Сам алгоритм выглядит так:

$$\text{Если } a, b \text{ чётные, то } \text{НОД}(a; b) = 2 * \text{НОД}(a/2; b/2);$$

$$\text{Если } a \text{ чётное, } b \text{ нечётное, то } \text{НОД}(a; b) = \text{НОД}(a/2; b);$$

$$\text{Если } b \text{ чётное, } a \text{ нечётное, то } \text{НОД}(a; b) = \text{НОД}(a; b/2);$$

$$\text{Если } a, b \text{ нечётные и } b > a, \text{ то } \text{НОД}(a; b) = \text{НОД}((b-a)/2; a);$$

$$\text{Если } a, b \text{ нечётные и } b < a, \text{ то } \text{НОД}(a; b) = \text{НОД}((a-b)/2; b);$$

Например:

$$\begin{aligned} \text{НОД}(1978;2666) &= 2 * \text{НОД}(989;1333) = 2 * \text{НОД}(989;344) = 2 * \text{НОД}(989;172) = 2 * \text{НОД}(989;86) = 2 * \text{НОД}(989;43) \\ &= 2 * \text{НОД}(946;43) = 2 * \text{НОД}(473;43) = 2 * \text{НОД}(430;43) = 2 * \text{НОД}(215; 43) = 2 * \text{НОД}(172; 43) \\ &= 2 * \text{НОД}(86; 43) = 2 * \text{НОД}(43; 43) = 2 * 43 = 86. \end{aligned}$$

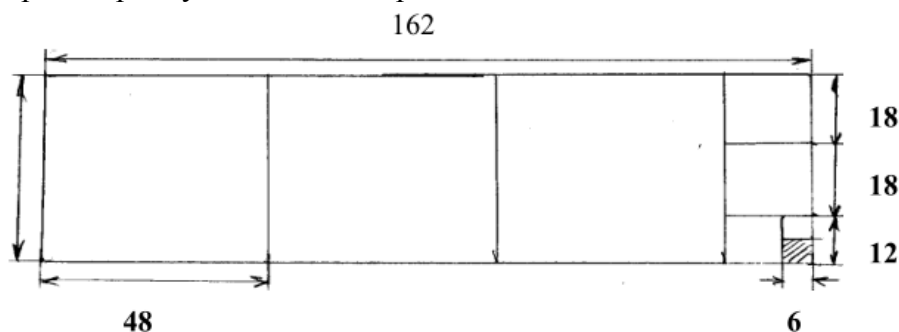
$$\text{НОД}(1978; 2666)=86$$

7 способ: Геометрический метод нахождения наибольшего общего делителя (НОД) натуральных чисел с помощью квадратов.

Этот алгоритм – геометрическая иллюстрация алгоритма Евклида, описанного в 5-ем способе.

Например: Найти НОД(162;48).

Построим прямоугольник со сторонами 162мм и 48 мм.



От прямоугольника отрезем несколько квадратов со стороной 48 мм – таких квадратов три.

Остался прямоугольник со сторонами 48 мм и $162-3*48=18$ мм.

От полученного прямоугольника снова отрезаем квадраты, у которых сторона равна 18 мм – таких квадратов получится два.

Остался прямоугольник со сторонами 18 мм и $48-2*18=12$ мм.

От полученного прямоугольника снова отрезаем квадраты, у которых сторона равна 12 мм – такой квадрат будет единственный.

Остался прямоугольник со сторонами 12 мм и $18-12=6$ мм, который, в свою очередь состоит из двух квадратов 6мм x 6 мм.

Длина стороны последнего полученного квадрата и есть наибольший общий делитель чисел 162 и 48.

Ответ: НОД(162; 48)=6.

Этот способ является самым нерациональным: вычерчивая прямоугольники и квадраты, легко ошибиться в построениях и получится неверный ответ.