

Районный конкурс
работ исследовательского характера (конференция) учащихся
по учебному предмету
«МАТЕМАТИКА»

ЭФФЕКТИВНЫЕ ТАБЛИЦЫ: КЛЮЧ К ФОРМУЛИРОВКЕ УРАВНЕНИЙ

Авторы:

Горох Максим Алексеевич,
Руцкая Диана Александровна,
учащиеся 8 «Б» класса
ГУО «Средняя школа № 1
г. Белыничи имени Н.И.Пашковского»

Руководитель работы:

Змиёва Елена Николаевна,
учитель математики
ГУО «Средняя школа № 1
г. Белыничи имени Н.И.Пашковского»

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	3
Глава 1. Родоначальницы современных задач	4
1.1. Перевод задач на язык алгебры	4
1.2. Задача- сюжет для юмористического рассказа	7
Глава 2. Современные задачи	9
2.1. Уравнение думает за нас	9
2.2. Неожиданности в задачах	10
2.3. Практические задачи	10
2.4. Рекомендации по использованию таблиц для перевода текстовых задач в уравнение	14
Заключение	16
Список использованных источников	17

ВВЕДЕНИЕ

Ньютон в своем учебнике алгебры «Всеобщая арифметика» писал: «Чтобы решить вопрос, относящийся к числам или к отвлеченным отношениям величин, нужно лишь перевести задачу с родного языка на язык алгебраический».

Уравнения в школьном курсе алгебры занимают ведущее значение. На их изучение отводится времени больше, чем на любую другую тему. Уравнения не только имеют важное теоретическое значение, но и служат чисто практическим целям.

Актуальность: уравнения применяются при моделировании жизненных процессов, а овладевая способами решения уравнений, мы находим ответы на различные вопросы науки и техники.

Решение уравнений – дело несложное, а вот составление уравнений по условию задачи часто вызывает трудности.

Язык алгебры весьма немногословен, поэтому не всегда удастся перевести на него обороты родного языка. Переводы попадают различные по трудности, как убедимся из ряда приведенных примеров на составление уравнений и систем уравнений.

Перевод задач на математический язык с помощью таблиц – мощный инструмент для решения задач, особенно тех, которые описывают взаимосвязи между несколькими величинами. Он помогает структурировать информацию и выделить ключевые данные, необходимые для составления уравнений или систем уравнений.

Гипотеза: использование таблиц при переводе задачи на математический язык облегчает процесс составления уравнения по условию задачи.

Целью данной работы является систематизация процесса формализации текстовых задач, представленных в письменной форме, путем преобразования их в уравнения с использованием табличного представления данных.

Задачи:

- 1) рассмотреть табличный метод формализации текстовых задач;
- 2) рассмотреть различные задачи, для решения которых применяется метод составления уравнения с помощью таблиц;
- 3) убедиться, что уравнения являются моделью многих жизненных задач;
- 4) выявить преимущества таблиц для перевода текстовых задач в уравнение;
- 5) разработать рекомендации по использованию таблиц для перевода текстовых задач в уравнение.

Глава 1. Родоначальницы современных задач

1.1. Перевод задач на язык алгебры

«При изучении наук задачи полезнее правил», – писал Ньютон в своей «Всеобщей арифметике» и сопровождал теоретические указания рядом примеров.

- Задача «Жизнь Диофанта».

История сохранила мало сведений из биографии древнего математика Диофанта. Все, что известно о нем, почерпнуто из надписи на его гробнице – надписи, составленной в форме математической задачи.

На родном языке	На языке алгебры
Путник! Здесь прах погребен Диофанта. И числа поведать Могут, о чудо, сколь долог был век его жизни.	x
Часть шестую его представляло прекрасное детство.	$\frac{x}{6}$
Двенадцатая часть протекла еще жизни- покрывся Пухом тогда подбородок.	$\frac{x}{12}$
Седьмую в бездетном браке провел Диофант.	$\frac{x}{7}$
Прошло пятилетие; он Был осчастливлен рождением прекрасного первенца сына,	5
Коему рок половину лишь жизни прекрасной и светлой Дал на земле по сравненью с отцом.	$\frac{x}{2}$
И в печали глубокой Старец земного удела конец воспринял, переживши Года четыре с тех пор, как сына лишился.	$x = \frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + 5 + \frac{x}{2} + 4$
Скажи, сколько лет жизни достигнув, Смерть воспринял Диофант?	

Решением уравнения является число 84, т.е. $x=84$.

А теперь переведем задачу с языка алгебры на родной язык. Основные этапы биографии Диофанта: женился в 21 год, стал отцом на 38 году, потерял сына в 80 лет, умер в 84 года.

Перевод данной задачи на математический язык с помощью таблицы можно встретить в различных источниках. Он помогает структурировать информацию и выделить ключевые данные, необходимые для составления уравнений или систем уравнений. Применим таблицы при решении последующих задач.

- Задача «Лошадь и мул».

Лошадь и мул шли бок о бок с тяжелой поклажей на спине. Лошадь жаловалась на свою непомерно тяжелую ношу. «Чего ты жалуешься?»- отвечал ей мул.- Ведь если я возьму у тебя один мешок, ноша моя станет вдвое тяжелее моей. А если бы ты сняла с моей спины один мешок, твоя поклажа стала бы одинакова с моей. Скажите, мудрые математики, сколько мешков несла лошадь и сколько нес мул?

На родном языке	На языке алгебры
Если я возьму у тебя один мешок,	$x - 1$
ноша моя	$y + 1$
моя станет вдвое тяжелее моей,	$y + 1 = 2(x - 1)$
а если бы ты сняла с моей спины один мешок,	$y - 1$
твоя поклажа	$x + 1$
стала бы одинакова с моей.	$y - 1 = x + 1$
Сколько мешков несла лошадь и сколько нес мул?	$\{y + 1 = 2(x - 1), y - 1 = x + 1\}$

Мы получили систему уравнений, решением которой является пара чисел $x = 5$, $y = 7$. Лошадь несла 5 мешков, мул-7.

Хочется обратить внимание, что данная задача актуальна и сегодня в мире людей. Кто-то сделал шаг и жалуется, что тяжело, а кто-то молча «тянет свой груз».

- Задача «Четверо братьев».

У четырех братьев 45 рублей. Если деньги первого увеличить на 2 рубля, деньги второго уменьшить на 2 рубля, деньги третьего увеличить вдвое, а деньги четвертого уменьшить вдвое, то у всех окажется поровну. Сколько денег было у каждого?

На родном языке	На языке алгебры
У четырех братьев 45 рублей.	$x + y + m + n = 45$
Если деньги первого увеличить на 2 рубля,	$x + 2$
деньги второго уменьшить на 2 рубля,	$y - 2$
деньги третьего увеличить вдвое,	$2m$
деньги четвертого уменьшить вдвое,	$\frac{n}{2}$
то у всех окажется поровну.	$x + 2 = y - 2 = 2m = \frac{n}{2}$
Сколько денег было у каждого?	

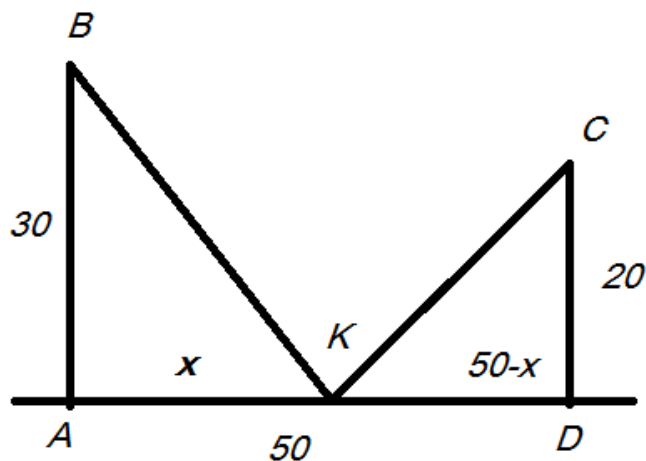
Рассмотрим три уравнения:
 $x + 2 = y - 2$, $x + 2 = 2m$, $x + 2 = \frac{n}{2}$.

Выражаем переменные $y = x + 4$, $m = \frac{x+2}{2}$, $n = 2x + 4$ и подставляем в первое уравнение $x + x + 4 + \frac{x+2}{2} + 2x + 4 = 45$ и решаем его. $x = 8$, тогда $y = 12$, $m = 5$, $n = 20$. Значит, у братьев было 8 рублей, 12 рублей, 5 рублей, 20 рублей.

- Задача арабского математика XI века «Птицы у реки».

На обоих берегах реки растет по пальме, одна против другой. Высота одной— 30 локтей, другой— 20 локтей; расстояние между их основаниями 50 локтей. На верхушке каждой пальмы сидит птица. Внезапно обе птицы заметили рыбу, выплывшую к поверхности воды между пальмами; они кинулись разом к ней и достигли ее одновременно. На каком расстоянии от основания более высокой пальмы находилась рыба?

Данную задачу удобнее перевести с родного языка на схематический чертеж.



На родном языке	На языке алгебры
Высота одной– 30 локтей,	$AB = 30$
другой– 20 локтей;	$CD = 20$
расстояние между их основаниями 50 локтей.	$AD = 50$
Внезапно обе птицы заметили рыбу, выплывшую к поверхности воды между пальмами;	$AK + KD = 50$
они кинулись разом к ней и достигли ее одновременно.	$AK = BK$ $x^2 + 30^2 = (50 - x)^2 + 20^2$
На каком расстоянии от основания более высокой пальмы находилась рыба?	

Мы воспользовались теоремой Пифагора для составления уравнения.

$$x^2 + 900 = 2500 - 100x + x^2 + 400;$$

$$100x = 2000;$$

$$x = 20.$$

Рыба находилась в 20 локтях от пальмы высотой 30 локтей.

1.2. Задача – сюжет для юмористического рассказа

• Задача «Коровы на лугу».

Трава на всем лугу растет одинаково густо и быстро. Известно, что 70 коров поели бы ее в 24 дня, а 30 коров– в 60 дней. Сколько коров поели бы всю траву луга в 96 дней?

В юмористическом рассказе двое взрослых, родственники школьника, которому задали задачу для решения в качестве домашнего задания, не могут ее решить и недоумевают:

– Выходит что-то странное, - говорит один. – Если в 24 дня 70 коров съедают всю траву луга, то сколько коров съедят ее в 96 дней? Конечно, одна четвертая часть от 70, т.е. $17\frac{1}{2}$ коров... Первая нелепость! А вот и вторая: 30 коров съедают траву в 60 дней. Сколько коров поели бы всю траву луга в 96 дней? Получается еще хуже: $18\frac{3}{4}$ коровы. Кроме того, если 70 коров поели ее в 24 дня, то 30 коров- в 56 дней, а не 60, как утверждает задача.

– А вы приняли в расчет, что трава все время растет?– спрашивает другой.

Замечание очень ценно: если не учитывать этого, то само условие противоречиво и решить задачу нельзя.

На родном языке	На языке алгебры
Общий запас,	1
пусть в сутки прирастает,	y
тогда в 24 дня прирастает,	$24y$
коровы съедают за 24 дня,	$24y + 1$
одна корова съедает за сутки.	$\frac{24y+1}{24 \cdot 70}$
Общий запас,	1
пусть в сутки прирастает,	y
тогда в 30 дня прирастает,	$30y$
коровы съедают за 30 дней,	$30y + 1$
одна корова съедает за сутки.	$\frac{30y+1}{30 \cdot 60}$
Количество травы, которое съедает корова за сутки, одинаково для всех коров.	$\frac{24y+1}{24 \cdot 70} = \frac{30y+1}{30 \cdot 60}$

Решив уравнение, получаем суточный прирост $y = \frac{1}{480}$, тогда одна корова за сутки съедает $\frac{1}{1600}$.

Составим уравнение для решения задачи. Пусть x - искомое число коров,

$$\text{тогда } \frac{96 \cdot \frac{1}{480} + 1}{96x} = 1600, \text{ откуда } x = 20.$$

Итак, 20 коров съели бы всю траву за 96 дней.

- Задача «Ньютона».

Три луга, покрытые травой одинаковой густоты и скорости роста, имеют площади $3\frac{1}{3}$ га, 10 га и 24 га. Первый прокормил 12 быков в продолжение 4 недель; второй- 21 быка в течение 9 недель. Сколько быков может прокормить третий луг в течение 18 недель?

Эта задача решается по предыдущему алгоритму.

Глава 2. Современные задачи

2.1. Уравнение думает за нас

- Задача «Семья».

Отцу 32 года, сыну 5 лет. Через сколько лет отец будет старше сына в 10 раз?

На родном языке	На языке алгебры
отцу	32
сыну	5
через x лет отцу	$32 + x$
через x лет сыну	$5 + x$
отец старше сына в 10 раз	$32 + x = 10(5 + x)$

$$32 + x = 10(5 + x);$$

$$32 + x = 50 + 10x;$$

$$- 9x = 18;$$

$$x = -2.$$

Мы получили, что через минус два года отец будет старше сына в 10 раз, но не подумали о том, что никогда в будущем такого не будет, может быть только в прошлом: отцу- 30 лет, сыну-3 года.

Уравнение оказалось умнее нас, по крайней мере, оно напомнило нам об упущении.

2.2. Неожиданности в задачах

С данными задачами мы столкнулись при подготовке к олимпиаде по математике.

- Найти двузначное число, обладающее следующими свойствами. Цифра десятков на 4 меньше цифры единиц. Если из числа, записанного теми же цифрами, но в обратном порядке, вычесть искомое число, то получится 27.

На родном языке	На языке алгебры
Цифра единиц,	x
цифра десятков,	$x+4$
двузначное число имеет вид.	$10(x + 4) + x$

Число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке, имеет вид.	$(x + 4) + 10x$
Если из числа, записанного теми же цифрами, но в обратном порядке, вычесть искомое число, то получится 27.	$10x + (x + 4) - (10(4 + x) + x) =$

Решаем уравнение:

$$10x + (x + 4) - (10(4 + x) + x) = 27;$$

$$10x + x + 4 - 40 - 10x - x = 27;$$

$$36 = 27.$$

Что же такое получилось? Это значит, что такое число не существует.

- Найти двузначное число, обладающее следующими свойствами. Цифра десятков на 3 меньше цифры единиц. Если из числа, записанного теми же цифрами, но в обратном порядке, вычесть искомое число, то получится 27.

На родном языке	На языке алгебры
Цифра единиц,	x
цифра десятков,	$x-3$
двузначное число имеет вид.	$10(x - 3) + x$
Число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке, имеет вид	$(x - 3) + 10x$
Если из числа, записанного теми же цифрами, но в обратном порядке, вычесть искомое число, то получится 27.	$10x + (x - 3) - (10(x - 3) + x) =$

Решаем уравнение:

$$10x + (x - 3) - (10(x - 3) + x) = 27;$$

$$10x + x - 3 - 10x + 30 - x = 27;$$

$$27 = 27.$$

Что же такое получилось? Это значит, что таких чисел несколько: 41, 52, 63, 74, 85, 96.

2.3. ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ

- Задача «В парикмахерской».

В парикмахерской имеется два раствора перекиси водорода: 30-процентный и 3- процентный. Нужно смешать так, чтобы получился 12-процентный раствор. Как это сделать?

Растворы	Вес	Перекись водорода
30% раствор	x г	$0,3x$ г
3% раствор	y г	$0,03y$ г
12% раствор	$(x + y)$ г	$0,12(x + y)$ г

Получили следующее уравнение: $0,12(x + y) = 0,3x + 0,03y$. Находим $x = 2y$. Это значит, что 3- процентного раствора надо взять в 2 раза больше, чем 30- процентного.

- Задача «Трамвай и пешеход».

Идя вдоль трамвайного пути, Вася заметил, что каждые 12 минут его нагоняет трамвай, а каждые 4 минуты он сам встречает трамвай. И человек, и трамваи движутся равномерно. Через сколько один после другого покидают трамваи свои конечные пункты?

На родном языке	На языке алгебры
Трамваи покидают свои конечные пункты каждые	x мин
Васю нагоняет трамвай каждые	12 мин
Вася походит путь за	12 мин
трамвай проходит этот же путь за	$12 - x$ мин
Вася проходит путь за	1 мин
Трамвай проходит этот же путь за	$\frac{12-x}{12}$ мин
трамвай идет навстречу Васе каждые	4 мин
Вася походит путь за	4 мин
трамвай проходит этот же путь за	$x - 4$ мин
Вася проходит путь за	1 мин
трамвай проходит этот же путь за	$\frac{x-4}{4}$ мин

Составляем уравнение: $\frac{12-x}{12} = \frac{x-4}{4}$. Отсюда $x = 6$. Значит, трамваи выходят каждые 6 минут с конечного пункта.

- Задача «Пароход и плоты».

Из города А в город В, расположенный ниже по течению реки, пароход шел 5 часов. Обратно, против течения, он шел с той же собственной скоростью 7 часов. Сколько часов идут плоты из А в В?

На родном языке	На языке алгебры
Пароход проходит АВ с собственной скоростью,	x час
тогда за час пароход проходит.	$\frac{1}{x}$ от АВ
Плот проходит АВ за,	y час
тогда за час плот проходит.	$\frac{1}{y}$ от АВ
Теплоход по течению проходит,	$\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ от АВ
теплоход против течения проходит,	$\frac{1}{x} - \frac{1}{y}$ от АВ
теплоход прошел по течению,	$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{5}$
теплоход против течения.	$\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{7}$

Составляем систему: $\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{5} \\ \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{7} \end{cases}$ и, решая её, получаем: $\frac{2}{35} = \frac{2}{y}$, $y = 35$. Значит, плоты идут из А в В 35 часов.

- Задача «Вечеринка».

На вечеринке 20 человек. Мария танцевала с 7 танцорами, Ольга- с 8, Вера- с 9 и так далее до Нины, которая танцевала со всеми танцорами. Сколько мужчин (танцоров) было на вечеринке?

На родном языке	На языке алгебры
Женщин- танцорок было	x
(1 –ая) Мария танцевала с	$7=6+1$ танцорами
(2 –ая) Ольга танцевала с	$8=6+2$ танцорами
(3 –ая) Ольга танцевала с	$9=6+2$ танцорами
...	
(x – ая, последняя) Нина танцевала с	$6 + x$ танцорами

Решаем уравнение: $x + (6 + x) = 20$, $x = 7$. Женщин- танцорок было 7. Тогда число мужчин $20-7=13$.

- Задача «Морская разведка».

Разведывательному кораблю, двигающемуся в составе эскадры, дано задание обследовать район моря на 70 миль в направлении движения эскадры. Скорость эскадры- 15 миль в час, скорость разведчика- 28 миль в час. Требуется определить, через сколько времени разведывательный корабль возвратится к эскадре?

На родном языке	На языке алгебры
Разведывательный корабль возвратится к эскадре через,	x час
за это время эскадра прошла,	$15x$ миль
разведывательный корабль прошел,	$28x$ миль
разведывательный корабль прошел	70 миль вперед
и часть второго пути обратно.	
Вместе прошли	$70 \cdot 2$ миль
Вместе прошли	$15x + 28x$ миль

Решаем уравнение: $15x + 28x = 70 \cdot 2$, откуда $x = \frac{140}{43} = 3\frac{11}{43}$.

Разведывательный корабль возвратится к эскадре через $3\frac{11}{43}$ часа.

• Задача «На велодроме».

По круговой дорожке велодрома едут два велосипедиста с неизменными скоростями. Когда они едут в противоположных направлениях, то встречаются каждые 10 секунд; когда же едут в одном направлении, то один достигает другого каждые 170 секунд. Какова скорость каждого велосипедиста, если длина круговой дороги 170 метров?

На родном языке	На языке алгебры
Скорость первого велосипедиста,	$x \frac{\text{м}}{\text{с}}$
за 10 секунд он проезжает.	$10x$ м
Скорость второго велосипедиста,	$y \frac{\text{м}}{\text{с}}$
за 10 секунд он проезжает.	$10y$ м
За 170 секунд первый проезжает,	$170x$ м
За 170 секунд второй проезжает,	$170y$ м
вместе проезжают.	170 м

Составляем систему: $\{10x + 10y = 170, 170x - 170y = 170$.

Решаем её: $\{x + y = 17, x - y = 1$;

$\{x = 9, y = 8$.

Итак, скорости велосипедистов $9\frac{\text{м}}{\text{с}}$ и $8\frac{\text{м}}{\text{с}}$.

Практико- ориентированных задач множество, мы выбрали наиболее интересные, на наш взгляд.

2.4. Рекомендации по использованию таблиц для перевода текстовых задач в уравнение

Использование таблиц для перевода текстовых задач в уравнения — это отличный способ организовать информацию и упростить решение задачи.

Вот несколько рекомендаций, как это сделать:

1. Создайте таблицу. Шаблон таблицы может выглядеть следующим образом:

На родном языке	На языке алгебры
-----------------	------------------

2. Заполните таблицу данными. В зависимости от условия задачи, вы можете заполнить ячейки таблицы известными значениями. Если в задаче указано, что одного из параметров нет, оставьте место для переменной.

3. Запись уравнений. Когда заполните таблицу, вы сможете увидеть связи между переменными, основанные на известных формулах. Используйте эти связи для записи уравнений.

4. Анализируйте подзадачи. Если задача может быть разбита на несколько подзадач (например, когда нужно рассчитать промежуточные результаты), создайте отдельные таблицы для каждой подзадачи.

5. Визуализируйте информацию. Если нужно, используйте разные цвета или подчеркивание для выделения ключевых данных, чтобы информация воспринималась легче.

6. Проверка решения. После того, как у вас есть уравнения, убедитесь, что они логично вытекают из данных в таблице. Проверьте, правильно ли интерпретированы условия задачи и корректно ли составлено уравнение.

Преимущества использования таблиц:

✓ Структурирование информации. Таблицы позволяют упорядочить данные задачи.

✓ Визуализация. Легче увидеть взаимосвязи между переменными.

✓ Упрощение сложных задач. Помогает разобраться с множеством данных и сложных условий.

✓ Минимизация ошибок. Облегчает проверку правильности вычислений.

✓ Понимание логики. Помогает разобраться в логике задачи.

Типы задач, для которых подходят таблицы:

— задачи на движение;

- задачи на проценты;
- задачи на работу;
- задачи на смешивание;
- задачи на совместную работу.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе были рассмотрены задачи, которые решались с помощью уравнений. В ходе работы мы убедились в возможности перевода задачи с родного языка на язык алгебры. Использование таблиц помогает структурировать информацию, облегчает понимание задачи и позволяет эффективно перевести ее на математический язык, что существенно упрощает решение.

Цель достигнута.

Уравнения в курсе алгебры занимают решающее место. Так как язык алгебры – это уравнение, то мы создавали математическую модель задачи, используя уравнения. Созданные уравнения давали неожиданные результаты, становились сюжетом для юмористических рассказов, даже «думали» за нас.

Гипотеза подтверждена.

Хочется отметить, что некоторые из предложенных задач имеют и арифметическое решение, которое, может быть, легче алгебраического, но, на наш взгляд, не столь интересное.

Если проанализировать условия задач, то можно увидеть, что множество современных задач – видоизмененные старинные задачи.

Предложенные задачи могут быть использованы для внеклассной работы, при подготовке и проведении математических конкурсов, олимпиад.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Перельман Я.И. Занимательная алгебра. – М.: Государственное издательство технико- теоретической литературы, 1955. – 184с.
2. Арефьева И.Г., Пирютко О.Н. Алгебра: учебное пособие для 7 класса учреждений общего среднего образования с русским языком обучения. – Мн.: Народная асвета, 2022. – 312 с.
3. Арефьева И.Г., Пирютко О.Н. Алгебра: учебное пособие для 8 класса учреждений общего среднего образования с русским языком обучения. – Мн.: Народная асвета, 2024. – 272 с.
4. Супрун В.П. Нестандартные методы решения задач по математике: - Мн.: Полымя, 2000. – 176 с.
5. Супрун В.П. Уравнения и неравенства. – Мн.: ИООО «Красико-Принт», 2003. – 64 с.
6. Школьные олимпиады. Международные математические олимпиады/ Сост. А.А.Фомин, Г.М. Кузнецова. – М.:Дрофа, 1998. – 160 с.