2. المثلثات والمستقيمات الخاصة:

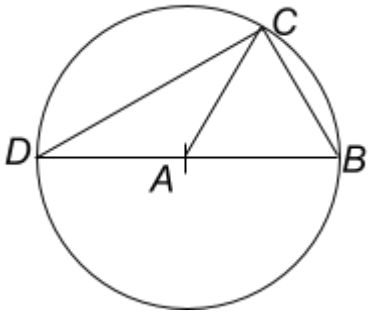
الكفاءات المستهدفة

المثلثات الخاصة ، والمستقيمات الخاصة في مثلث .

نشاط 4 : أرسم دائرة مركزها A ، علم على هذه الدائرة النقط D ، C ، B حيث $BC = AB$ و D نظيرة B بالنسبة إلى النقطة A .

ما هي طبيعة كل من المثلثات : BCD ، ABC ، ACD

عين القياسين التاليين : $\widehat{BAC}$ و $\widehat{BCD}$.



حل النشاط:

المثلث ACD متساوي الساقين ، $AC = AD$ نصفي قطر الدائرة

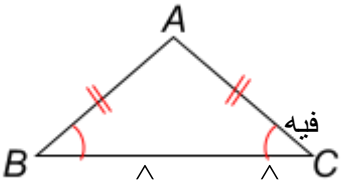
المثلث ABC متقايس الأضلاع ، $AC = AB = BC$.

المثلث BCD قائم في C .

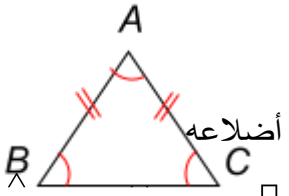
$\widehat{BAC} = 60^\circ$ و $\widehat{BCD} = 90^\circ$

- **المثلثات الخاصة :**

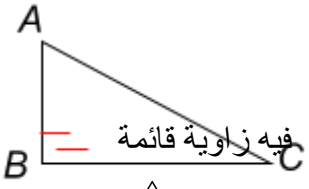
المثلث متساوي الساقين — المثلث متقايس الأضلاع — المثلث القائم



$\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$



$\widehat{ABC} = \widehat{ACB} = \widehat{BAC} = 60^\circ$

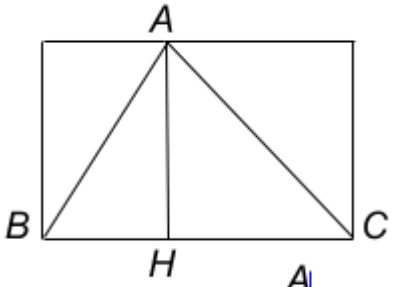


$\widehat{ABC} = 90^\circ$

- **المستقيمات الخاصة في مثلث :**

نشاط 5 : ABC مثلث كيفي و H المسقط العمودي للنقطة A على (BC) .

أحسب مساحة لكل من المثلثين ABH و ACH . ما هي مساحة المثلث ABC ؟



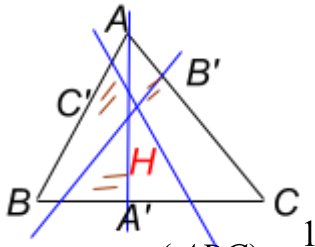
حل النشاط:

$$s(ABH) = \frac{1}{2} AH.HB \quad ، \quad s(ACH) = \frac{1}{2} AH.HC$$

$$s(ABC) = \frac{1}{2} AH.BC$$

لدينا : $BH + CH = BC$ ومنه :

- **الارتفاع** في مثلث هو المستقيم الذي يشمل أحد رؤوس المثلث ويعامد حامل الضلع المقابل له
- ارتفاعات مثلث متقاطعة في نقطة واحدة



- مساحة مثلث :

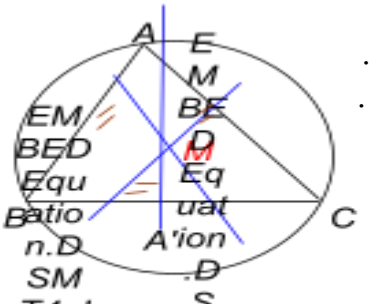
$$s(ABC) = \frac{1}{2} AA'.BC \quad ، \quad s(ABC) = \frac{1}{2} BB'.AC \quad ،$$

$$s(ABC) = \frac{1}{2} CC'.AB$$

نشاط 6 :

أرسم مثلثا كيفيا ABC ، و (Δ_1) ، (Δ_2) محورا الضلعين $[BC]$ و $[AB]$ على الترتيب يتقاطعان في النقطة M .

1) بين أن محور الضلع $[AC]$ يشمل النقطة M .
2) عين مركز الدائرة التي تشمل النقط C ، B ، A ، وارسمها.
3) عين موقع النقطة M في الحالة التي يكون فيها المثلث ABC قائما في A .
4) أين تقع النقطة M في الحالة التي يكون فيها المثلث ABC منفرج الزاوية .



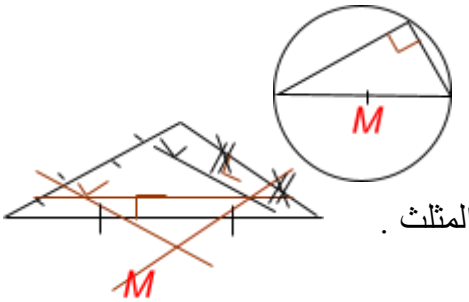
حل النشاط:

لدينا (Δ_1) محور $[BC]$ إذن : $MB = MC$

لدينا (Δ_2) محور $[AB]$ إذن : $MA = MB$

ومنه : $MA = MC$ معناه أن M هي نقطة من محور القطعة $[AC]$.

لدينا $MA = MB = MC$ وبالتالي مركز الدائرة التي تشمل النقط C ، B ، A هو النقطة M .



موقع النقطة M في الحالة التي يكون فيها المثلث ABC قائما في A هو منتصف القطعة $[BC]$

تقع النقطة M في الحالة التي يكون فيها المثلث ABC منفرج الزاوية ، خارج المثلث .

- **المحور** هو محور أحد أضلاعه.
- محاور مثلث متقاطعة في نقطة واحدة .
- نقطة تقاطع محاور مثلث هي مركز الدائرة المحيطة به (التي تشمل رؤوس المثلث)

نشاط 7 :

ABC مثلث كيفي ، C ، B' ، A' منتصفات القطع $[AB]$ ، $[AC]$ ، $[BC]$ على الترتيب.

1. ماذا نسمي المستقيمين (AA') و (BB') في المثلث ABC ؟
2. المستقيمان (AA') و (BB') يتقاطعان في النقطة G ، أرسم النقطة D نظيرة النقطة G بالنسبة إلى A' .
3. ما هي طبيعة الرباعي $BDCG$ ؟
4. استنتج $DC = 2\,GB'$ وأن النقطة G هي منتصف القطعة $[AD]$ و $(BD) \,//\, (GC')$.
5. بين أن النقط C ، G ، C' في استقامية .
6. بين أن $AG = 2\,GA'$ و $BG = 2\,GB'$ و $CG = 2\,GC'$.

حل النشاط:

نسمي المستقيمين (AA') و (BB') المتوسطان في المثلث ABC .

القطعتان $[BC]$ و $[GD]$ متناصفتان إذن الرباعي $BDCG$ متوازي أضلاع .

لدينا في المثلث $(DC) \,//\, (GB')$ ، (ACD) ومنه حسب مبرهنة طاليس

$$\frac{AB'}{AC} = \frac{AG}{AD} = \frac{GB'}{DC} \qquad \frac{AB'}{AC} = \frac{1}{2}$$

ولدينا B' منتصف القطعة $[AC]$ إذن :

إذن $DC = 2\,GB'$ و $AD = 2\,AG$ ومنه النقطة G هي منتصف القطعة $[AD]$.

في المثلث ABD ، النقطة G منتصف القطعة $[AD]$ و C' منتصف القطعة $[AB]$ إذن : $(BD) \,//\, (GC')$.

الرباعي $BDCG$ متوازي أضلاع إذن $(BD) \,//\, (GC)$ ولدينا $(BD) \,//\, (GC')$ إذن $(GC) \,//\, (GC')$

وهذان المستقيمان لهما نقطة مشتركة G إذن النقط C ، G ، C' في استقامية .

لدينا : $AG = GD$ و $GD = 2\,GA'$ إذن $AG = 2\,GA'$

لدينا : $BG = DC$ و $DC = 2\,GB'$ إذن $BG = 2\,GB'$

في المثلث $(BD) \,//\, (GC')$ ، (ABD) ومنه $\frac{AC'}{AB} = \frac{AG}{AD} = \frac{GC'}{BD} = \frac{1}{2}$ ، ومنه : $BD = 2\,GC'$

بما أن $BD = GC$ فإن : $GC = 2\,GC'$

- **المتوسط** في مثلث هو المستقيم الذي يشمل أحد رؤوس المثلث ومنتصف الضلع المقابل له.
- متوسطات مثلث متقاطعة في نقطة واحدة هي مركز ثقله .
- (AA') و (BB') و (CC') متوسطات المثلث ABC و G مركز ثقله لدينا :
- $AG = 2\,GA'$ و $BG = 2\,GB'$ و $CG = 2\,GC'$.

نشاط 8 :

ABC مثلث كيفي ، المنصفان الداخليان لزاويتي الرأسين A و B يتقاطعان في النقطة S .

1) النقط C' ، B' ، A' المساقط العمودية للنقطة S على المستقيمات (AB) ، (AC) ، (BC) على الترتيب .
بين $SA' = SB' = SC'$

2) بين أن المنصف الداخلي لزاوية الرأس C يشمل النقطة S .

3) عين مركز الدائرة التي تمس أضلاع المثلث ABC من الداخل وارسمها .

حل النشاط:

1) نقارن بين المثلثين القائمين ASB' و ASC' لدينا

SA وتر مشترك ، $\widehat{SAB'} = \widehat{SAC'}$ إذن : $SB' = SC$.

نقارن بين المثلثين القائمين BSA' و BSC' لدينا

SB وتر مشترك ، $\widehat{SBA'} = \widehat{SBC'}$ إذن : $SA' = SC$.

وبالتالي : $SA' = SB' = SC$

2) نقارن بين المثلثين القائمين CSB' و $A'SC$ لدينا SC وتر مشترك ، $SA' = SB$ إذن $\widehat{SCB'} = \widehat{SCA'}$

وبالتالي (SC) هو المنصف الداخلي للزاوية ذات الرأس C .

3) لدينا : $SA' = SB' = SC$ إذن S هي مركز الدائرة التي تشمل النقط C ، B' ، A' .

بما أن $(SA) \perp (BC')$ و$(SB) \perp (AC')$ و$(SC) \perp (BA')$

إذن (BC) و(AC) و(BA) هي مماسات لهذه الدائرة .

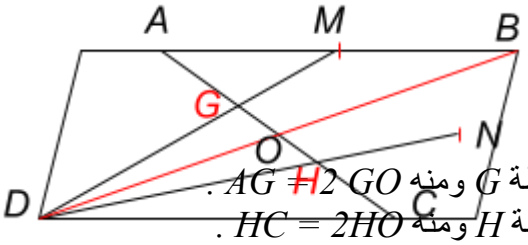
- **المنصف** في مثلث هو منصف إحدى زواياه .
- المنصفات الداخلية في مثلث متقاطعة في نقطة واحدة .
- نقطة تقاطع المنصفات هي مركز الدائرة المرسومة داخل هذا المثلث (أي التي تمس أضلاع المثلث من الداخل) .

تمرين : رقم 41 صفحة 240

$ABCD$ متوازي الأضلاع ، النقطتان M و N منتصفا القطعتين $[AB]$ و $[BC]$ على الترتيب.

$[DM]$ و $[DN]$ يقطعان $[AC]$ في النقطتين G و H على الترتيب.

بين أن : $AG = GH = HC$.



حل التمرين:

القطران $[AC]$ و $[BD]$ متناصفان في النقطة O .

في المثلث ABD لدينا (AO) و (DM) متوسطان يتقاطعان في النقطة G ومنه $AG = 2\,GO$.

في المثلث CBD لدينا (CO) و (DN) متوسطان يتقاطعان في النقطة H ومنه $HC = 2HO$.

ومنه : $OC = 3\,HO$ و $OA = 3\,OG$ إذن $OG = OH = \frac{1}{2}GH$

ومنه : $AG = GH = HC$

تمرين : رقم 45 صفحة 241

(Δ_1) ، (Δ_2) ، (Δ_3) ثلاث مستقيمات متقاطعة في نقطة G .

1) أنشئ مثلثا ABC بحيث تكون النقطة G مركز ثقله .

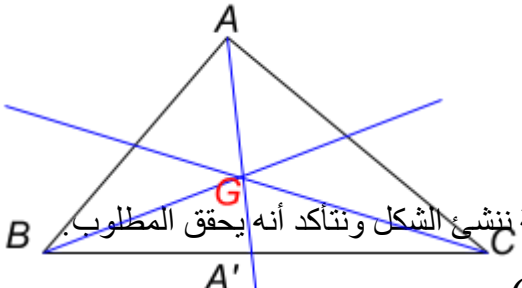
2) هل يوجد مثلثا واحدا يحقق المطلوب ؟

حل التمرين:

- **مرحلة التحليل :**

نفرض أن للمسألة حل أي يوجد على الأقل مثلثا ABC بحيث تكون النقطة G مركز ثقله . ونرسم شكلا مناسبا له.

لدينا القواعد التالية: $A'C = A'B$ و $AG = 2\,A'G$



- **مرحلة التركيب والإنشاء :** انطلاقا من القواعد السابقة ننشئ الشكل ونتأكد أنه يحقق المطلوب.

نرسم ثلاث مستقيمات (Δ_1) ، (Δ_2) ، (Δ_3) متقاطعة في نقطة G .

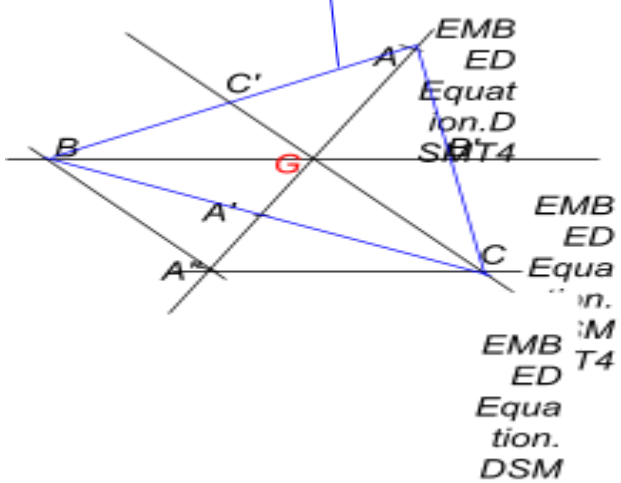
A نقطة من المستقيم (Δ_1) و A'' نظيرتها بالنسبة للنقطة G

A' منتصف القطعة $[A''G]$

الموازي من A'' للمستقيم (Δ_3) يقطع المستقيم (Δ_2) في B

والموازي من A'' للمستقيم (Δ_2) يقطع المستقيم (Δ_3) في C

إذن الرابعي $BGCA''$ متوازي أضلاع



ومنه A' هي منتصف $[BC]$ إذن (AA') هو متوسط في المثلث ABC .

(AB) يقطع (Δ_3) في النقطة C' . في المثلث $ABA"$

لدينا $(BA) // ("GC")$ و G منتصف $[AA"]$

إذن $C"$ منتصف $[AB]$ وبالتالي (CC') هو متوسط في المثلث ABC .

بما أن المتوسطات تتلاقى في نقطة واحدة إذن كذلك (BB') هو متوسط في المثلث ABC .

ومنه النقطة G مركز ثقل المثلث ABC .

توجد ما لا نهاية من الحلول للمسألة وهذا حسب اختيار النقطة A على المستقيم (Δ_1) .