§ 14. Свойства корней n-й степени ($n > 1$, $n \in N$)

2.41. Найдите значение выражения:

а) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{75}$; б) $\frac{\sqrt{72}}{\sqrt{2}}$; в) $\sqrt{12} - \sqrt{3}$.

2.42. Вычислите:

а) $\sqrt{(-4)^2}$; б) $\sqrt{173^2 - 52^2}$.

2.43. При каких значениях t верно равенство:

а) $\sqrt{t^2} = t$; б) $\sqrt{(t-1)^2} = 1 - t$?

Рассмотрим два свойства корней n-й степени, аналогичные свойствам квадратных корней.

Свойство 1. Корень n-й степени из произведения неотрицательных множителей **равен произведению корней** n-й степени из этих множителей:

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}, \text{ где } a \geqslant 0,\ b \geqslant 0,\ n \in N,\ n > 1.$$

Свойство 2. Корень n-й степени из частного равен частному корней n-й степени делимого и делителя, если делимое — неотрицательное число, а делитель — положительное число:

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}, \text{ где } a \geqslant 0,\ b > 0,\ n \in N,\ n > 1.$$

Докажем свойство 1 для корней n-й степени из произведения двух множителей: $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$, где $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, $n \in N$, $n > 1$.

Доказательство. При доказательстве используем определение арифметического корня n-й степени из числа и свойства степени с целым показателем.

Обозначим $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = t$ и покажем, что $t \geqslant 0$ и $t^n = ab$.

1) По определению арифметического корня n-й степени из числа имеем: $\sqrt[n]{a} \geqslant 0$ и $\sqrt[n]{b} \geqslant 0$, а так как произведение двух неотрицательных множителей есть число неотрицательное, то $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \geqslant 0$, значит, $t \geqslant 0$.

2) По свойству степени с целым показателем получим: $t^n = \left(\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}\right)^n = \left(\sqrt[n]{a}\right)^n \cdot \left(\sqrt[n]{b}\right)^n$, а по определению корня n-й степени из числа $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n \cdot \left(\sqrt[n]{b}\right)^n = ab$, т. е. $t^n = ab$. Таким образом, свойство доказано.

Свойство 2 докажите самостоятельно.

Пример 1. Вычислите:

а) $\sqrt[5]{243 \cdot 32}$; б) $\sqrt[4]{36} \cdot \sqrt[4]{\frac{4}{9}}$; в) $\sqrt[3]{36} \cdot \sqrt[3]{48}$.

Решение. а) $\sqrt[5]{243 \cdot 32} = \sqrt[5]{243} \cdot \sqrt[5]{32} = 3 \cdot 2 = 6$;

$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$

б) $\sqrt[4]{36} \cdot \sqrt[4]{\frac{4}{9}} = \sqrt[4]{36 \cdot \frac{4}{9}} = \sqrt[4]{16} = 2$;

в) $\sqrt[3]{36} \cdot \sqrt[3]{48} = \sqrt[3]{36 \cdot 48} = \sqrt[3]{216 \cdot 8} = \sqrt[3]{216} \cdot \sqrt[3]{8} = 6 \cdot 2 = 12$.

Пример 2. Вычислите:

$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

а) $\sqrt[4]{\frac{81}{256}}$; б) $\frac{\sqrt[5]{64}}{\sqrt[5]{2}}$.

Решение. а) $\sqrt[4]{\frac{81}{256}} = \frac{\sqrt[4]{81}}{\sqrt[4]{256}} = \frac{3}{4}$; б) $\frac{\sqrt[5]{64}}{\sqrt[5]{2}} = \sqrt[5]{\frac{64}{2}} = \sqrt[5]{32} = 2$.

Свойство 3. Значение корня из степени не изменится, если и показатель корня, и показатель подкоренного выражения умножить на одно и то же натуральное число или разделить на их общий делитель:

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n \cdot k]{a^{m \cdot k}}; \quad \sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n : r]{a^{m : r}},$$

где $a \geqslant 0$, $n \in N$, $m \in Z$, $k \in N$, r — общий натуральный делитель чисел m и n, $n > 1$, $k > 1$ и $r > 1$.

Докажем, что $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[nk]{a^{mk}}$ или $\sqrt[nk]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^m}$. Доказательство проведем на основании определения корня степени nk из числа a^{mk}.

Обозначим $\sqrt[n]{a^m} = t$, покажем, что $t \geqslant 0$ и $t^{nk} = a^{mk}$.

Очевидно, что $t \geqslant 0$ по определению арифметического корня.

Покажем, что $t^{nk} = \left(\sqrt[n]{a^m}\right)^{nk} = a^{mk}$. По свойству степени с целым показателем и определению корня справедливы равенства: $\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^{nk} = \left(\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^n\right)^k = \left(a^m\right)^k = a^{mk}$.

Пример 3. Упростите выражение $\sqrt[21]{128}$.

Решение:

$\sqrt[21]{128} = \sqrt[21]{2^7} = \sqrt[3\cdot 7]{2^7} = \sqrt[3]{2}$.

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n\cdot k]{a^{m\cdot k}}$$

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n:r]{a^{m:r}}$$

Свойство 4. Чтобы извлечь корень k-й степени из корня n-й степени из неотрицательного числа, достаточно извлечь корень степени nk из этого числа:

$$\sqrt[k]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[kn]{a}$$

для любых натуральных $n > 1$ и $k > 1$, $a \geqslant 0$.

Для доказательства достаточно показать, что $\left(\sqrt[k]{\sqrt[n]{a}}\right)^{nk} = a$.

По свойству степени с натуральным показателем имеем: $\left(\sqrt[k]{\sqrt[n]{a}}\right)^{nk} = \left(\left(\sqrt[k]{\sqrt[n]{a}}\right)^{k}\right)^{n}$.

По определению корня получим: $\left(\left(\sqrt[k]{\sqrt[n]{a}}\right)^{k}\right)^{n} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^{n} = a$. Свойство доказано.

Пример 4. Упростите выражение $\sqrt[3]{\sqrt[4]{15}}$.

Решение:

$\sqrt[3]{\sqrt[4]{15}} = \sqrt[3\cdot 4]{15} = \sqrt[12]{15}$.

$$\sqrt[k]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[kn]{a}$$

Свойство 5. Для любого действительного a и натурального $n > 1$ справедливо равенство $\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} |a|, \text{ если } n \text{ — четное число,} \\ a, \text{ если } n \text{ — нечетное число.} \end{cases}$

Действительно, если n — четное, то $|a|^n = a^n$. Если n — нечетное, то $a^n = a^n$. Таким образом, на основании определения корня n-й степени свойство доказано.

Пример 5. Вычислите:

а) $\sqrt[8]{(-3)^8}$; б) $\sqrt[5]{(-3)^5}$.

Решение.

а) $\sqrt[8]{(-3)^8} = |-3| = 3$; б) $\sqrt[5]{(-3)^5} = -3$.

$$\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} |a|, \text{ если } n \text{ — четное} \\ a, \text{ если } n \text{ — нечетное} \end{cases}$$

Примеры основных заданий и их решения

1. Найдите значение выражения:

а) $\sqrt[4]{81 \cdot 625}$; б) $\sqrt[5]{0{,}00032 \cdot 3125}$.

Решение. а) $\sqrt[4]{81 \cdot 625} = \sqrt[4]{81} \cdot \sqrt[4]{625} = 3 \cdot 5 = 15$;

б) $\sqrt[5]{0{,}00032 \cdot 3125} = \sqrt[5]{0{,}00032} \cdot \sqrt[5]{3125} = 0{,}2 \cdot 5 = 1$.

2. Вычислите:

а) $\sqrt[6]{0{,}000243} \cdot \sqrt[6]{19{,}2}$; б) $\sqrt[3]{144} \cdot \sqrt[3]{12}$.

Решение. а) $\sqrt[6]{0{,}000243} \cdot \sqrt[6]{19{,}2} = \sqrt[6]{0{,}000243 \cdot 19{,}2} =$

$= \sqrt[6]{0{,}000243 \cdot 0{,}3 \cdot 64} = \sqrt[6]{0{,}3^5 \cdot 0{,}3 \cdot 64} = 0{,}3 \cdot 2 = 0{,}6$;

б) $\sqrt[3]{144} \cdot \sqrt[3]{12} = \sqrt[3]{12^2 \cdot 12} = \sqrt[3]{12^3} = 12$.

3. Найдите значение выражения:

а) $\sqrt[4]{\dfrac{0{,}0625}{810\,000}}$; б) $\sqrt[3]{\dfrac{216\,000}{0{,}001}}$.

Решение. а) $\sqrt[4]{\dfrac{0{,}0625}{810\,000}} = \dfrac{\sqrt[4]{0{,}0625}}{\sqrt[4]{810\,000}} = \dfrac{0{,}5}{30} = \dfrac{1}{60}$;

б) $\sqrt[3]{\dfrac{216\,000}{0{,}001}} = \dfrac{\sqrt[3]{216\,000}}{\sqrt[3]{0{,}001}} = \dfrac{60}{0{,}1} = 600$.

4. Найдите значение выражения:

а) $\dfrac{\sqrt[4]{128}}{\sqrt[4]{8}}$; б) $\dfrac{\sqrt[5]{0{,}000064}}{\sqrt[5]{0{,}2}}$.

Решение. а) $\dfrac{\sqrt[4]{128}}{\sqrt[4]{8}} = \sqrt[4]{\dfrac{128}{8}} = \sqrt[4]{16} = 2$;

б) $\dfrac{\sqrt[5]{0{,}000064}}{\sqrt[5]{0{,}2}} = \sqrt[5]{\dfrac{0{,}000064}{0{,}2}} = \sqrt[5]{0{,}00032} = 0{,}2$.

5. Упростите выражение:

а) $\sqrt[6]{16}$; б) $\sqrt[4]{25^2}$; в) $\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[6]{2}$; г) $\dfrac{\sqrt[4]{6}}{\sqrt[3]{2}}$.

Решение. а) $\sqrt[6]{16} = \sqrt[6]{2^4} = \sqrt[3]{2^2} = \sqrt[3]{4}$; б) $\sqrt[4]{25^2} = \sqrt{25} = 5$;

в) $\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[6]{2} = \sqrt[6]{4^2} \cdot \sqrt[6]{2} = \sqrt[6]{2^4 \cdot 2} = \sqrt[6]{2^5} = \sqrt[6]{32}$;

г) $\dfrac{\sqrt[4]{6}}{\sqrt[3]{2}} = \dfrac{\sqrt[12]{6^3}}{\sqrt[12]{2^4}} = \sqrt[12]{\dfrac{2^3 \cdot 3^3}{2^4}} = \sqrt[12]{\dfrac{27}{2}} = \sqrt[12]{13{,}5}$.

6. Упростите выражение:

а) $\sqrt[3]{\sqrt[5]{a}}$; б) $\sqrt{\sqrt[8]{a}}$; в) $\sqrt[9]{\sqrt{a^3}}$.

Решение. а) $\sqrt[3]{\sqrt[5]{a}} = \sqrt[15]{a}$; б) $\sqrt{\sqrt[8]{a}} = \sqrt[2\cdot 8]{a} = \sqrt[16]{a}$;

в) $\sqrt[9]{\sqrt{a^3}} = \sqrt[18]{a^3} = \sqrt[6]{a}$.

7. Найдите значение выражения:

а) $\sqrt[6]{(-5)^6}$; б) $\sqrt[13]{(-7)^{13}}$.

Решение. а) $\sqrt[6]{(-5)^6} = |-5| = 5$; б) $\sqrt[13]{(-7)^{13}} = -7$.

8. Замените выражение на тождественно равное ему:

а) $\sqrt[12]{k^{12}}$, если $k \geqslant 0$; б) $\sqrt[14]{p^{14}}$, если $p \leqslant 0$.

Решение. а) $\sqrt[12]{k^{12}} = |k| = k$, так как $k \geqslant 0$;

б) $\sqrt[14]{p^{14}} = |p| = -p$, так как $p \leqslant 0$.

? 1. При каких значениях a и b верно равенство $\sqrt[6]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[6]{a}}{\sqrt[6]{b}}$?

2. При каких значениях m верно равенство $\sqrt[8]{m^8} = -m$?

2.44. Вычислите с помощью свойства корня n-й степени из произведения:

а) $\sqrt[3]{8 \cdot 27}$; б) $\sqrt[3]{64 \cdot 125}$; в) $\sqrt[4]{0{,}0625 \cdot 81}$;

г) $\sqrt[5]{32 \cdot 0{,}00243}$; д) $\sqrt[3]{0{,}027 \cdot 15^3}$; е) $\sqrt[4]{625 \cdot 3^8}$;

ж) $\sqrt[3]{0{,}001 \cdot 64 \cdot 343}$; з) $\sqrt[4]{0{,}0016 \cdot 625 \cdot 7^4}$.

2.45. Найдите значение произведения:

а) $\sqrt[3]{25} \cdot \sqrt[3]{5}$; б) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{500}$; в) $\sqrt[5]{2} \cdot \sqrt[5]{16}$;

г) $\sqrt[3]{2{,}7} \cdot \sqrt[3]{10}$; д) $\sqrt[5]{0{,}32} \cdot \sqrt[5]{100}$; е) $\sqrt[4]{0{,}8} \cdot \sqrt[4]{20}$;

ж) $\sqrt[3]{0{,}1} \cdot \sqrt[3]{0{,}08}$; з) $\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{-2}$.

2.46. Найдите значение выражения с помощью свойства корня n-й степени из частного:

а) $\sqrt[4]{\frac{81}{0{,}0625}}$; б) $\sqrt[3]{\frac{0{,}064}{1000}}$; в) $\sqrt[5]{\frac{3\,200\,000}{0{,}00243}}$; г) $\sqrt[3]{\frac{0{,}343}{125}}$.

2.47. Найдите значение частного:

а) $\frac{\sqrt[5]{96}}{\sqrt[5]{3}}$; б) $\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{54}}$; в) $\frac{\sqrt[3]{400}}{\sqrt[3]{50}}$;

г) $\frac{\sqrt[4]{4{,}8}}{\sqrt[4]{0{,}3}}$; д) $\sqrt[3]{\frac{5}{36}} : \sqrt[3]{\frac{6}{25}}$; е) $\sqrt[3]{7\frac{1}{5}} : \sqrt[3]{-\frac{1}{30}}$.

2.48. Сравните значения выражений $\sqrt[4]{ab}$ и $\sqrt[4]{\frac{a}{b}}$, если:

а) $a = 16$, $b = 625$; б) $a = -256$, $b = -0{,}0081$; в) $a = 7^4$, $b = 3^8$.

Можно ли найти значения данных выражений, если числа a и b разных знаков?

2.49. Вычислите:

а) $\sqrt[3]{27 \cdot 125} - \sqrt[4]{16 \cdot 81}$; б) $\sqrt[3]{-\frac{8}{343}} + \sqrt[4]{\frac{0{,}0625}{256}}$.

2.50. Найдите значение выражения:

а) $\sqrt[4]{\frac{0{,}0016 \cdot 256}{810\,000}}$; б) $\sqrt[3]{\frac{0{,}008}{27 \cdot 0{,}125}}$.

2.51. Найдите значение произведения:

а) $\sqrt[3]{12} \cdot \sqrt[3]{18}$; б) $\sqrt[4]{72} \cdot \sqrt[4]{18}$; в) $\sqrt[3]{75} \cdot \sqrt[3]{45}$;

г) $\sqrt[5]{160} \cdot \sqrt[5]{625}$; д) $\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{-6} \cdot \sqrt[3]{9}$; е) $\sqrt[4]{4} \cdot \sqrt[4]{27} \cdot \sqrt[4]{12}$.

2.52. Найдите значение частного:

а) $\frac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt[3]{250}}$; б) $\frac{\sqrt[4]{486}}{\sqrt[4]{96}}$; в) $\frac{\sqrt[3]{3125}}{\sqrt[3]{5400}}$; г) $\frac{\sqrt[5]{6{,}4}}{\sqrt[5]{48{,}6}}$.

2.53. Найдите значение выражения $\sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[4]{8} + \frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{81}}$, используя свойства корня.

2.54. Найдите, во сколько раз число:

а) $\sqrt[6]{128}$ больше числа $\sqrt[6]{2}$; б) число $\sqrt[3]{4}$ меньше числа $\sqrt[3]{108}$.

2.55. Вычислите значение выражения:

а) $5\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{9}$; б) $-6\sqrt[5]{4} \cdot 3\sqrt[5]{8}$;

в) $3\sqrt[3]{7} \cdot \left(\sqrt[3]{-49}\right)$; г) $5\sqrt[4]{10} \cdot 0{,}3\sqrt[4]{1000}$.

2.56. Определите, являются ли взаимно обратными числа:

а) $\sqrt[3]{5}$ и $\frac{\sqrt[3]{25}}{5}$; б) $2\sqrt[4]{2}$ и $\frac{1}{\sqrt[4]{32}}$; в) $\sqrt[5]{64}$ и $-\frac{1}{\sqrt[5]{64}}$.

2.57. Найдите значение выражения на основании свойств корня n-й степени:

а) $\sqrt[4]{1780^2 - 780^2}$; б) $\sqrt[3]{0{,}69^2 - 0{,}51^2}$;

в) $\sqrt[4]{\sqrt{34} - 3\sqrt{2}} \cdot \sqrt[4]{\sqrt{34} + 3\sqrt{2}}$; г) $\sqrt[3]{5\sqrt{3} + \sqrt{11}} \cdot \sqrt[3]{5\sqrt{3} - \sqrt{11}}$.

2.58. Представьте выражение $\sqrt[3]{2}$ в виде корня:

а) шестой степени; б) девятой степени;

в) двенадцатой степени; г) восемнадцатой степени.

2.59. Представьте выражение $\sqrt{a}$ в виде корня:

а) четвертой степени; б) шестой степени;

в) десятой степени; г) шестнадцатой степени.

2.60. Представьте в виде корней одной и той же степени числа:

а) $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt{5}$ и $\sqrt[6]{3}$; б) $\sqrt[4]{2}$, $\sqrt[8]{3}$ и $\sqrt[12]{7}$.

2.61. Представьте выражение в виде корня с меньшим показателем:

а) $\sqrt[6]{2^4}$; б) $\sqrt[15]{7^9}$; в) $\sqrt[8]{3^4}$; г) $\sqrt[24]{12^8}$;

д) $\sqrt[4]{25}$; е) $\sqrt[6]{81}$; ж) $\sqrt[6]{125}$; з) $\sqrt[12]{27}$.

2.62. Вычислите:

а) $\sqrt[6]{49^3}$; б) $\sqrt[6]{125^2}$; в) $\sqrt[100]{9^{50}}$; г) $\sqrt[24]{7^{48}}$.

2.63. Представьте в виде корня:

а) $\sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[8]{0{,}5}$; б) $\sqrt[6]{3} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{6}}$; в) $\frac{\sqrt[4]{50}}{\sqrt{5}}$;

г) $\frac{\sqrt[10]{80}}{\sqrt[5]{4}}$; д) $\sqrt[8]{2} \cdot \sqrt[12]{3}$; е) $\sqrt[6]{5} : \sqrt[4]{2}$.

2.64. Определите, рациональным или иррациональным числом является значение выражения:

а) $\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[6]{4}$; б) $\sqrt[7]{-5} \cdot \sqrt[14]{25}$; в) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[6]{2} \cdot \sqrt[6]{8}$;

г) $\sqrt{3} \cdot \sqrt[6]{3} \cdot \sqrt[12]{3}$; д) $\frac{\sqrt[3]{7} \cdot \sqrt[4]{343}}{\sqrt[12]{7}}$; е) $\frac{\sqrt[8]{8^3} \cdot \sqrt[40]{8}}{\sqrt[5]{8^4}}$.

2.65. Упростите выражение:

а) $\sqrt[3]{\sqrt[3]{a}}$; б) $\sqrt[4]{\sqrt{a}}$; в) $\sqrt{\sqrt[5]{a^2}}$;

г) $\sqrt[5]{\sqrt[6]{a^{10}}}$; д) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{a} \cdot \sqrt{a}}$; е) $\sqrt[4]{\sqrt{a}} \cdot \sqrt[6]{\sqrt[4]{a}}$.

2.66 Вычислите:

а) $\sqrt[3]{\sqrt[3]{9}} \cdot \sqrt[9]{3^7}$; б) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{25}} \cdot \sqrt[6]{5^5}$; в) $\dfrac{\sqrt{\sqrt[3]{4}}}{\sqrt[3]{2}} + \dfrac{\sqrt[15]{2}}{\sqrt[5]{\sqrt[3]{2}}}$.

2.67. Найдите значение выражения:

а) $\sqrt[4]{(-17)^4}$; б) $\sqrt[5]{(-10)^5}$; в) $\sqrt[6]{(-7)^6}$; г) $\sqrt[7]{(-13)^7}$.

2.68. Упростите выражение:

а) $\sqrt[4]{a^4}$, если $a \geqslant 0$; б) $\sqrt[6]{b^6}$, если $b < 0$;

в) $\sqrt[4]{81m^4}$, если $m \geqslant 0$; г) $\sqrt[8]{\dfrac{c^8}{256}}$, если $c < 0$;

д) $-3\sqrt[4]{16b^4}$, если $b < 0$; е) $-2a\sqrt[4]{\dfrac{a^4}{625}}$, если $a \geqslant 0$.

2.69. Представьте выражение в виде одночлена:

а) $\sqrt[7]{a^7}$; б) $-4\sqrt[3]{8a^3}$; в) $12a\sqrt[9]{-a^9}$; г) $5a^2\sqrt[5]{-32a^5}$.

2.70. Упростите выражение:

а) $\sqrt[4]{x^4} - x$, если $x \geqslant 0$; б) $\sqrt[6]{x^6} - \sqrt[3]{x^3}$, если $x \leqslant 0$.

2.71. Упростите выражение $\sqrt[3]{343x^3} + \sqrt[4]{81x^4} - \sqrt{64x^2}$ и найдите его значение при $x = -0{,}5$.

2.72. Упростите выражение:

а) $\sqrt[4]{a^{12}}$, если $a \geqslant 0$; б) $\sqrt[3]{8b^9}$; в) $\sqrt[4]{16m^8}$; г) $\sqrt[4]{\dfrac{c^{16}}{81}}$;

д) $-6\sqrt[4]{625b^{20}}$, если $b < 0$; е) $-8a\sqrt[6]{\dfrac{a^{18}}{64}}$, если $a \geqslant 0$.

2.73. Упростите выражение $\sqrt[4]{\dfrac{1}{81}a^4b^{12}}$, если a и b:

а) числа одного знака; б) числа разных знаков.

2.74. Упростите выражение:

а) $\sqrt[4]{(a-7)^4}$ при $a \geqslant 7$; б) $\sqrt[6]{(a+8)^6}$ при $a < -8$;

в) $\sqrt[8]{(y-3)^8} + \sqrt[4]{(y-5)^4}$ при $3 \leqslant y \leqslant 5$.

2.75*. Вычислите:

а) $\sqrt[4]{\left(\sqrt{120}-11\right)^4} + \sqrt[4]{\left(\sqrt{120}+11\right)^4}$;

б) $\sqrt[6]{\left(4\sqrt{6}+10\right)^6} - \sqrt[6]{\left(4\sqrt{6}-10\right)^6} - 20$.

2.76. Вычислите с помощью свойства корня n-й степени из произведения:

а) $\sqrt[3]{27 \cdot 125}$; б) $\sqrt[4]{81 \cdot 256}$; в) $\sqrt[5]{243 \cdot 0{,}00001}$;

г) $\sqrt[3]{0{,}064 \cdot 343}$; д) $\sqrt[5]{32 \cdot 6^5}$; е) $\sqrt[3]{0{,}008 \cdot 27 \cdot 9^6}$.

2.77. Найдите значение произведения:

а) $\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{2}$; б) $\sqrt[3]{3{,}2} \cdot \sqrt[3]{20}$; в) $\sqrt[4]{6{,}25} \cdot \sqrt[4]{100}$;

г) $\sqrt[5]{24{,}3} \cdot \sqrt[5]{10}$; д) $\sqrt[4]{0{,}5} \cdot \sqrt[4]{0{,}125}$; е) $\sqrt[5]{3} \cdot \sqrt[5]{9} \cdot \sqrt[5]{-9}$.

2.78. Найдите значение выражения с помощью свойства корня n-й степени из частного:

а) $\sqrt[4]{\dfrac{16}{0{,}0081}}$; б) $\sqrt[3]{\dfrac{27\,000}{0{,}008}}$; в) $\sqrt[5]{\dfrac{0{,}00001}{32}}$; г) $\sqrt[4]{\dfrac{625}{0{,}0016}}$.

2.79. Найдите значение частного:

а) $\dfrac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt[3]{2}}$; б) $\dfrac{\sqrt[7]{2}}{\sqrt[7]{256}}$; в) $\dfrac{\sqrt[4]{1250}}{\sqrt[4]{2}}$; г) $\dfrac{\sqrt[3]{-128}}{\sqrt[3]{2000}}$.

2.80. Найдите значения выражений $\sqrt[3]{mn}$ и $\sqrt[3]{\dfrac{m}{n}}$, если:

а) $m = 125$, $n = 0{,}027$; б) $m = 10^6$, $n = 2^3$.

2.81. Найдите значение выражения:

а) $\sqrt[3]{\dfrac{125 \cdot 343}{0{,}027}}$; б) $\sqrt[4]{\dfrac{160\,000}{81 \cdot 625}}$.

2.82. Найдите значение выражения, используя свойства корня n-й степени:

а) $\sqrt[3]{24} \cdot \sqrt[3]{9}$; б) $\sqrt[4]{48} \cdot \sqrt[4]{27}$; в) $\sqrt[3]{-15} \cdot \sqrt[3]{225}$;

г) $\sqrt[5]{48} \cdot \sqrt[5]{162}$; д) $\dfrac{\sqrt[3]{625}}{\sqrt[3]{40}}$; е) $\dfrac{\sqrt[4]{648}}{\sqrt[4]{128}}$.

2.83. Вычислите:

а) $7\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{4}$; б) $-2\sqrt[5]{9} \cdot 5\sqrt[5]{27}$;

в) $8\sqrt[3]{10} \cdot \left(\sqrt[3]{-100}\right)$; г) $0{,}4\sqrt[4]{5} \cdot 7\sqrt[4]{125}$.

2.84. Найдите значение выражения на основании свойств корня n-й степени:

а) $\sqrt[4]{175^2 - 168^2}$; б) $\sqrt[3]{7 - \sqrt{22}} \cdot \sqrt[3]{7 + \sqrt{22}}$.

2.85. Представьте выражение $\sqrt[4]{3}$ в виде корня:

а) восьмой степени;

б) двенадцатой степени;

в) шестнадцатой степени.

2.86. Представьте в виде корней одной и той же степени числа:

а) $\sqrt[5]{7}$, $\sqrt{2}$ и $\sqrt[10]{3}$; б) $\sqrt[4]{3}$, $\sqrt[6]{5}$ и $\sqrt[8]{7}$.

2.87. Представьте выражение в виде корня с меньшим показателем:

а) $\sqrt[12]{3^3}$; б) $\sqrt[8]{5^6}$; в) $\sqrt[4]{7^2}$; г) $\sqrt[12]{3^6}$; д) $\sqrt[6]{27}$; е) $\sqrt[15]{32}$.

2.88. Вычислите:

а) $\sqrt[8]{25^4}$; б) $\sqrt[12]{27^4}$; в) $\sqrt[30]{81^{15}}$; г) $\sqrt[16]{10^{32}}$.

2.89. Определите, рациональным или иррациональным числом является значение выражения:

а) $\sqrt[3]{36} \cdot \sqrt[6]{36}$; б) $\sqrt[5]{16} \cdot \sqrt[10]{4}$; в) $\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[6]{5} \cdot \sqrt[12]{5}$; г) $\dfrac{\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{9}}{\sqrt[6]{3}}$.

2.90. Упростите выражение:

а) $\sqrt[4]{\sqrt[4]{b}}$; б) $\sqrt[3]{\sqrt{b}}$; в) $\sqrt{\sqrt[7]{b^2}}$; г) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{b^6}}$.

2.91. Найдите значение выражения:

а) $\sqrt[3]{\sqrt[3]{16}} \cdot \sqrt[9]{2^5}$; б) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{9}} \cdot \sqrt[6]{3^5}$; в) $\dfrac{\sqrt[21]{5}}{\sqrt[7]{\sqrt[3]{5}}} + \dfrac{\sqrt{\sqrt[3]{81}}}{\sqrt[3]{9}}$.

2.92. Найдите значение выражения:

а) $\sqrt[8]{(-19)^8}$; б) $\sqrt[3]{(-5)^3}$; в) $\sqrt[4]{(-2)^4}$; г) $\sqrt[5]{(-11)^5}$.

2.93. Упростите выражение:

а) $\sqrt[8]{m^8}$, если $m \geqslant 0$; б) $\sqrt[4]{c^4}$, если $c < 0$;

в) $\sqrt[6]{64x^6}$, если $x \geqslant 0$; г) $\sqrt[4]{\dfrac{a^4}{81}}$, если $a < 0$;

д) $-2\sqrt[4]{625y^4}$, если $y < 0$; е) $-3b\sqrt[8]{\dfrac{b^8}{256}}$, если $b \geqslant 0$.

2.94. Представьте выражение в виде одночлена:

а) $\sqrt[3]{x^3}$; б) $-2\sqrt[5]{32b^5}$; в) $10c\sqrt[11]{-c^{11}}$; г) $3y^5\sqrt[7]{-128y^7}$.

2.95. Упростите выражение $\sqrt[4]{625c^4} - \sqrt[5]{32c^5} + \sqrt{36c^2}$ и найдите его значение при $c = -\dfrac{1}{13}$.

2.96. Упростите выражение:

а) $\sqrt[6]{a^{18}}$, если $a \geqslant 0$; б) $\sqrt[3]{27m^6}$; в) $\sqrt[6]{64a^{12}}$; г) $\sqrt[4]{\frac{a^{48}}{16}}$;

д) $-2\sqrt[4]{81b^{12}}$, если $b < 0$; е) $-8n\sqrt[8]{\frac{n^{24}}{256}}$, если $n \geqslant 0$.

2.97. Упростите выражение $\sqrt[4]{\frac{16}{81}m^8n^{20}}$, если:

а) $n \geqslant 0$; б) $n < 0$.

Объясните, почему знак значения данного выражения не зависит от знака переменной m.

2.98*. Представьте в виде многочлена выражение:

а) $\sqrt[4]{(a-4)^4}$ при $a > 4$; б) $\sqrt[6]{(b+2)^6}$ при $b < -2$;

в) $\sqrt[8]{(3b+10{,}2)^8} - 10{,}2$ при $-3 \leqslant b \leqslant 3$.

2.99. Найдите сумму корней уравнения $\frac{3}{x+5} + 1 = \frac{4}{x^2+10x+25}$.

2.100. Сравните значения выражений $\frac{1}{\sqrt{13}-\sqrt{10}}$ и $\frac{1}{\sqrt{14}-\sqrt{11}}$.

2.101. Зная, что $a \geqslant 0$, $b \leqslant 0$, вынесите множитель за знак корня в выражении:

а) $\sqrt{3a^2}$; б) $\sqrt{7b^2}$; в) $\sqrt{50a^6b^4}$; г) $\sqrt{\frac{49}{64}a^5b^2}$.

2.102. В выражении $a\sqrt{5}$ внесите множитель под знак корня, если:

а) $a \geqslant 0$; б) $a < 0$.

2.103. Сократите дробь $\frac{5a+2+5ab+2b}{2b-2+5ab-5a}$.

2.104. На рисунке 119 изображен график функции $y = f(x)$, заданной на отрезке $[-6; 6]$. Постройте график функции:

а) $y = f(x-2)$; б) $y = f(x+1)$;

в) $y = f(x) - 3$; г) $y = f(x) + 4$.

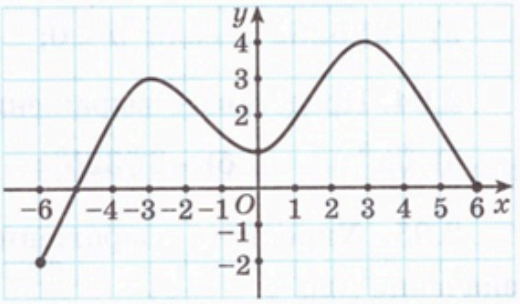

Рис. 119

2.105. Вычислите:

а) $\operatorname{tg}\left(2\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)$;

б) $\operatorname{ctg}\left(2\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)$.

25.04.2020 для закрепления №№ 2.44 - 2.52,

Д/з § 14, №№ 2.76 - 2.82;

30.04.2020 для закрепления №№ 2.55 - 2.64,

Д/з § 14, №№ 2.83 - 2.89;

01.05.2020 для закрепления № 2.65 - 2.74,

Д/з § 14, №№ 2.90 - 2.97.