

Тема: Первісна. Таблиця первісних. Основна властивість первісної.

Посилання на підручник:

<https://lib.imzo.gov.ua/wa-data/public/site/books2/pidruchnyky-11-klas-2019/13-matematyka-11-klas/merzlyak-ag-matematyka-algebra-i-poch-analizu-ta-geometriya-rivenstandartu-11-kl.pdf>

Матеріали до теми:

1. Сприймання і усвідомлення поняття первісної.

Операції в математиці

Кожна дія (операція) в математиці має обернену: додавання-віднімання; множення-ділення; піднесення до степеня – добування кореня; логарифмування – потенціювання; множення одночлена на многочлен - розкладання многочлена на множники способом винесення спільного множника за дужки.

Основна операція диференціального числення є знаходження похідної даної функції .

Обернена операція до диференціювання є: за відомою похідною деякої функції знайти (відновити) саму функцію , яку називають первісною F для відомої функції .

Операція знаходження первісної F для даної функції називається інтегруванням. Отже, інтегрування є оберненою операцією до операції диференціювання.

Первісна Означення. Первісною для даної функції $y=f(x)$ на заданому проміжку $[a; b]$ називається така функція $F(x)$, похідна якої для всіх x з інтервалу $[a; b]$ дорівнює $f(x)$, тобто $F'(x)=f(x)$ для всіх $x \in [a; b]$.

У фізиці трапляються задачі: відомо прискорення, треба знайти закон руху.

При вивченні теми «Похідна» ми розв'язували задачу про знаходження швидкості прямолінійного руху по заданому закону зміни координати $s(t)$ матеріальної точки. Миттєва швидкість $v(t)$ дорівнює похідній функції $s(t)$, тобто $v(t) = s'(t)$.

У практиці зустрічається обернена задача: по заданій швидкості $v(t)$ руху точки знайти пройдений нею шлях $s(t)$, тобто знайти таку функцію $s(t)$, похідна якої дорівнює $v(t)$. Функцію $s(t)$ таку, що $s'(t) = v(t)$, називають первісною

функції $v(t)$. Наприклад, якщо $v(t) = gt$, то $s(t) = \frac{gt^2}{2}$ є первісною функції $v(t)$,

оскільки

$$s'(t) = \left(\frac{gt^2}{2} \right)' = \frac{g \cdot 2t}{2} = gt = v(t)$$

Ще М. Ломоносов зазначив: «Фізик сліпий без математики», – тож на допомогу приходять знання математики: необхідність інтегрування функції.

2. Сприймання і усвідомлення основної властивості первісної, поняття невизначеного інтеграла.

Розглянемо функцію $f(x) = x^2$. Доведемо, що функції $F_1(x) = \frac{x^3}{3}$, $F_2(x) = \frac{x^3}{3} + 2$, $F_3(x) = \frac{x^3}{3} - 5$ є первісними функції $f(x)$.

$$\text{Дійсно, } F_1'(x) = \left(\frac{x^3}{3}\right)' = \frac{3x^2}{3} = x^2 = f(x) \quad , \quad F_2'(x) = \left(\frac{x^3}{3} + 2\right)' = x^2 + 0 = x^2 = f(x) \quad ,$$

$$F_3'(x) = \left(\frac{x^3}{3} - 5\right)' = x^2 - 0 = x^2 = f(x)$$

Взагалі будь-яка функція $F(x) = \frac{x^3}{3} + C$, де C — постійна, є первісною функції x^2 . Це випливає з того, що похідна постійної дорівнює нулю.

Цей приклад свідчить, що для заданої функції первісна визначається неоднозначно.

Теорема 1. Нехай функція $F(x)$ є первісною для $f(x)$ на деякому проміжку. Тоді для довільної постійної C функція $F(x) + C$ також є первісною для функції $f(x)$.

Доведення

Оскільки $F(x)$ — первісна функції $f(x)$, то $F'(x) = f(x)$.

Тоді $(F(x) + C)' = F'(x) + C' = f(x) + 0 = f(x)$, а ця рівність означає, що $F(x) + C$ є первісною для функції $f(x)$.

Теорема 2. Нехай функція $F(x)$ є первісною для $f(x)$ на деякому проміжку. Тоді будь-яка первісна для функції $f(x)$ на цьому проміжку може бути записана у вигляді $F(x) + C$, де C — деяка стала (число).

Доведення

Нехай $F(x)$ і $F_1(x)$ — дві первісні однієї і тієї самої функції $f(x)$, тобто $F'(x) = f(x)$, $F_1'(x) = f(x)$. Похідна різниці $g(x) = F(x) - F_1(x)$ дорівнює нулю, оскільки $g'(x) = F_1'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$. Якщо $g'(x) = 0$ на деякому проміжку, то дотична до графіка функції $y = g(x)$ у кожній точці цього проміжку паралельна осі OX . Тому графіком функції $y = g(x)$ є пряма, яка паралельна осі OX , тобто $g(x) = C$, де C — деяка стала. Із рівностей $g(x) = C$,

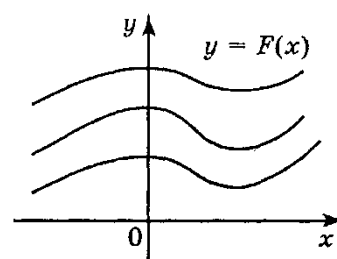


Рис. 87

$g(x) = F_1(x) - F(x)$ впливає, що $F_1(x) - F(x) = C$, або $F_1(x) = F(x) + C$.

Теорема 1 і 2 виражають основну властивість первісної.

Основній властивості первісної можна надати геометричного змісту: графіки будь-яких двох первісних для функції f одержуються один із одного паралельним перенесенням вздовж осі OY (рис. 87)

Нехай функція f має на деякому проміжку первісну. Сукупність усіх первісних для функції $f(x)$ на проміжку називають невизначеним інтегралом

цієї функції і позначають $\int f(x)dx$. Функцію $f(x)$ називають *підінтегральною функцією*.

З доведених теорем випливає, що $\int f(x)dx = F(x) + C$, де $F(x)$ — яка-небудь первісна для функції $f(x)$ на даному проміжку, C — довільна стала (її називають сталою інтегрування). Наприклад, функція $\sin x$ є первісною для функції $\cos x$ на проміжку $(-\infty; +\infty)$, тому можна записати, що

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

3. Сприймання і усвідомлення таблиці первісних (таблиці невизначених інтегралів). Користуючись таблицею похідних, можна скласти таблицю первісних (таблицю невизначених інтегралів) для функцій, похідні яких відомі

Функція $f(x)$	Загальний вигляд первісних $F(x) + C$	Невизначений інтеграл
0	C	$\int 0 dx = C$
1	$x + C$	$\int dx = x + C$
$x^n (n \neq -1)$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
$\frac{1}{x}$	$\ln x + C$	$\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$
$\sin x$	$-\cos x + C$	$\int \sin x dx = -\cos x + C$
$\cos x$	$\sin x + C$	$\int \cos x dx = \sin x + C$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{tg} x + C$	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$
$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\operatorname{ctg} x + C$	$\int \frac{x}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$
e^x	$e^x + C$	$\int e^x dx = e^x + C$
a^x	$\frac{a^x}{\ln a} + C$	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$

4. Розв'язування вправ на відпрацювання поняття «Первісна»

Алгоритм розв'язання задачі

1. З'ясуй, про яке поняття йде мова в задачі.
2. Знайди в опорному конспекті необхідну формулу.
3. Підстав замість змінних їх числові значення згідно до умови.
4. Проведи обчислення.
5. Запиши відповідь.

1. Чи є функція $F(x)$ первісною для функції $f(x)$, якщо:

1) $F(x) = x^3 - 3x^2 + 9x + C$, $f(x) = 3x^2 - 6x$, $x \in R$;

2) $F(x) = \sqrt{2x-3} + C$, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x-3}} + C$, $x > 1,5$;

3) $F(x) = \cos \frac{x}{5} + C$, $f(x) = -5 \sin \frac{x}{5}$, $x \in R$.

Завдання:

1. Опрацювати теоретичний матеріал §2, п. 9.
2. Законспектувати означення, теореми, правила.
3. Виконати письмово вправи: 9.2, 9.4, 9.7
4. Переглянути відеоматеріали за посиланням:

<https://svitppt.com.ua/algebra/pervisna.html>

ЗВЕРНІТЬ УВАГУ!!! Роботу виконувати у робочому або окремому зошиті (якщо робочий залишився у гуртожитку), фотографувати і надсилати на електронну адресу valentinatalavera@ukr.net , у темі листа вказувати – ПІБ, предмет, номер групи.

Можна підготувати мультимедійну презентацію з теми і надіслати на електронну адресу valentinatalavera@ukr.net .

