

الموضوع الأول

التمرين الأول (04 ن):

لتكن (u_n) متتالية عددية معرفة بـ: $u_0 = -6$ و من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 2n - 1$

(أ) 1) أحسب : u_1 ، u_2 و u_3 .

(2) برهن أنه من أجل كل $n \geq 3$ ، $u_n > 0$

- استنتج أنه من أجل كل $n \geq 4$ ، $u_n > 2n - 3$

(3) ما هي نهاية (u_n) ؟

(ب) نعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n = u_n - 4n + 10$

(1) برهن أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول .

(2) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = 2^{2-n} + 4n - 10$

(3) احسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

التمرين الثاني (05 ن):

(1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ ، المعادلة ذات المجهول Z : $(Z - 2i)(Z^2 - 2\sqrt{3}Z + 4) = 0$

(2) في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$. نعتبر النقط A ، B ، C و D ذات اللاحقات

$Z_A = \sqrt{3} - i$ ؛ $Z_B = \sqrt{3} + i$ ؛ $Z_C = 2i$ و $Z_D = -\sqrt{3} - i$ على الترتيب .

أ - علم النقط A ، B ، C و D .

ب - اكتب العدد $\frac{Z_A - Z_B}{Z_C - Z_B}$ على الشكل الجبري ثم على الشكل الأسّي . استنتج طبيعة المثلث ABC .

ج - تحقق أن النقط A ، B ، C و D تنتمي إلى الدائرة التي مركزها O يطلب تعيين نصف قطرها .

(3) لنعتبر التحويل النقطي S الذي يحول O إلى A و يحول C إلى D .

أ - اثبت أن التحويل S هو تشابه مباشر ثم عين عناصره المميزة (المركز و النسبة و الزاوية) .

ب - تحقق أن صورة النقطة B بالتشابه S هي النقطة C .

4) لتكن النقطة G مرجح النقط A ، B ، C المرفقة بالمعاملات 1 ، -1 ، 2 على الترتيب.

أ - عين احداثيي النقطة G .

ب - بين ان (Γ) مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق $MA^2 - MB^2 + 2MC^2 = 8$ هي الدائرة التي مركزها G و نصف قطرها 1 .

التمرين الثالث (04 ن):

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ النقط $A(1;0;2)$ ، $B(0;1;2)$ ، $C(1;-2;0)$ والمستوي (P) الذي معادلته $3x - 2y + z + 3 = 0$.

(1) أ) بين أن النقط A ، B و C تعين مستويا.

ب) تحقق أن الشعاع $\vec{n}(1;1;-1)$ ناظمي للمستوي (ABC) ثم استنتج معادلة ديكارتية له.

(2) أ) بين أن المستويين (P) و (ABC) متعامدان.

$$\begin{cases} x = t - 1 \\ y = 4t \\ z = 5t \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$$

ب) بين أن تقاطع المستويين (P) و (ABC) هو المستقيم (Δ) المعروف بتمثيله الوسيطى :

ج) أحسب المسافة بين النقطة $H(-1;6;-2)$ والمستوي (ABC) ،

ثم بين أن المسافة بين النقطة H والمستقيم (Δ) تساوي $\sqrt{\frac{106}{3}}$.

(3) لتكن (Γ) مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفضاء حيث : $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 12y + 4z + 3 = 0$

أ) بين أن (Γ) هي سطح كرة مركزها H يطلب تعيين نصف قطرها.

ب) ما هو الوضع النسبي للمجموعة (Γ) والمستقيم (Δ)

التمرين الرابع (07 ن):

نعتبر الدالة f ذات المتغير الحقيقي x المعرفة على المجال $]-1; +\infty[$ كما يلي : $f(x) = x + 1 + \ln(x+1) - \ln(x+2)$.

(C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$ وحدة الطول $2cm$.

(1) احسب $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$

(2) بين أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right) = 0$. ثم استنتج نهاية الدالة f عند $+\infty$

(3) بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x + 1$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحني (C_f) عند $+\infty$ ،

ثم أدرس وضعية المنحني (C_f) بالنسبة للمستقيم المقارب المائل .

(4) ادرس تغيرات الدالة f و شكل جدول تغيراتها .

(5) اكتب معادلة المماس (T) عند النقطة التي فاصلتها $x = 0$

(6) بين أن المنحنى (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α حيث : $-\frac{1}{2} < \alpha < 0$.

(7) أرسم المنحنى (C_f) و المستقيمان (T) و (Δ) ؟

(8) ناقش بيانيا و حسب قيم الوسيط الحقيقي m حلول المعادلة $f(x) = \frac{3}{2}x + m$

(9) أ - بين أن الدالة $F_a : x \rightarrow (x+a)\ln(x+a) - x$ هي دالة أصلية للدالة $f_a : x \rightarrow \ln(x+a)$

على المجال $]-a; +\infty[$

ب - احسب مساحة الحيز للمستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و المستقيمتين $y = x + 1$ ، $x = 0$ ، $x = 1$.

انتهى الموضوع الأول

3ع ت - دورة ماي 2019 - الإجابة النموذجية وسلم التنقيط - الموضوع الأول -

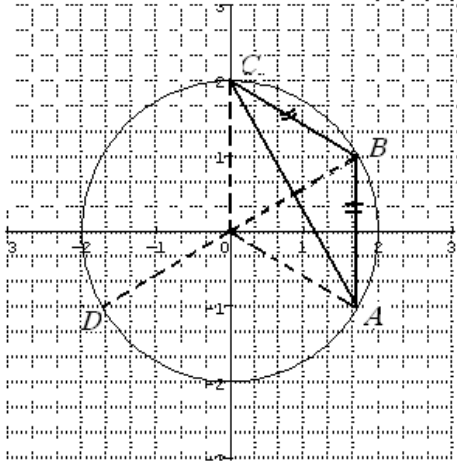
العلامة		عناصر الإجابة	محاور الموضوع
مجزأة	كاملة		

04 ن	0.5 ن	(أ) حساب الحدود : $u_0 = -6$, $u_1 = -4$, $u_2 = -1$ و $u_3 = \frac{5}{2}$. (2) <u>البرهان بالتراجع</u> : من أجل $n \geq 3$, $u_3 = \frac{5}{2}$ و $\frac{5}{2} > 0$ إذن $u_n \geq 3$ محققة من أجل $n \geq 3$.	التمرين الأول
	0.5 ن	لدينا $u_n > 0$ ومنه $\frac{1}{2}u_n > 0$ و $2n - 1 \geq 5 > 0$ إذن $\frac{1}{2}u_n + 2n - 1 > 0$ إذن $u_{n+1} > 0$	
	0.5 ن	- الاستنتاج : من أجل $n \geq 4$ فإن $n - 1 \geq 3$ أي أن $u_{n-1} > 0$ ومنه $\frac{1}{2}u_{n-1} > 0$ نضيف إلى	
	0.5 ن	الطرفين نفس المقدار نجد $\frac{1}{2}u_{n-1} + 2(n-1) - 1 > 0$ إذن $u_n > 2n - 3$	
	0.5 ن	(3) بمان $u_n > 2n - 3$ فإن $\lim_{x \rightarrow \infty} u_n > \lim_{x \rightarrow \infty} (2n - 3)$ ومنه $\lim_{x \rightarrow \infty} u_n = +\infty$	
	0.5 ن	(ب) (1) لدينا $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{u_{n+1} - 4(n+1) + 10}{u_n - 4n + 10} = \frac{u_n - 4n + 10}{2(u_n - 4n + 10)} = \frac{1}{2}$ و $q = \frac{1}{2}$ إذن $v_0 = 4$ (2) لدينا $v_n = v_0 \cdot q^n$ ومنه $v_n = 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$ أي $v_n = 2^{2-n}$ أي $2^{2-n} = u_n - 4n + 10$ إذن $u_n = 2^{2-n} + 4n - 10$ (3) حساب المجموع S_n حيث : $ \begin{aligned} S_n &= u_0 + u_1 + \dots + u_n \\ &= (v_0 + 4 \times 0 - 10) + (v_1 + 4 \times 1 - 10) + \dots + (v_n + 4 \times n - 10) \\ &= (v_0 + v_1 + \dots + v_n) + 4(0 + 1 + \dots + n) - 10(n+1) \\ &= 2n^2 - 8n - 2^{-n+2} - 2 \end{aligned} $	

(1) حلول المعادلة: لدينا $Z^2 - 2\sqrt{3}Z + 4 = 0$ أو $Z - 2i = 0$ و $\Delta = -4$ أي $\sqrt{\Delta} = 2i$

ن 0.5

إذن $Z = \sqrt{3} + i$ أو $Z = \sqrt{3} - i$ أو $Z = 2i$



ن 0.5

(2) أ- تعلیم النقط :

ب- لدينا الشكل الجبري $\frac{Z_A - Z_B}{Z_C - Z_D} = \frac{-2i}{-\sqrt{3} + i} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

لدينا $[r, \theta] = \left[1, \frac{2\pi}{3}\right]$ إذن الشكل الآسي $\frac{Z_A - Z_B}{Z_C - Z_D} = e^{i\frac{2\pi}{3}}$

ن 0.5

إذن $\left|\frac{Z_A - Z_B}{Z_C - Z_D}\right| = \frac{|Z_A - Z_B|}{|Z_C - Z_D|} = 1$

ومنه $BA = BC$ ومنه المثلث ABC متساوي الساقين.

ن 0.5

ج- لدينا $|Z_A| = |Z_B| = |Z_C| = |Z_D| = 2$

النقط A, B, C, D تنتمي إلى الدائرة التي مركزها O و نصف قطرها $r = 2$

(3)

التمرين
الثاني

ن 05

ن 0.5

أ) لدينا $\begin{cases} Z_A = aZ_O + b \\ Z_D = aZ_C + b \end{cases}$ و $Z' = aZ + b$ إذن $\begin{cases} S(O) = A \\ S(C) = D \end{cases}$ أي $a = \sqrt{3}i$ و $b = \sqrt{3} - i$

إذن $S: Z' = \sqrt{3}iZ + \sqrt{3} - i$ هو تشابه مباشر مركزه (النقطة الصامدة) لاحظتها $Z_w = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$

ن 0.5

و نسبته $k = |\sqrt{3}i| = \sqrt{3}$ وزاويته عمدة $\sqrt{3}i$ أي $\theta \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$

ب) $Z_C = \sqrt{3}iZ_B + \sqrt{3} - i$ أي $2i = \sqrt{3}i(\sqrt{3} + i) + \sqrt{3} - i$ إذن $2i = 2i$ محققة

(4) أ- بمان $1 - 1 + 2 \neq 0$ إذن G مرجح الجملة $\{(A, 1); (B, -1); (C, 2)\}$ ومنه $\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB} + 2\overrightarrow{GC} = \vec{0}$

أي $(Z_A - Z_G) - (Z_B - Z_G) + 2(Z_C - Z_G) = 0$ إذن $Z_G = i$ ومنه $G(0, 1)$

ن 0.5

ب- لدينا $MA^2 - MB^2 + 2MC^2 = 8$ ومنه $(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA})^2 - (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB})^2 + 2(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC})^2 = 8$

أي $2MG^2 + 2(\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB} + 2\overrightarrow{GC}) \cdot \overrightarrow{MG} + GA^2 - GB^2 + 2GC^2 = 8$ إذن $MG^2 = 1$ ومنه

مجموعة النقط (Γ) هي الدائرة التي مركزها النقطة G ونصف قطرها 1.

ن 0.5

	0.5 ن		
	0.5 ن		
04 ن	0.5 ن	(1) أ) بمان $\vec{AB}(-1;1;0)$ و $\vec{AC}(0;-2;-2)$ و $\frac{0}{-1} \neq \frac{1}{-2}$ إذن $\vec{AB}$ و $\vec{AC}$ غير مرتبطين خطيا ومنه أن النقط A, B, C تعين مستويا. ب) لدينا $\vec{n}(1;1;-1) \perp \vec{AB}(-1;1;0)$ و $\vec{n}(1;1;-1) \perp \vec{AC}(0;-2;-2)$ إذن $\vec{n}(1;1;-1)$ ناظمي للمستوي (ABC). نستنتج أن معادلة المستوي (ABC) هي $x + y - z + 1 = 0$.	
	0.5 ن	(2) أ) لدينا $\vec{n}(1;1;-1)$ و $\vec{n}_P(3;-2;1)$ متعامدان إذن المستويين (P) و (ABC) متعامدان. ب) لدينا جملة التقاطع $\begin{cases} x + y - z + 1 = 0 \\ 3x - 2y + z + 3 = 0 \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} (t-1) + (4t) - (5t) + 1 = 0 \\ 3(t-1) - 2(4t) + z(5t) + 3 = 0 \end{cases}$ إذن الجملة محققة.	
	0.5 ن	ج) المسافة بين النقطة H و المستوي (ABC) هي $d = \frac{ (-1)+(6)-(-2)+1 }{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = \frac{8\sqrt{3}}{3}$ المسافة بين النقطة H و المستوي (P) هي $d' = \frac{ 3(-1)-2(6)+(-2)+3 }{\sqrt{3^2+2^2+1^2}} = \frac{14}{\sqrt{14}} = \sqrt{14}$	
	0.5 ن	و بمان $d'' = \sqrt{\frac{106}{3}}$ أي أن $d''^2 = \left(\frac{8\sqrt{3}}{3}\right)^2 + (\sqrt{14})^2$ إذن $d''^2 = d'^2 + d^2$	
	0.5 ن	(3) أ) لدينا مجموعة النقط $M(x;y;z)$ حيث: $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 12y + 4z + 3 = 0$ ومنه $[(x+1)^2 - 1] + [(y-6)^2 - 36] + [(z+2)^2 - 4] + 3 = 0$ أي أن $(x+1)^2 + (y-6)^2 + (z+2)^2 = 38$ إذن المجموعة (Γ) هي سطح كرة مركزها H و نصف قطر $r = \sqrt{38}$.	
	0.5 ن	ب) بمان $\sqrt{\frac{106}{3}} < \sqrt{38}$ إذن المستقيم (Δ) يقطع الكرة (Γ) في نقطتين هما بتعويض (Δ) في (Γ) نجد $L_2\left(\frac{-14+2\sqrt{7}}{21}; \frac{28+8\sqrt{7}}{21}; \frac{35+10\sqrt{7}}{21}\right)$ و $L_1\left(\frac{-14-2\sqrt{7}}{21}; \frac{28-8\sqrt{7}}{21}; \frac{35-10\sqrt{7}}{21}\right)$	
	0.5 ن		

التمرين
الثالث

		$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} (-1+1+\ln(-1+1)-\ln(-1+2)) = -\infty \quad (1)$								
0.5 ن		$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right) = 0 \quad \text{ومنه} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x+2} = 1 \quad (2) \text{ لدينا}$								
0.5 ن		$f(x) = x+1+\ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right) \quad \text{ومنه} \quad f(x) = x+1+\ln(x+1)-\ln(x+2) \quad \text{لدينا}$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x+1+\ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right)\right) = +\infty \quad \text{إذن}$								
0.5 ن		$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - y) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right) = 0 \quad (3) \text{ لدينا}$ ومنه المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x+1$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحني (C_f) عند $+\infty$. - دراسة وضعية المنحني (C_f) بالنسبة للمستقيم المقارب المائل.								
0.5 ن		في المجال $]-1; +\infty[$ لدينا $x+1 < x+2$ ومنه $\ln(x+1) < \ln(x+2)$ أي $\ln(x+1) - \ln(x+2) < 0$ $\ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right) < 0 \quad \text{إذن} \quad f(x) - y < 0 \quad \text{أي}$								
0.5 ن										
07 ن		<table><tr><td>x</td><td>$1- \quad +\infty$</td></tr><tr><td rowspan="2">$f(x) - y$</td><td>-</td></tr><tr><td>(C_f) تحت (Δ)</td></tr></table>	x	$1- \quad +\infty$	$f(x) - y$	-	(C_f) تحت (Δ)			
x	$1- \quad +\infty$									
$f(x) - y$	-									
	(C_f) تحت (Δ)									
0.5 ن		(4) دراسة تغيرات الدالة f : الدالة f معرفة وقابلة للاشتقاق على $]-1; +\infty[$ ودالتها المشتقة هي								
		<table><tr><td>x</td><td>$1- \quad +\infty$</td></tr><tr><td>$(x+1)(x+2)$</td><td>+</td></tr><tr><td>$x^2 + 3x + 3$</td><td>+</td></tr><tr><td>$f'(x)$</td><td>+</td></tr></table>	x	$1- \quad +\infty$	$(x+1)(x+2)$	+	$x^2 + 3x + 3$	+	$f'(x)$	+
x	$1- \quad +\infty$									
$(x+1)(x+2)$	+									
$x^2 + 3x + 3$	+									
$f'(x)$	+									
		$f'(x) = \frac{x^2 + 3x + 3}{(x+1)(x+2)} \quad \text{ومنه} \quad f'(x) = 1 + \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}$								
0.5 ن										
		إذن $f'(x) > 0$ ومنه f متزايدة تماماً على $]-1; +\infty[$ <u>جدول التغيرات.</u>								
0.5 ن		<table><tr><td>x</td><td>$1- \quad +\infty$</td></tr></table>	x	$1- \quad +\infty$						
x	$1- \quad +\infty$									

$f'(x)$	+
$f(x)$	$-\infty$  $+\infty$

0.5 ن

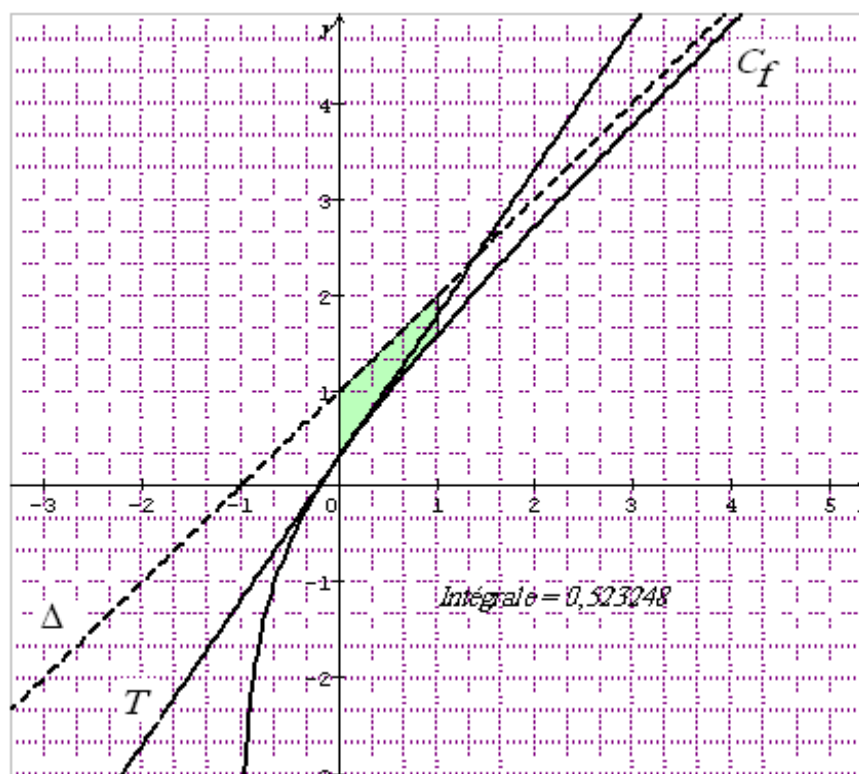
(5) معادلة المماس (T) عند النقطة التي فاصلتها $x = 0$:

$$(T): y = \frac{3}{2}x + 1 - \ln 2 \quad \text{ومنه} \quad y = f'(0)(x - 0) + f(0)$$

$$(6) \quad f \text{ مستمرة و متزايدة تماما على المجال } \left] -\frac{1}{2}; 0 \right[\text{ ولدينا } f\left(-\frac{1}{2}\right) = -0,6 < 0 \quad \text{و} \quad f(0) = 0,3 > 0$$

و $f\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot f(0) < 0$ إذن و حسب نظرية القيم المتوسطة فان المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $-\frac{1}{2} < \alpha < 0$

(7) رسم المنحنى (C_f) و المستقيمان (T) و (Δ)



0.5 ن

(8) المناقشة البيانية :

	0.5 ن	مناقشة حلول المعادلة $f(x) = \frac{3}{2}x + m$ نلاحظ أن المستقيم (D) ذي المعادلة $y = \frac{3}{2}x + m$ موازي للمماس (T) ذي المعادلة $y = \frac{3}{2}x + 1 - \ln 2$ ومنه إذا كان $m = 1 - \ln 2$ فإن $(D) = (T)$ إذن (C_f) و (D) يتقاطعان في نقطة وحيدة (نقطة التماس) و إذا كان $m < 1 - \ln 2$ فإن (C_f) و (D) يتقاطعان في نقطتين . و إذا كان $m > 1 - \ln 2$ فإن (C_f) و (D) لا يتقاطعان . (9) <u>الدالة الأصلية</u> : أ - لدينا $F_a(x) = (x + a) \ln(x + a) - x$ ومنه $F'_a(x) = \ln(x + a) - \frac{x+a}{x+a} - 1 = \ln(x + a) = f_a(x)$ على المجال $]-a; +\infty[$ ب - مساحة الحيز للمستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و المستقيمت $y = x + 1$ ، $x = 0$ ، $x = 1$. $\int_0^1 (y - f(x)) dx = \int_0^1 (\ln(x + 2) - \ln(x + 1)) dx$ هو العدد الحقيقي الموجب إذن $\left[(x + 2) \ln(x + 2) - (x + 1) \ln(x + 1) \right]_0^1 = 3 \ln 3 - 4 \ln 2 \approx 0,5232481.....$	
	0.5 ن		