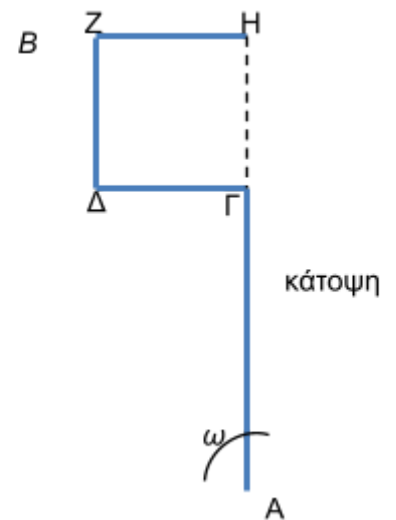


Ένας περίεργος συρμάτινος αγωγός στρέφεται

Με ένα εύκαμπτο σύρμα κατασκευάζουμε τον επίπεδο αγωγό ΑΓΔΖΗ του σχήματος. Τα μήκη των τμημάτων του είναι $ΑΓ = 2a$ και $ΓΔ = ΔΖ = ΖΗ = a$ και οι γωνίες $\hat{\Gamma} = \hat{\Delta} = \hat{Z} = 90^\circ$. Ο αγωγός περιστρέφεται σε οριζόντιο επίπεδο, με σταθερή γωνιακή ταχύτητα μέτρου ω , γύρω από κατακόρυφο άξονα που διέρχεται από το Α και είναι κάθετος στο επίπεδο του αγωγού. Στο χώρο υπάρχει κατακόρυφο ομογενές μαγνητικό πεδίο έντασης μέτρου B .



Η ΗΕΔ επαγωγής E_{AH} , που αναπτύσσεται στον αγωγό θα είναι:

α) $E_{AH} = -4,5 \cdot B\alpha^2\omega$

β) $E_{AH} = +4,5B\alpha^2\omega$

γ) $E_{AH} = -0,5 \cdot B\alpha^2\omega$

Απάντηση

Σε ένα στοιχειώδες χρονικό διάστημα dt , κατά τη διάρκεια του οποίου ο αγωγός στρέφεται κατά γωνία $d\theta$:

- Το τμήμα ΑΓ διαγράφει κυκλικό τομέα

$$dS_l = \frac{1}{2}(2a)^2 d\theta \Leftrightarrow dS_l = 2a^2 d\theta$$

εμβαδού

και η μεταβολή της μαγνητικής ροής από αυτή την

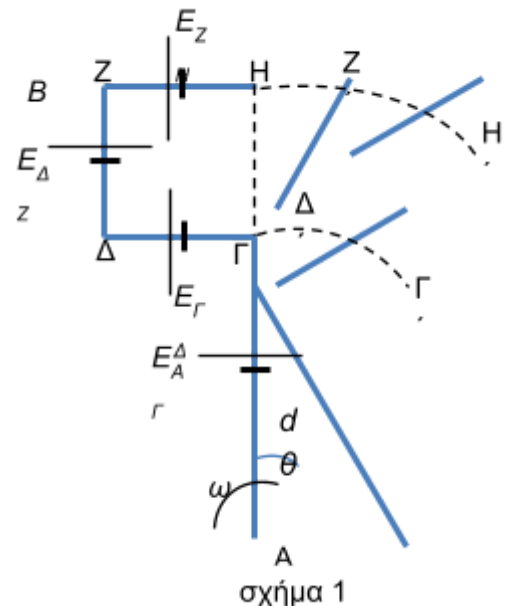
$$\text{επιφάνεια είναι } d\Phi_l = B \cdot dS_l \Leftrightarrow d\Phi_l = 2Ba^2 d\theta \quad (1)$$

Η ΗΕΔ επαγωγής που αναπτύσσεται στο τμήμα ΑΓ θα έχει αλγεβρική τιμή

$$E_{AG} = -\frac{d\Phi_l}{dt} \xrightarrow{(1)} E_{AG} = -\frac{2Ba^2 d\theta}{dt}$$

$$\Leftrightarrow E_{AG} = -2Ba^2\omega \quad (2)$$

- Το τμήμα ΔΖ κινείται ακριβώς όπως το ΓΗ, άρα αν βρούμε την υποθετική ΗΕΔ στο τμήμα ΓΗ θα είναι ακριβώς ίδια με την πραγματική ΗΕΔ στο τμήμα ΔΖ.



Το τμήμα ΔΖ διαγράφει επιφάνεια εμβαδού $dS_2 = \frac{1}{2}(3a)^2 d\theta - \frac{1}{2}(2a)^2 d\theta \Leftrightarrow dS_2 = \frac{5}{2}a^2 d\theta$

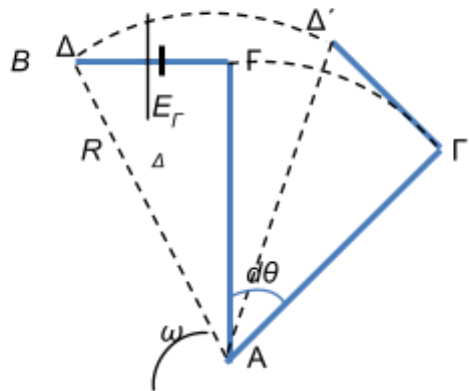
και η μεταβολή της μαγνητικής ροής από αυτή την επιφάνεια είναι

$$d\Phi_2 = B \cdot dS_2 \Leftrightarrow d\Phi_2 = \frac{5}{2}Ba^2 d\theta \quad (3)$$

Η ΗΕΔ επαγωγής που αναπτύσσεται στο τμήμα ΔΖ θα έχει αλγεβρική τιμή

$$E_{\Delta Z} = -\frac{d\Phi_2}{dt} \xrightarrow{(3)} E_{\Delta Z} = -\frac{\frac{5}{2}Ba^2 d\theta}{dt} \Leftrightarrow E_{\Delta Z} = -2,5Ba^2\omega \quad (4)$$

- Για το τμήμα ΓΔ ο υπολογισμός του εμβαδού γίνεται με βάση το σχήμα 2



σχήμα 2

$$dS_3 \neq (A\Delta\Delta\Gamma') - (A\Delta\Gamma\Gamma) \neq A\Delta\Delta + (A\Delta\Gamma) - A\Delta\Gamma - A\Gamma\Gamma$$

Όμως τα τρίγωνα AΔΓ και AΔΓ' είναι ίσα άρα

$$dS_3 \neq (A\Delta\Delta) - A\Gamma\Gamma = \frac{1}{2}(2a)^2 - \frac{1}{2}a^2(5a = \frac{1}{2}a\theta)^2 - a^2 = \frac{1}{2}\theta^2$$

και η μεταβολή της μαγνητικής ροής από αυτή την επιφάνεια είναι

$$d\Phi_3 = B \cdot dS_3 \Leftrightarrow d\Phi_3 = \frac{1}{2} B d\theta a^2 \quad (5)$$

Η ΗΕΔ επαγωγής που αναπτύσσεται στο τμήμα ΑΓ θα έχει αλγεβρική τιμή

$$E_{\Gamma\Delta} = -\frac{d\Phi_3}{dt} \xrightarrow{(5)} E_{\Gamma\Delta} = -\frac{\frac{1}{2} B a^2 d\theta}{dt} \Leftrightarrow E_{\Gamma\Delta} = -0,5 B a^2 \omega \quad (6)$$

Το τμήμα ΖΗ κινείται με πανομοιότυπο τρόπο με το ΓΔ, οπότε ομοίως

$$d\Phi_4 \notin (AZZ) - \Delta HH = \frac{1}{2} B d\theta a^2 - \frac{1}{2} B d\theta (10^2 = \frac{1}{2} B d\theta) \quad a^2 d\theta - a^2 d\theta = \frac{1}{2} B d\theta$$

και η μεταβολή της μαγνητικής ροής από αυτή την επιφάνεια είναι

$$d\Phi_4 = B \cdot dS_4 \Leftrightarrow d\Phi_4 = \frac{1}{2} B d\theta a^2 \quad (7)$$

Η ΗΕΔ επαγωγής που αναπτύσσεται στο τμήμα ΑΓ θα έχει αλγεβρική τιμή

$$E_{ZH} = -\frac{d\Phi_4}{dt} \xrightarrow{(5)} E_{ZH} = -\frac{\frac{1}{2} B a^2 d\theta}{dt} \Leftrightarrow E_{ZH} = -0,5 B a^2 \omega \quad (8)$$

Η πολικότητα βρίσκεται με τον κανόνα των τριών δακτύλων του δεξιού χεριού, που εφαρμόζουμε και στη δύναμη Laplace, με

τον αντίχειρα να δείχνει την κάθετη στον αγωγό συνιστώσα της ταχύτητάς του

το δείκτη το μαγνητικό πεδίο

το μέσο να δείχνει το (+) της ΗΕΔ.

Άρα (σχήμα 1)

$$E_{AH} = E_{AG} + E_{\Gamma\Delta} + E_{\Delta Z} + E_{ZH} \xrightarrow{(2),(4),(6),(8)} E_{AH} = -2,5 B a^2 \omega - 0,5 B a^2 \omega - 2 B a^2 \omega + 0,5 B a^2 \omega$$

$$\Leftrightarrow E_{AH} = -4,5 B a^2 \omega$$

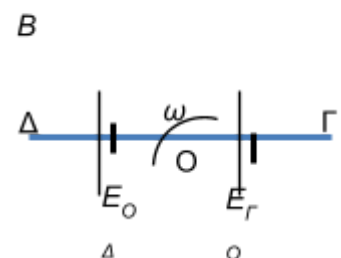
Σωστή απάντηση $\rightarrow \alpha$

Σχόλια

1) Την ΗΕΔ στο τμήμα ΓΔ θα μπορούσαμε να την υπολογίσουμε και με διαφορετικό τρόπο. Θεωρούμε την κίνηση του αγωγού σύνθετη

Στροφική περί άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας Ο και μεταφορική.

Εξαιτίας της στροφικής κίνησης (σχήμα 3), η ΗΕΔ είναι



$$E_{\Gamma\Delta} = E_{\Gamma O} + E_{O\Delta} = -\frac{l}{2}B\omega\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 + -\frac{l}{2}B\omega\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 = 0$$

Για τη μεταφορική κίνηση (σχήμα 4), η ταχύτητα v του μέσου O , κάθετη στην ακτίνα περιστροφής R , αναλύεται σε δυο συνιστώσες v_x και v_ψ . Από αυτές μόνο η v_ψ προκαλεί εμφάνιση ΗΕΔ.

$$v_\psi = v \eta \mu \theta$$

$$\eta \mu \theta = \frac{\alpha / 2}{R}$$

Αν πάρουμε έτοιμο τον τύπο της ΗΕΔ για κινούμενο αγωγό

$$E_{\Delta\Gamma} = B v_\psi \alpha = B \cdot v \cdot \eta \mu \theta \cdot \alpha = B \cdot \omega \cdot R \cdot \eta \mu \theta \cdot \alpha$$

$$= B \cdot \omega \cdot \frac{a}{2} \cdot \alpha = +0,5 B \omega \alpha^2$$

$$\text{ή } E_{\Gamma\Delta} = -0,5 B \omega \alpha^2$$

Ομοίως αποδεικνύουμε για το τμήμα ZH

$$E_{ZH} = +0,5 B \omega \alpha^2$$

2) Το αποτέλεσμα μας δείχνει ότι η ΗΕΔ που αναπτύσσεται είναι ίδια με αυτή σε ευθύγραμμο σύρμα που ενώνει τα άκρα A και H . Αυτό βέβαια είναι μια πρόταση, που χρειάζεται απόδειξη.

Θεωρούμε έναν υποθετικό ευθύγραμμο μεταλλικό αγωγό $A\Delta$, που συνδέει τα άκρα του σύρματος, οπότε δημιουργείται ένα κλειστό πλαίσιο $A\Gamma\Delta A$ (σχήμα 5). Καθώς το πλαίσιο στρέφεται η επιφάνειά του παραμένει σταθερή, δηλαδή $\Delta S = 0$, οπότε η μεταβολή της μαγνητικής ροής από αυτό είναι:

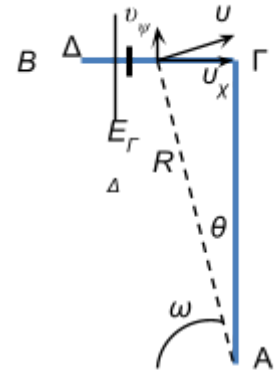
$$\Delta \Phi = B \cdot \Delta S = 0$$

Άρα

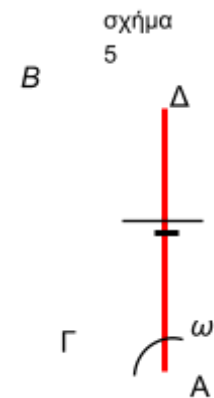
$$E_{\varepsilon\pi(A\Gamma\Delta A)} = -\frac{\Delta \Phi}{\Delta t} = 0 \Leftrightarrow E_{\varepsilon\pi(A\Gamma\Delta)} + E_{\varepsilon\pi(\Delta A)} = 0$$

$$\Leftrightarrow E_{\varepsilon\pi(A\Gamma\Delta)} = -E_{\varepsilon\pi(\Delta A)} \Leftrightarrow E_{\varepsilon\pi(A\Gamma\Delta)} = E_{\varepsilon\pi(A\Delta)}$$

$$E_{\varepsilon\pi(A\Gamma\Delta)} = -\frac{l}{2} B \omega l^2$$



σχήμα 4



σχήμα 5

με πολικότητα $\Lambda(-)$ και $\Delta(+)$.

Ανδρέας Ριζόπουλος