

Corrigé centrale 91 M-P'

Première partie.

I- Collision neutron-noyau

1/ Conservation de la qdm : $m\vec{V}_1 = m\vec{V}_2 + M\vec{w}_2 \Rightarrow \vec{V}_1 = \vec{V}_2 + A\vec{w}_2$

Conservation de l'énergie : $\vec{E}m\vec{V}_1 = \vec{E}m\vec{V}_2 + \vec{E}M\vec{w}_2 \Rightarrow \vec{V}_1 = \vec{V}_2 + A\vec{w}_2$

2/ De $\vec{V}_1 = \vec{V}_2 + A\vec{w}_2$, on tire : $\vec{V}_2 = (\vec{V}_1 - A\vec{w}_2)^2 = \vec{V}_1^2 + A^2\vec{w}_2^2 - 2A\vec{V}_1\vec{w}_2\cos q$

Soit $\cos q = \frac{\vec{V}_1^2 - \vec{V}_2^2 + A^2\vec{w}_2^2}{2A\vec{V}_1\vec{w}_2} = \frac{A\vec{w}_2^2 + A^2\vec{w}_2^2}{2A\vec{V}_1\vec{w}_2} = \frac{w_2}{V_1} \frac{1+A}{2} > 0$ donc $0 < \theta < \pi/2$

En fonction des énergies : $\vec{E}m\vec{V}_1 = \vec{E}m\vec{V}_2 + \vec{E}M\vec{w}_2 \Rightarrow E_1 - E_2 = \vec{E}Am\vec{w}_2$ et $E_1 = \vec{E}m\vec{V}_1$

Alors $\cos q = \frac{w_2}{V_1} \frac{1+A}{2} = \sqrt{\frac{E_1 - E_2}{AE_1}} \frac{1+A}{2}$ donc $\frac{E_2}{E_1} = 1 - \frac{4A\cos^2 q}{(1+A)^2}$

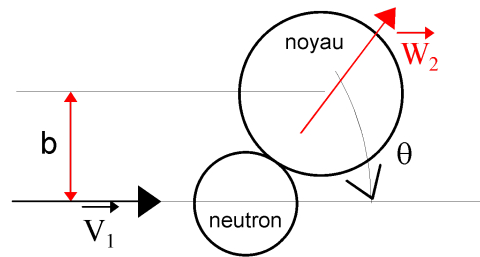
II- Modèle des sphères dures.

1/ La force de contact passe par le centre d'inertie, donc la vitesse $\vec{w}_2$ sera dirigé suivant la réaction normale.

On en déduit : $\sin q = \frac{b}{R_1 + R_2}$

2/ Le paramètre d'impact peut varier entre 0 et la valeur $R_1 + R_2$. Ce qui correspond pour le centre du neutron à

à une cible de surface variant de 0 à $(R_1 + R_2)^2$.



La probabilité de recevoir un impact sur une couronne de rayon : $b \rightarrow b + db$ est : $\frac{dP}{1} = \frac{2pbdb}{p(R_1 + R_2)^2}$

3/ Par définition:

$$\langle -\ln[1 - K\cos^2 q] \rangle_b = \langle -\ln[1 - \frac{Kb^2}{(R_1 + R_2)^2}] \rangle_b = - \int_0^{R_1 + R_2} \ln[1 - \frac{Kb^2}{(R_1 + R_2)^2}] db$$

En posant $x = \frac{Kb^2}{(R_1 + R_2)^2} \Rightarrow$

$$\frac{1}{K} [(1-x)\ln(1-x) - (1-x)]_0^K = \frac{1}{K} [(1-K)\ln(1-K) - (1-K) + 1]$$

Ce qui donne : $1 + \frac{1-K}{K} \ln(1-K)$ cqfd . Il faut que $0 < K < 1$ pour que la fonction aît un sens.

4/ On a obtenu $\frac{E_2}{E_1} = 1 - \frac{4A\cos^2 q}{(1+A)^2} = 1 - K\cos^2 q$ avec $K = \frac{4A}{(1+A)^2} < 1$ si $A > 1$

on peut utiliser le résultat précédent : $K = \frac{4A}{(1+A)^2} \Rightarrow 1 - K = \left(\frac{A-1}{A+1}\right)^2$

Donc coefficient de ralentissement : $g = \langle -\ln[\frac{E_2}{E_1}] \rangle_b = 1 + \left(\frac{1-A}{\sqrt{2A}}\right)^2 \ln\left(\frac{A-1}{A+1}\right) =$

5/ a) La dérivée de γ vaut zéro pour : $0 = \left(\frac{1-A}{\sqrt{A}}\right) \left\{ -\left(\frac{A^{\frac{1}{2}} + A^{-\frac{1}{2}}}{2\sqrt{2A}}\right) \ln\left(\frac{A-1}{A+1}\right) - \left(\frac{1}{\sqrt{A}}\right) \left(\frac{1}{A+1}\right) \right\}$

Le terme entre crochet ne s'annulant pas, la racine est $A = 1$. On vérifiera que c'est bien un maximum pour le ralentissement.

b) A-N : ^1H ($A = 1$) $\gamma = 1$; ^2H ($A = 2$) $\gamma = 0,725$; ^{12}C ($A = 12$) $\gamma = 0,158$; ^{238}U ($A = 238$) $\gamma = 0,008$;

III- Application aux ralentissements des neutrons.

1/ Il y a $\frac{1}{2} kT$ par degré de liberté, donc $E_{300K} = 3/2 kT = 3,9 \cdot 10^{-2} \text{ eV}$.

C'est très faible devant l'énergie initiale des neutrons. On peut considérer les noyaux immobiles, sauf pour les dernières collisions.

2 a/ Avec $g = \langle - \ln\left[\frac{E_2}{E_1}\right] \rangle_b$ et en écrivant : $\frac{E_n}{E_0} = \frac{E_n}{E_{n-1}} \frac{E_{n-1}}{E_{n-2}} \dots \frac{E_1}{E_0} \Rightarrow \ln\left(\frac{E_n}{E_0}\right) = \sum_1^n \ln\left(\frac{E_p}{E_{p-1}}\right)$

on a en raisonnant sur les valeurs moyennes : $\ln\left(\frac{E_n}{E_0}\right) = -ng \Rightarrow E_n = E_0 e^{-g}$

2b/ $n = -\frac{1}{g} \ln\left(\frac{E_{300K}}{E_0}\right)$ d'où $^1\text{H} : n = 17 ; ^2\text{H} : n = 24 ; ^{12}\text{C} : n = 108 ; ^{238}\text{U} : n = 214$;

3a/ A une date t : $v(t) = \sqrt{\frac{2E(t)}{m}}$, la durée moyenne intercollision est : $Dt = \frac{\lambda}{v(t)}$ et le nombre de collisions par unité de temps est : $\frac{dn}{dt} = \frac{1}{Dt} \Rightarrow \frac{dn}{dt} = \frac{1}{\lambda} \sqrt{\frac{2E}{m}}$.

3b/ L'équation $\ln\left(\frac{E_n}{E_0}\right) = -ng$ donne, en passant à la limite : $gdn = -\ln\left[\frac{E+dE}{E}\right] = -\frac{dE}{E}$

soit : $g \frac{dt}{\lambda} \sqrt{\frac{2E}{m}} = -\frac{dE}{E}$; en posant $y = \frac{E}{E_0}$ on a $g \frac{dt}{\lambda} \sqrt{\frac{2E_0}{m}} = -\frac{dy}{y^{\frac{3}{2}}}$

3c/ L'intégration conduit à : $2\left[y^{\frac{-1}{2}} - 1\right] = \frac{g}{\lambda} t \sqrt{\frac{2E_0}{m}}$ soit : $\sqrt{\frac{E_0}{E}} = 1 + \frac{g}{2\lambda} t \sqrt{\frac{2E_0}{m}}$

4a/ On calcule d'abord $\sqrt{\frac{E_0}{E}} \gg 5000$ puis avec $\gamma = 0,158$ on trouve $t = 120 \mu\text{s}$.

On a toujours : $\sqrt{\frac{E_0}{E}} \gg 1$ donc $t = \frac{2\lambda}{g} \sqrt{\frac{m}{2E}}$ indépendant de E_0 .

4b/ La distance parcourue pendant dt est : $dx = v \cdot dt = dt \sqrt{\frac{2E}{m}}$ et on a aussi $g \frac{dt}{\lambda} \sqrt{\frac{2E}{m}} = -\frac{dE}{E}$

donc $dx = -\frac{\lambda}{g} \frac{dE}{E} \Rightarrow x = \frac{\lambda}{g} \ln \frac{E_0}{E_{300K}}$ on trouve ainsi $x = 2,8 \text{ m}$.

On peut remarquer que cette distance correspond à $n\lambda$ puisque $n = -\frac{1}{g} \ln\left(\frac{E_{300K}}{E_0}\right)$.

Deuxième partie.

1a/ Avec $\vec{xu} = A_1 \vec{M} \rightarrow \Rightarrow$ le théorème d'Ampère donne $\vec{B} = \frac{m_0 I}{2\pi x^2} \vec{k} \wedge \vec{xu}$

1b/ $A_1 \vec{M} \rightarrow = (r - a \cos q) \vec{u}_r + a \sin q \vec{u}_q \Rightarrow \vec{B} = \frac{B_0}{x^2} \{ \text{et } x^2 = a^2 + r^2 - 2ar \cos q \}$

1c/ $\vec{B} = B_0 \{$

2a/ Il faut faire une rotation de π et changer le signe du courant. Soit:

$\vec{B} \setminus (u, q) = - \text{vec } \{B\} \setminus (u, q + p) \}$ {2b/

$B_{1r} = B'_r(u, q) - B'_r(u, q + p) = -2B_0 [\sin q - u^2 \sin q [1 - 4\cos^2 q]]$

$B_{1q} = B'_q(u, q) - B'_q(u, q + p) = -2B_0 [\cos q - u^2 \cos q [3 - 4\cos^2 q]]$

en linéarisant :

$B_{1r} = -2B_0 [\sin q + u^2 \sin 3q] \quad \text{et} \quad B_{1q} = -2B_0 [\cos q + u^2 \cos 3q]$

3a/ Il faut faire une rotation d'angle $-2\pi/3$ et d'angle $+2\pi/3$.

3b/ Donc

$B_r = B_{1r}(u, q) + B_{1r}(u, q - 2\frac{p}{3}) + B_{1r}(u, q + 2\frac{p}{3})$

$$B_q = B_{1q}(u, q) + B_{1q}(u, q - 2\frac{p}{3}) + B_{1q}(u, q + 2\frac{p}{3})$$

Or { on a finalement:

$$B_r = -2B_0[3u^2 \sin 3q]$$

$$B_q = -2B_0[3u^2 \cos 3q] \text{ donc } C = 6$$

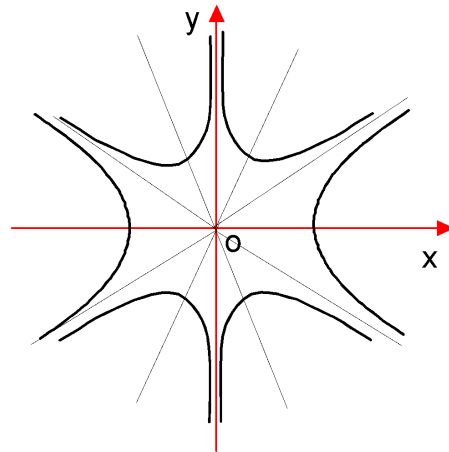
$$4a/ \text{ Ligne de champ: } d\vec{l} \cdot \vec{B} \Rightarrow \frac{dr}{rdq} = \frac{B_r}{B_q} \Rightarrow$$

$$\frac{dr}{r} = \frac{\sin 3q}{\cos 3q} dq \Rightarrow r^3 = r_0^3 / \cos 3q$$

4b/ ci-contre : allure des lignes de champ.

$$4c/ \text{ Module } B(r) = 6B_0 \frac{r^2}{a^2},$$

lignes isomodules $B(r) = C^{\text{te}}$ sur un cercle de centre O



II- Action du champ sur un neutron

1a/ Pour un dipôle $\vec{E}_p = -\vec{M} \cdot \vec{B}$ donc deux cas possibles : $E_{//} = -MB$ et $E_{\perp} = MB$

Soit en remplaçant B par $C B_0 \frac{r^2}{a^2} \Rightarrow E_{//} = -\epsilon m \Omega^2 r^2$ et $E_{\perp} = \epsilon m \Omega^2 r^2$

1b/ La force est donnée par : $\vec{F} = -gr \{adE_p\}$ donc $\vec{F}_{//} = m\Omega^2 \vec{r}$ et $\vec{F}_{\perp} = -m\Omega^2 \vec{r}$

Pour confiner il faut une force de rappel, seuls les neutrons antiparallèles peuvent être confinés.

2a/ La RFD donne : $\vec{F} = -m\Omega^2 \vec{r} = m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} + m \frac{d^2 z}{dt^2} \vec{k} \Rightarrow -m\Omega^2 \vec{r} = m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}$ et $\frac{d^2 z}{dt^2} = 0$

2b/ L'intégration donne : $\vec{r}(t) = \vec{A}_1 \cos \Omega t + \vec{A}_2 \sin \Omega t$ où $\vec{A}_1$ et $\vec{A}_2$ sont des constantes.

soit avec les conditions initiales: $z = v_0 t$ et $\vec{r}(t) = x_0 \vec{i} \cos \Omega t + \frac{u_0}{\Omega} \vec{j} \sin \Omega t$.

2c/ La trajectoire est une hélice d'axe Oz et de section elliptique.

3a/ Le neutron est confiné si le grand axe de l'ellipse est inférieur au rayon a; x_0 étant plus petit que a il faut que: $a > \frac{u_0}{\Omega}$ soit encore : $u_c = a\Omega$.

3b/ A-N: $u_c = 5,9 \text{ m.s}^{-1}$ ce qui donne $E_c = 18.10^{-8} \text{ eV}$ et aussi $T_c = 1,4.10^{-3} \text{ K}$

Ce résultat justifie l'appellation *neutron ultra-froids*.

3c/ La fonction de répartition de Boltzmann permet de calculer la fraction de neutrons qui ont une énergie inférieure à la valeur calculée précédemment:

$$F = \int_0^{E_c} \frac{1}{\sqrt{2p}} \frac{1}{(kT)^{\frac{3}{2}}} \sqrt{E} \exp(-\frac{E}{kT}) dE$$

$$\text{si } T = 300 \text{ K} \ll T_c \text{ on peut simplifier } \Rightarrow F \approx \int_0^{E_c} \frac{1}{\sqrt{2p}} \frac{1}{(kT)^{\frac{3}{2}}} \sqrt{E} dE = \frac{1}{\sqrt{2p}} \frac{1}{(kT)^{\frac{3}{2}}} \frac{2}{3} \left[E^{\frac{3}{2}} \right]_0^{E_c}$$

Soit finalement : $F = \sqrt{\frac{3}{4p}} \left[\frac{T_c}{T} \right]^{\frac{3}{2}} \gg 5.10^{-9}$ donc extrêmement faible.

4/ Les neutrons ont un mouvement de dérive suivant l'axe Oz. or les fils créant le champ magnétique ne peuvent être réellement infinis. Le confinement n'a lieu que dans la partie centrale du dispositif et se termine lorsque les neutrons sortent du dispositif.

III- Amélioration du confinement

1a/ Pour les neutrons confinés : $\vec{F}_{//} = -m\Omega^2 \vec{r}$ avec maintenant $\vec{r} = O'M \Rightarrow (\rho - R)\vec{u}_\rho + z\vec{k}$

1b/ En cylindriques : $\vec{a} = (\rho'' - \rho \dot{q}^2)\vec{u}_\rho + (2\rho \dot{q}' + \rho \ddot{q})\vec{u}_q + z''\vec{k}$

1c/ Equations du mouvement : $\{ \{$

2a/ Compte tenu des conditions initiales: $z'' = -\Omega^2 z \Rightarrow z = z_0 \cos(\Omega t) + \frac{V_0}{\Omega} \sin \Omega t$.

2b/ $2\rho \dot{q}' + \rho \ddot{q} = \frac{1}{\rho} \frac{d(\rho^2 \dot{q})}{dt} = 0 \Rightarrow \rho^2 \dot{q} = Cte = \rho_0^2 w_0$ "mouvement projeté sur xOy à force centrale".

2c/ Il reste l'équation en $\rho(t)$: $\rho'' - \rho \dot{q}^2 = \rho'' - \left(\frac{\rho_0^4 w_0^2}{\rho^3} \right) = -\Omega^2 (\rho - R)$

3a/ si $\omega_0 = 0$ alors $\theta = \theta_0$ est constant : $\rho'' = -\Omega^2 (\rho - R) \Rightarrow (\rho - R) = (\rho_0 - R) \cos \Omega t$,

c'est l'équation paramétrique $(z(t), \rho(t))$ d'une ellipse de centre O'.

3b/ si $\dot{q} = Cte = w_0$ alors $\rho^2 = \rho_0^2$, la trajectoire est sinusoïde dessinée sur un cylindre d'axe Oz.

La trajectoire sera fermée si la durée d'un tour est un multiple de la période, soit $\Omega = n w_0$.

4a/ Si $\rho = \rho_m [1 + e(t)]$ alors l'équation en ϵ est :

$$\rho_m e'' - \left(\frac{\rho_0^4 w_0^2}{\rho_m^3} \right) [1 - 3e] = -\Omega^2 (\rho_m - R + \rho_m e)$$

4b/ La valeur moyenne correspond à $\epsilon = 0$: $-\left(\frac{\rho_0^4 w_0^2}{\rho_m^3} \right) = -\Omega^2 (\rho_m - R)$ on a

4c/ Par différence : $\rho_m e'' + 3 \left(\frac{\rho_0^4 w_0^2}{\rho_m^3} \right) e + \Omega^2 \rho_m e = 0$ soit : $e'' + 3 \left(\frac{\rho_0^4 w_0^2}{\rho_m^4} \right) e + \Omega^2 e = 0$

ce qui s'intègre en $e(t) = e_0 \cos(\Omega' t + j_0)$ en posant : $\Omega' = \sqrt{3 \left(\frac{\rho_0^4 w_0^2}{\rho_m^4} \right) + \Omega^2}$.

Ce qui donne alors la vitesse angulaire: $\dot{q} = \frac{\rho_0^2 w_0}{\rho^2} \gg \frac{\rho_0^2 w_0}{\rho_m^2} [1 - 2e]$.

4d/ Les trajectoires sont alors ses oscillations autour des sinusoïdes tracées sur un cylindre. La vitesse angulaire étant elle même oscillante.

5/ La pesanteur entraîne un mouvement de chute selon l'équation $z = \frac{1}{2} g t^2$ qui s'ajoute aux oscillations. Au bout d'une période la "chute" vaut donc : $h = 2 \frac{g p^2}{\Omega^2}$.

On calcule alors : $h = 5,6$ mm, ce qui n'est pas négligeable.