

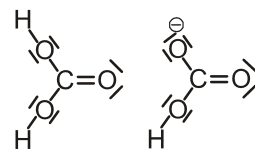
Autour du sang : pH, teneur et consommation en dioxygène, hydrodynamique et pouls

PARTIE I - Le sang : un milieu tamponné

I.A /

I.A.1- L'atome d'hydrogène compte 1 électron de valence, celui de carbone en compte 4 et celui d'oxygène 6. Pour H_2CO_3 , cela fait donc 24 électrons de valence, soit 12 doublets. Et HCO_3^- s'en déduit.

Pour la molécule et l'ion, on a des composés du type AX_3E_0 , ce qui donne une géométrie plane avec des angles de 120° environ.



$$\text{pH} = \text{pK}_a + \log \left(\frac{[\text{HCO}_3^-]}{[\text{H}_2\text{CO}_3]} \right), \text{ d'où } \frac{[\text{HCO}_3^-]}{[\text{H}_2\text{CO}_3]} = 10^{\text{pH} - \text{pK}_a} = 10^{7,40 - 6,37}$$

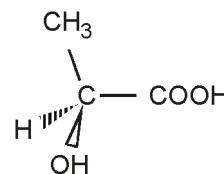
I.A.2 – On a la relation . D'autre part, par conservation de

la matière, on a $[\text{H}_2\text{CO}_3] + [\text{HCO}_3^-] = c_{\text{totale}} = 0,0280$.

Il vient $[\text{H}_2\text{CO}_3] = \frac{c_{\text{totale}}}{1 + 10^{\text{pH} - \text{pK}_a}} = 2,37 \cdot 10^{-3} \text{ mol.L}^{-1}$ et $[\text{HCO}_3^-] = \frac{c_{\text{totale}} \cdot 10^{\text{pH} - \text{pK}_a}}{1 + 10^{\text{pH} - \text{pK}_a}} = 2,56 \cdot 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$

I.B /

I.B.1- Les règles de Cahn Ingold et Prélog permettent d'attribuer les numéros de priorité suivants :
1 pour OH, 2 pour COOH, 3 pour CH_3 et 4 pour H. D'où la configuration S ci-contre :



I.B.2- Effectuons un bilan directement en concentrations : du fait que la réaction est supposée quantitative, on a :

HB	+	HCO_3^-	=	H_2CO_3	+	B^-
$2,00 \cdot 10^{-3}$		$2,56 \cdot 10^{-2}$		$2,37 \cdot 10^{-3}$		0
0		$2,36 \cdot 10^{-2}$		$4,37 \cdot 10^{-3}$		$2,00 \cdot 10^{-3}$

$$\text{pH} = \text{pK}_a + \log \left(\frac{[\text{HCO}_3^-]}{[\text{H}_2\text{CO}_3]} \right)$$

Ainsi la relation conduit à $\text{pH}_2 = 7,10$.

On sort donc de l'intervalle $[7,36 ; 7,44]$ ce qui semble incompatible avec la vie, mais le résultat va être corrigé dans la question suivante.

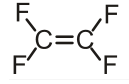
I.B.3- On reprend le calcul du pH avec $[\text{HCO}_3^-] = 2,36 \cdot 10^{-2}$ mais en conservant $[\text{H}_2\text{CO}_3] = 2,37 \cdot 10^{-3}$.

Cela conduit à $\text{pH}_3 = 7,36$. Cette fois, on est bien dans l'intervalle compatible avec la vie.

PARTIE II - Le dioxygène : mesure in vivo et consommation animale

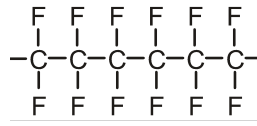
II.A / Sonde de Clark

II.A.1- Le monomère « tétrafluoroéthylène » a pour formule

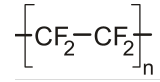


chimique

Le polymère obtenu par polyaddition est donc :



litre de solution



soit :

dans la cellule

II.A.2- Le nombre de moles de K^+ et de Cl^- par

$$n_1 = \frac{175}{39 + 35,5} = 2,3 \text{ mol}$$

est

Ainsi, on a dans la cellule $[\text{Cl}^-] = 2,3 \text{ mol.L}^{-1}$.

$$[\text{Ag}^+] = \frac{K_s}{[\text{Cl}^-]} = 0,89 \cdot 10^{-11} \text{ mol.L}^{-1}$$

Le précipité de chlorure d'argent apparaît donc pour

II.A.3-

a) Il y a oxydation sur l'électrode d'argent, qui constitue donc l'anode : $\text{Ag} + \text{Cl}^- = \text{AgCl(s)} + \text{e}^-$.

Il y a réduction sur l'électrode de platine, qui constitue donc la cathode : $\frac{1}{2} \text{O}_2 + 2\text{e}^- + 2\text{H}^+ = \text{H}_2\text{O}$.

b) La courbe (1) correspond à la cathode en platine car le courant est négatif. Il s'y déroule la demie réaction de réduction du dioxygène en eau.

La courbe (2) correspond à l'anode en argent car le courant est positif. Il s'y déroule la demie réaction d'oxydation de l'argent en AgCl.

c) Pour le couple AgCl/Ag, la loi de Nernst s'écrit :

$$E = E^\circ_{\text{AgCl/Ag}} + 0,06 \log(1/[\text{Cl}^-]). \text{ Mais puisque le couple } \text{Ag}^+/\text{Ag} \text{ est également présent, on a également l'égalité :}$$

$$E = E^\circ_{\text{Ag}^+/\text{Ag}} + 0,06 \log([\text{Ag}^+]).$$

Du fait que le précipité AgCl coexiste avec ses ions Ag^+ et Cl^- , la loi d'action des masses $K_s = [\text{Ag}^+][\text{Cl}^-]$ est vérifiée, ce qui donne $E = E^\circ_{\text{Ag}^+/\text{Ag}} + 0,06 \log(K_s) + 0,06 \log(1/[\text{Cl}^-])$.

Le potentiel de la solution étant unique, il vient donc $E^\circ_{\text{AgCl/Ag}} = E^\circ_{\text{Ag}^+/\text{Ag}} + 0,06 \log(K_s)$. D'où $E^\circ_{\text{AgCl/Ag}} = 0,16 \text{ V}$.

Pour $[\text{Cl}^-] = 2,3 \text{ mol.L}^{-1}$, cela donne un potentiel d'équilibre : $E_{\text{eq}} = E^\circ_{\text{AgCl/Ag}} + 0,06 \log(1/[\text{Cl}^-]) = 0,14 \text{ V}$.

La valeur pour laquelle la courbe anodique décolle de l'axe horizontal est à peine plus grande : il doit y avoir une légère surtension.

d) On cherche 2 points, l'un sur la courbe anodique, l'autre sur la courbe cathodique, séparés horizontalement de 0,7 V, et tels que les deux courants soient égaux en valeur absolue. On voit que cela nous amène sur la partie quasi-verticale de la courbe (2) et sur le plateau de la courbe (1). On en déduit $I \approx 45 \mu\text{A}$.

e) La forme de la courbe (1) présente un palier de diffusion de O_2 à travers la membrane. Le courant d'électrolyse ne peut dépasser ce palier (en valeur absolue). Or la vitesse de la réaction est proportionnelle au courant. Donc quand on se trouve sur ce palier, c'est bien la diffusion du dioxygène à travers la membrane qui limite la cinétique de la réaction.

II.A.4-

a) Pour une diffusion unidimensionnelle selon Ox, la loi de Fick s'écrit :
$$j_{\text{O}_2} = -DN_A \frac{d[\text{O}_2]_{\text{membrane}}}{dx} e_x$$
 en notant N_A le nombre d'Avogadro.

$$I_n = \iint_S j_{\text{O}_2} \cdot d\vec{S} = -DSN_A \frac{d[\text{O}_2]_{\text{membrane}}}{dx}$$

Puis

b) En régime stationnaire $\frac{\partial j_{\text{O}_2}}{\partial x} = \frac{dj_{\text{O}_2}}{dx} = 0$ donc $[\text{O}_2]_{\text{membrane}}$ est une fonction affine de x. En utilisant les conditions aux

$$\text{limites en } x = 0 \text{ et en } x = \delta, \text{ on obtient } [\text{O}_2]_{\text{membrane}} = \frac{[\text{O}_2]_{\text{int}} - [\text{O}_2]_{\text{ext}}}{\delta} x + [\text{O}_2]_{\text{ext}}, \text{ d'où } I_n = DSN_A \frac{[\text{O}_2]_{\text{ext}} - [\text{O}_2]_{\text{int}}}{\delta}.$$

Le nombre d'électrons échangés sur le platine étant égal à 4 fois le nombre de molécule de O_2 qui diffusent dans la

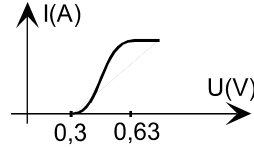
membrane, on peut écrire : $I = 4DSF \frac{[O_2]_{ext} - [O_2]_{int}}{\delta}$, avec F représentant le Faraday.

- c) En notant la valeur maximale de I, on accède à la concentration molaire à l'extérieur de la cellule car $[O_2]_{int} = 0$ donne :

$$[O_2]_{ext} = \frac{I_{max} \delta}{4DSF}$$

II.A.5-

- a) L'allure de la courbe I(U) est la suivante :



- b) Si la différence de potentiel est trop faible, on n'atteint pas le palier de diffusion et donc le courant électrique n'est pas la limite due à la diffusion. Il n'y a donc pas de loi mathématique simple reliant le courant électrique à la concentration en O_2 à l'extérieur.
- c) Si la différence de potentiel est nettement supérieure à 0,7 V, on risque d'observer sur la cathode également la réduction de l'eau en dihydrogène.

II.B / De la souris à l'éléphant ...

II.B.1- Notons V le volume (en L) de O_2 transporté par le sang à chaque battement de cœur. On a donc :

$Q_{O_2} = 60 f_c V$, puisque f_c est donné en battements par minute et Q_{O_2} en litres par heure. On nous dit dans l'énoncé qu'il existe approximativement une loi linéaire entre V et M_c . On écrira : $V = \beta M_c$. Or, $Q_{O_2} = 0,68 M_c^{3/4}$, d'où $0,68 M_c^{3/4} = 60 f_c \beta M_c$. Ainsi, f_c est en $M_c^{(-1/4)}$, donc de la forme $f_c = \gamma M_c^{(-1/4)}$. Et puisque $f_c = 70$ battements par minute pour $M_c = 70$ kg, on a $f_c = 70 \left(\frac{M_c}{70} \right)^{(-1/4)}$.

II.B.2- On trouve pour la souris une fréquence cardiaque de 579 au lieu de 620. Pour le lapin : 170 au lieu de 210. Et pour l'éléphant, 27 au lieu de 37. Le sens d'évolution est bien respecté, ainsi que les ordres de grandeur. Mais le modèle est un peu pessimiste.

II.B.3-

- a) En traçant $\log(\tau_{vie})$ en fonction de $\log(M_c)$, on obtient des points bien alignés, avec un coefficient directeur de 0,26. L'exposant de la loi d'échelle $\tau_{vie}(M_c)$ est donc $\alpha = 0,26$.

- b) L'exposant que l'on vient de trouver est de l'ordre de $1/4$. Or f_c est en $M_c^{(-1/4)}$ donc τ_{vie} est à peu près proportionnel à $(1/f_c)$. La durée de vie serait proportionnelle à la durée d'une respiration ... On peut dire aussi que plus le cœur bat vite et plus il s'use rapidement, ce qui rend la vie plus courte ...

$$\tau_{vie}(\text{homme}) = \tau_{vie}(\text{éléphant}) \left(\frac{M_c(\text{homme})}{M_c(\text{éléphant})} \right)^{0,26}$$

- c) En appliquant la loi précédente, on trouve que l'homme à une durée de vie de 31 ans. La médecine est donc très performante !

II.B.4- Un litre de dioxygène correspond à une énergie de 20 kJ. Or le débit de dioxygène en L par seconde est $Q_{O_2} / 3600$.

Ainsi, la puissance thermique dégagée est $P = 20 \cdot 10^3 \frac{Q_{O_2}}{3600} = \frac{100}{18} Q_{O_2} = \frac{68}{18} M_c^{3/4} = \frac{34}{9} M_c^{3/4}$, soit $P = 3,8 M_c^{3/4}$.

Pour un homme de 70 kg, cela donne $P = 91$ W.

Cela correspond à une énergie quotidienne de 7,9 MJ, ce qui est beaucoup car on considère que l'apport énergétique pour un homme de ce poids doit être de l'ordre de 10 MJ par jour. Et cet homme est censé pouvoir faire autre chose que réchauffer l'atmosphère !

II.B.5-

- a) Le problème étant stationnaire, à symétrie sphérique, et du fait qu'il n'y a pas de création de chaleur dans la fourrure, la puissance thermique P traversant toute sphère de rayon r compris entre R_a et $R_a + e$ doit être la même :

$P = 4\pi r^2 j_{cd}(r)$. En conséquence, la densité surfacique de flux thermique est en $1/r^2$.

La loi de Fourier donne : $j_{cd} = -\lambda \frac{dT}{dr}$, d'où $\frac{dT}{dr} = -\frac{P}{4\pi\lambda r^2}$ puis $T = \frac{P}{4\pi\lambda r} + K$. En utilisant les conditions aux limites

en R_a et $R_a + e$, cela donne : $T_i - T_e = \frac{P}{4\pi\lambda} \left(\frac{1}{R_a} - \frac{1}{R_a + e} \right)$ puis $P = 4\pi\lambda R_a \frac{(R_a + e)}{e} (T_i - T_e)$.

- b) La question n'est pas très bien formulée : il faudrait préciser ce qui doit rester constant. Il semble que ce soit λ , $(T_i - T_e)$ et la masse volumique μ .

La puissance thermique P varie comme $M_c^{3/4}$, avec $M_c = \mu \frac{4}{3} \pi R_a^3$. Donc P est en $R_a^{9/4}$.

Et le a) permet d'écrire $P = 4\pi\lambda R_a \frac{(1 + e/R_a)}{e/R_a} (T_i - T_e)$, ce qui veut dire que $\frac{(1 + e/R_a)}{e/R_a} = \eta R_a^{5/4}$, avec $\eta > 0$.

Cela peut encore s'écrire : $\frac{R_a}{e} = \eta R_a^{5/4} - 1$, ce qui montre bien que R_a/e est une fonction croissante de R_a et donc que e/R_a est une fonction décroissante de R_a .

- c) e/R_a étant fonction décroissante de R_a , ce dernier est minimum pour e/R_a maximum, c'est-à-dire égal à 1 (pour des raisons de mobilité comme le dit l'énoncé). Il vient $P = 8\pi\lambda R_a (T_i - T_e)$, d'où $8\pi\lambda R_a (T_i - T_e) = \frac{34}{9} \left(\frac{4}{3} \pi \mu \right)^{3/4} R_a^{9/4}$.

On en tire $R_a = \left(\frac{36}{17} \lambda (T_i - T_e) \right)^{4/5} \pi^{1/5} \left(\frac{3}{4\mu} \right)^{3/5}$ puis $M_c = \mu \frac{4}{3} \pi R_a^3$, d'où $M_c = 1,6$ g. On retrouve bien l'ordre de grandeur de 2 g.

II.B.6-

- a) Le débit sanguin total s'écrit : $Q_s = N\pi R^2 v$. On en déduit $Q_s(\lambda) = Q_s(1) * \lambda^{n+2b}$ puisque v est conservée. Il vient donc :

$$n + 2b = n + 4b - a, \text{ d'où } a = 2b.$$

La masse corporelle étant proportionnelle au volume total des vaisseaux sanguins, on a $M_c \propto NR^2L$, d'où $M_c(\lambda) = M_c(1) \lambda^{n+2b+a}$ puis $n + 2b + a = 3$, d'où $n = 3 - 2a$.

- b) D'une part, on a $Q_s(\lambda) = Q_s(1) * \lambda^{n+a} = Q_s(1) * \lambda^{3-a}$ et d'autre part, $M_c(\lambda) = M_c(1) \lambda^3$. En éliminant λ , il vient :

$$Q_s(\lambda) = Q_s(1) * \left(\frac{M_c(\lambda)}{M_c(1)} \right)^{\frac{3-a}{3}}. \text{ Ainsi, } Q_s \propto M_c^\gamma, \text{ avec } \gamma = \frac{3-a}{3}.$$

- c) Pour $a = 1$, $\gamma = \frac{2}{3}$. On est ici dans l'hypothèse que L (longueur des vaisseaux) est proportionnelle à la taille de l'animal. On en déduit que la surface de la peau S (et donc la puissance P) est en L^2 et que la masse M_c est en L^3 . On retrouve bien par ce raisonnement rapide que P est en $M_c^{2/3}$.
- d) Pour $\gamma = \frac{3}{4}$, $a = \frac{3}{4}$, $b = \frac{3}{8}$, $n = \frac{3}{2}$. Commentaire : on ne passe pas d'un animal à un autre du même groupe par simple homothétie.

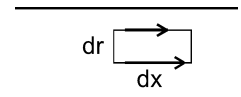
PARTIE III – Ecoulement stationnaire dans un tube cylindrique

III.A – Ecoulement de Poiseuille cylindrique

III.A.1- Le fluide étant incompressible, l'écoulement l'est aussi : $\text{div} \mathbf{v} = 0$, d'où $\frac{\partial v}{\partial x} = 0$. v était a priori une fonction de x et r ; ce n'est donc bien qu'une fonction de r .

III.A.2- L'accélération convective est $(\mathbf{v} \cdot \text{grad}) \mathbf{v}$. Ici, elle vaut : $\left(v \frac{\partial}{\partial x} \right) v \mathbf{e}_x = \left(v \frac{\partial v}{\partial x} \right) \mathbf{e}_x = 0$ puisque v ne dépend pas de x .

III.A.3- Un écoulement est rotationnel si des particules de fluide ont un mouvement de rotation sur elle-même dans leur référentiel barycentrique. Ici c'est le cas car pour une particule qui au départ est de forme cubique, 2 des faces n'ont pas la même vitesse (cf ci-contre).



En parlant autrement, un écoulement est rotationnel en un point s'il existe des petits contours fermés autour de ce point tels que la circulation du champ des vitesses soit non nulle (théorème de Stokes).

III.A.4-

- a) Si on appliquait l'équation de Navier-Stokes (en négligeant la pesanteur) et qu'on la projetait selon $\mathbf{e}_r$, on confirmerait l'hypothèse sous-jacente de l'énoncé, que le champ de pression ne dépend que de x . Dans ces conditions, les forces de pression se compensent deux à deux sur les cylindres de rayons r et $r+dr$. Il vient :

$$d^2 F_p = P(x) 2\pi r dr \mathbf{e}_x - P(x+dx) 2\pi r dr \mathbf{e}_x, \text{ d'où } d^2 F_p = -\frac{dP}{dx} 2\pi r dr dx \mathbf{e}_x = k 2\pi r dr dx \mathbf{e}_x$$

- b) Le fluide étant supposé newtonien, $d^2 F_{\text{visco}} = -\eta 2\pi r dx \frac{dv}{dr}(r) \mathbf{e}_x + \eta 2\pi(r+dr) dx \frac{dv}{dr}(r+dr) \mathbf{e}_x$, d'où :

$$d^2 F_{\text{visco}} = 2\pi \eta dx dr \frac{d\left(r \frac{dv}{dr}\right)}{dr}(r) \mathbf{e}_x$$

- c) L'accélération locale (écoulement stationnaire) et l'accélération convective étant nulles, le théorème de la résultante

$$2\pi dx dr \left[\eta \frac{d\left(r \frac{dv}{dr}\right)}{dr} + kr \right] = 0$$

dynamique appliqué à E donne : $d^2 F_p + d^2 F_{\text{visco}} = 0$, d'où :

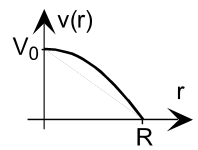
$$k = -\eta \frac{d\left(r \frac{dv}{dr}\right)}{dr}$$

On en déduit : k ne dépend que de x (cf a)). Puisque la pression ne dépend que de x (cf a)), k ne dépend que de x . Et le membre de droite ne dépend que de r , donc pas de x . Donc la quantité k est une vraie constante. Ainsi, le gradient de pression est bien uniforme, comme le suggère l'énoncé.

III.A.5- $\frac{d\left(r \frac{dv}{dr}\right)}{dr} = -\frac{kr}{\eta}$ donne $r \frac{dv}{dr} = -\frac{kr^2}{2\eta} + a_1$ puis $\frac{dv}{dr} = -\frac{kr}{2\eta} + \frac{a_1}{r}$ et $v = -\frac{kr^2}{4\eta} + a_1 \ln(r) + a_2$. La vitesse devant restée

finie sur l'axe ($r = 0$), $a_1 = 0$. La vitesse devant être nulle sur les parois ($r = R$), $a_2 = \frac{kR^2}{4\eta}$. Tout cela

permet bien de retrouver la loi donnée dans l'énoncé : $v = \frac{k}{4\eta}(R^2 - r^2)$.



La vitesse maximale V_0 est obtenue sur l'axe et vaut $V_0 = \frac{kR^2}{4\eta}$.

III.A.6- Le débit volumique est : $D_v = \iint_S \vec{v} \cdot d\vec{S} = \int_0^R v(r) 2\pi r dr$, d'où $D_v = \int_0^R \frac{k\pi}{2\eta}(R^2 r - r^3) dr = \frac{k\pi}{2\eta}(R^4/2 - R^4/4)$.

$$D_v = \frac{k\pi}{8\eta} R^4$$

Par définition, la vitesse moyenne sur la section du tuyau est $V_m = \frac{D_v}{\pi R^2}$, d'où $V_m = \frac{k}{8\eta} R^2$. $V_m = \frac{V_0}{2}$.

III.A.7- Soit D'_v le débit volumique à travers N tubes de rayons $R/\sqrt{N}$. On a donc $D'_v = N \frac{\pi k}{8\eta} \left(\frac{R}{\sqrt{N}}\right)^4 = \frac{1}{N} \frac{\pi k}{8\eta} R^4 = \frac{1}{N} D_v$.

Ainsi, à surface totale égale, et pour un écart de pression fixé, le débit est plus important dans un gros tuyau que dans un ensemble de petits.

III.A.8- On définit la résistance hydraulique par $R_{hyd} = \frac{\Delta P}{D_v}$. Puisque $\Delta P = kL$, il vient $R_{hyd} = \frac{8\eta L}{\pi R^4}$.

III.A.9-

Hydraulique	$\vec{j}$	I	U	σ
Electricité	$\vec{v}$	D_v	ΔP	$1/\eta$

Pour un tronçon de conducteur cylindrique circulaire de longueur L et de rayon R , parcouru par un courant de densité

uniforme, parallèle aux génératrices, on montre facilement que la résistance électrique $R_{el} = \frac{U}{I} = \frac{\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}}{\int_S \vec{j} \cdot d\vec{S}_{A \rightarrow B}}$ vaut

$$R_{el} = \frac{L}{\sigma \pi R^2}$$

Il apparaît que la résistance électrique varie en $1/R^2$ alors que la résistance hydraulique varie en $1/R^4$. Cela s'explique par le fait que dans le cas électrique, le champ des vitesses des charges est uniforme dans une section droite.

III.B – Application à la circulation sanguine

III.B.1- Les hypothèses peu réalistes sont les suivantes :

- Le champ des vitesses de la forme $\vec{v} = v(r)\vec{e}_x$. En effet, cela suppose l'écoulement laminaire, ce qui n'est pas certain. On reviendra sur ce point plus loin en évaluant le nombre de Reynolds.

- Régime stationnaire : cela serait incompatible avec la présence d'ondes de pression (cf IV).
- Les vaisseaux ont une certaine élasticité ; leur diamètre n'est pas constant.

$$\Re = \frac{\mu v 2R}{\eta}$$

III.B.2- Ici le nombre de Reynolds s'écrit : η . On pourra prendre pour v la vitesse moyenne V_m , le débit total étant à diviser à chaque fois par le nombre de vaisseaux en parallèle.

On obtient le tableau de valeurs suivant :	Vaisseau	Aorte	Grosse artère	Branche artérielle
	$\Re$	$1,4 \cdot 10^3$	$1,2 \cdot 10^2$	8,8

Il apparaît donc que l'écoulement a peu de chances d'être turbulent dans tous les vaisseaux. On peut le considérer comme laminaire. Les craintes du III.B.1 n'étaient pas justifiées.

III.B.3-

- a) Du fait de la viscosité et des pertes de charges, on a intérêt à faire la mesure le plus près possible du cœur, puisque l'on cherche à estimer les surpressions au niveau du cœur. Le mollet me semble nettement plus éloigné du cœur que le bras !
- b) Pour $p > p_{\max}$, l'artère est occluse. Plus rien ne passe. Donc on ne ressent plus les ondes de pression au creux du bras.

Pour $p_{\min} < p < p_{\max}$, l'écoulement est turbulent, ce qui génère des ondes sonores.

Pour $p < p_{\min}$, l'écoulement est laminaire. Le bruit est inexistant.

$$\Delta P_2 = \frac{8\eta L_2}{\pi R_2^4} \frac{D_v}{N_2} = 7,5 \text{ Pa} = 5,7 \cdot 10^{-3} \text{ cm Hg}$$

- c) Pour une grosse artère, , sensiblement inférieur à $p_{\max} - p_{\min}$.

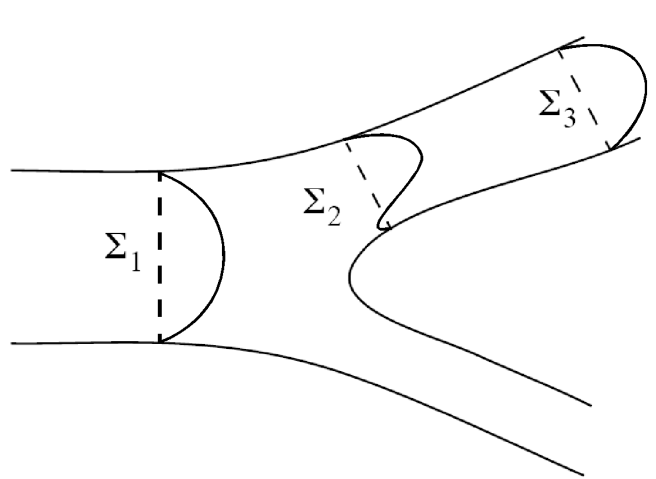
$$\Delta P_3 = \frac{8\eta L_3}{\pi R_3^4} \frac{D_v}{N_3} = 3,8 \cdot 10^3 \text{ Pa} = 2,9 \text{ cm Hg}$$

Pour une branche artérielle, , assez comparable à $p_{\max} - p_{\min}$.

Il ne faut donc pas se placer au niveau d'une branche artérielle si on veut mesurer une surpression proche de celle à la sortie du cœur.

La résistance hydraulique est nettement plus grande dans une branche artérielle.

III.B.4- Je ne sais pas bien répondre à cette question ... y a-t-il des contre-courants sur le bord droit, dû à la diffusion de quantité de mouvement ... ?



PARTIE IV – Onde de pression sanguine

IV.A – Etude de bilans

IV.A.1- Un solide parfait étant indéformable, ΔL tend vers 0, donc $E \rightarrow \infty$. Ce coefficient caractérise la résistance à la déformation.

IV.A.2-

a)
$$d^2 F_p = (P(x, t) - P_0) dx R d\theta \mathbf{e}_r$$

b) L'allongement relatif de l'élément de paroi P est $dL = (R - R_0) d\theta$

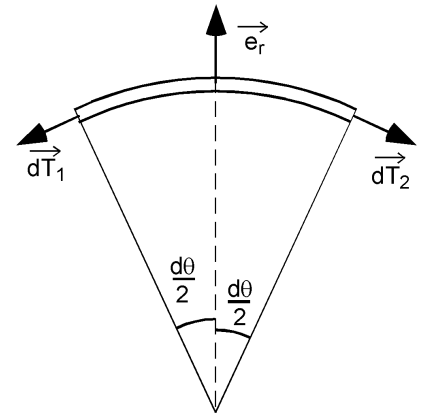
Les deux forces élémentaires dT_1 et dT_2 ont toutes deux (symétrie) pour

norme :
$$dT_1 = E H dx \frac{(R - R_0) d\theta}{R_0 d\theta} = E H dx \frac{(R - R_0)}{R_0}$$

vecteurs est portée par $\mathbf{e}_r$ et vaut :

$$d^2 F_y = -2dT_1 \sin(d\theta/2) \mathbf{e}_r \approx -dT_1 d\theta \mathbf{e}_r$$
, ce qui donne bien

$$d^2 F_y = -E H dx \frac{(R - R_0)}{R_0} d\theta \mathbf{e}_r$$



IV.A.3-

a) La section de l'artère est
$$\pi R^2 = \pi R_0^2 \left(1 + \frac{dR}{R_0}\right)^2 \approx \pi R_0^2 \left(1 + 2 \frac{dR}{R_0}\right)$$
. Ainsi, la variation locale de section est bien
$$\sigma = \pi R^2 - \pi R_0^2 \approx 2\pi R_0 dR = 2\pi R_0 (R - R_0)$$

b) Le théorème de la résultante cinétique appliqué à P, projeté sur la direction de $\mathbf{e}_r$, donne :

$$\rho_0 H dx R_0 d\theta \frac{d^2 R}{dt^2} = p dx R d\theta - E H \frac{R - R_0}{R_0} dx d\theta$$
, puis
$$\frac{d^2 R}{dt^2} = \frac{p R}{\rho_0 H R_0} - E \frac{R - R_0}{\rho_0 R_0^2}$$

D'après le a),
$$\frac{d\sigma}{dt} \approx 2\pi R_0 \frac{dR}{dt}$$
, puis
$$\frac{d^2 \sigma}{dt^2} \approx 2\pi R_0 \frac{d^2 R}{dt^2}$$

On remplace et on obtient bien la formule (1) de l'énoncé :
$$\frac{d^2 \sigma}{dt^2} \approx \frac{2\pi R p}{\rho_0 H} - 2\pi E \frac{R - R_0}{\rho_0 R_0} = \frac{2\pi R p}{\rho_0 H} - \frac{\sigma E}{\rho_0 R_0^2}$$

c) Effectuons un bilan de masse :

$$\rho_0 \pi R^2 (x, t + dt) dx = \rho_0 \pi R^2 (x, t) dx + \rho_0 v (x, t) \pi R^2 (x, t) dt - \rho_0 v (x + dx, t) \pi R^2 (x + dx, t) dt$$
, ce qui donne :

$$\frac{\partial (\pi R^2)}{\partial t} (x, t) = - \frac{\partial (\pi R^2 v)}{\partial x} (x, t)$$
, puis
$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} = -v \frac{\partial (\pi R^2)}{\partial x} - \pi R^2 \frac{\partial v}{\partial x} = -v \frac{\partial \sigma}{\partial x} - \pi R^2 \frac{\partial v}{\partial x}$$
. En remplaçant πR^2 par $\sigma + \pi R_0^2$, on tombe bien sur l'équation (2).

d) L'équation d'Euler s'écrit :
$$\frac{\partial v}{\partial t} + (v \cdot \text{grad}) v = - \frac{\text{grad} P}{\mu}$$

Puisque $v \approx v(x, t) \mathbf{e}_x$, l'équation devient
$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} = - \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x}$$

Ordres de grandeur de l'accélération convective et du terme de viscosité ?

IV.B- Approximation linéaire, relation de dispersion

IV.B.1- On linéarise les 3 équations :

$$\frac{d^2 \sigma}{dt^2} = \frac{2\pi R_0 p}{\rho_0 H} - \frac{\sigma E}{\rho_0 R_0^2} \quad \text{car} \quad R = R_0 + \frac{\sigma}{2\pi R_0}$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} + \pi R_0^2 \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

$$\mu \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x}$$

IV.B.2- En notation complexe :

$$-\omega^2 \underline{\sigma} = \frac{2\pi R_0}{\rho_0 H} \underline{p} - \frac{E}{\rho_0 R_0^2} \underline{\sigma} \quad i\omega \underline{\sigma} = ik\pi R_0^2 \underline{v} \quad \mu i\omega \underline{v} = ik\underline{p}$$

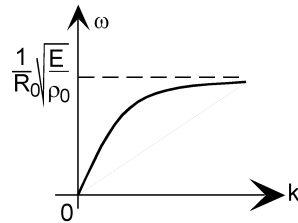
IV.B.3- On remplace : $-\omega^2 \underline{\sigma} = \frac{2\pi R_0}{\rho_0 H} \frac{\mu \omega}{k} \frac{\omega}{k\pi R_0^2} \underline{\sigma} - \frac{E}{\rho_0 R_0^2} \underline{\sigma}$, d'où $\frac{E}{\rho_0 R_0^2} = \frac{2\mu \omega^2}{\rho_0 H k^2 R_0} + \omega^2$.

$$\omega = \sqrt{\frac{E}{\rho_0 R_0^2 + \frac{2\mu R_0}{H k^2}}}$$

On en déduit :

$$\omega = \frac{\omega_{\max}}{\sqrt{2}} \quad \text{pour} \quad \rho_0 R_0^2 = \frac{2\mu R_0}{H k^2} \quad \text{donc pour} \quad k = k_c = \sqrt{\frac{2\mu}{R_0 \rho_0 H}}$$

$$\lambda_c = \frac{2\pi}{k_c} = 2\pi \sqrt{\frac{R_0 \rho_0 H}{2\mu}} \quad \text{App. Num : } \lambda_c = 8\text{mm}$$



La propagation est peu dispersive lorsque la vitesse de phase ω/k est indépendante de ω . Cela se produit lorsque la courbe représentative de la fonction $k(\omega)$ est approximativement une droite passant par l'origine, donc pour les basses fréquences et les faibles nombres d'onde, typiquement pour $k < k_c$, ou encore $\lambda > \lambda_c$.

IV.B.4- La vitesse de phase est $v_\phi = \omega/k$. D'après la question précédente, elle est constante pour les grandes longueurs d'ondes.

$$\omega \propto k \sqrt{\frac{EH}{2\mu R_0}} \quad \text{ce qui donne bien :} \quad v_\phi = c_0 = \sqrt{\frac{EH}{2\mu R_0}}$$

On peut alors écrire