

*Муниципальное казенное общеобразовательное учреждение
средняя общеобразовательная школа №92*

Исследовательская работа по математике

Выполнили:

ученики 7«Б» класса

Таборский Илья,

Тарасова Юлия

Руководитель:

Гришкова Людмила Владимировна

(учитель математики высшей
квалификационной категории).

2018-2019

Г. Барабинск

Оглавление

Введение	3стр.
Основная часть	
§1 Определение простых чисел	5стр.
§2 Простые числа Мерсена	7стр.
§3 Простые числа Ферма	8стр.
§4 Открытие Панфутя Львовича Чебышева	11стр.
§5 Проблема Гольдбаха	12стр.
Заключение	14стр.
Библиографический список литературы.....	15стр.

**Изучайте математику!
Если будете знать математику
будете знать все.**

А.Н. Крылов

Введение.

Беседу о простых числах начнем рассказом о воображаемом путешествии из класса - в мировое пространство.

Это воображаемое путешествие придумал известный советский педагог - математик профессор Иван Кузьмич Андронов ([2], стр. 34) «...мысленно возьмем прямолинейный провод, выходящий из классной комнаты в мировое пространство, пробивающий земную атмосферу, уходящий туда, где луна совершает вращение, и далее - за огненный шар Солнца, а далее - в мировую бесконечность;

- Мысленно подвесим на провод, через каждый метр электрические лампочки, нумеруя их, начиная с ближайшей: 1, 2, 3, 4, ..., 100..., 1000..., 100000...;
- Мысленно включим ток с таким расчётом, что бы загорелись все лампочки с простыми номерами и только с простыми номерами;
- Мысленно полетим вблизи провода. Перед нами развернётся следующая картина:
 - ❖ Лампочка с номером 1 не горит. Почему? Потому, что 1 не является простым числом.
 - ❖ Две следующие лампочки с номерами 2 и 3 горят, т.к. 2 и 3 - обе лампочки? Нет, не могут. Почему? Всякое простое число кроме 2, есть число нечетное, а соседние с простым по ту и другую сторону будут числа четные. Всякое четное, отличное от 2, является составным числом, т.к. делится на 2.

Далее наблюдаем пару лампочек, горящих через одну, с номерами 3 и 5, 5 и 7, т.д. Замечаем, что в дальнейшем они встречаются реже, все пары простых чисел имеют вид $6n \pm 1$;

Например: $6 \cdot 3 - 1 = 17$ и $6 \cdot 3 + 1 = 19$
 $6 \cdot 5 - 1 = 29$ и $6 \cdot 5 + 1 = 31$;

$6 \cdot 20 - 1 = 119$ и $6 \cdot 20 + 1 = 121$ - эта пара не простые числа - это составные числа. Долетаем до пары 10016957 и 10016959 - это простые числа. Будут ли

и дальше такие пары простых чисел? Современная наука пока ответа не даёт; неизвестно существует ли конечное или бесконечное множество пар простых чисел.

- Но вот начинает действовать закон большого промежутка заполненного только составными числами: летим в темноте, смотрим назад - темнота, и впереди не видно света. Вспоминаем свойство, открытое Евклидом, и смело движемся вперед, т.к. впереди должны быть светящиеся лампочки и впереди их должно быть бесконечное множество.
- Залетев в такое место натурального ряда, где уже несколько лет нашего движения проходит в полной темноте, вспоминаем свойства, доказанные Чебышевым, и успокаиваемся, уверенные, что во всяком случае, надо лететь не больше того, что пролетели, чтобы увидеть хотя бы одну светящуюся лампочку».

Именно это «путешествие» подтолкнуло нас заняться учебно-исследовательской деятельностью в области натуральных чисел, а именно, в области простых чисел.

Тема нашей работы: «Простые числа. Так ли проста их история?»

Цель работы: Познакомиться и исследовать проблемы, связанные с историей развития теории простых чисел.

Перед собой мы поставили следующие задачи:

1. Изучить научную и методическую литературу по данному вопросу.

2. Рассмотреть историю изучения свойств простых чисел.

В ходе проделанной работы нами было изучено много дополнительной литературы, в которой представлена история происхождения теории простых чисел ([4]), интересные факты, связаны с изучением простых чисел известными математиками ([1], [3]).

Основная часть.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ.

Интерес к изучению простых чисел возник у людей в глубокой древности. И вызван он был не только практической необходимостью. Привлекала их необычная магическая сила. Числа, которыми можно выразить количество любых предметов.

Неожиданные и в то же время естественные свойства натуральных чисел, обнаруженные древними математиками, удивляли их своей замечательной красотой и вдохновляли на новые исследования. Должно быть, одним из первых свойств чисел, открытым человеком, было то, что некоторые из них могут быть разложены на два или более множителей, например:

$$6=2*3, \quad 9=3*3, \quad 30=2*15=3*10.$$

В то время как другие, например 3, 7, 13, 37, не могут быть разложены подобным образом.

Простым называется число, которое делится только само на себя и на единицу.

Единица, имеющая только один делитель, к простым числам не относится, не относится она и к составным числам. Единица, занимает особое положение в числовом ряду. Пифагорейцы учили, что единица - мать всех чисел, дух, из которого происходит весь видимый мир, она есть разум добро и гармония.

В Казанском университете профессор Никольский с помощью единицы умудрился доказать существование Бога. Он говорил: « Как не могут существовать числа без единицы, так и вселенная без единого Владыки существовать не может ».

Единица и в самом деле - число уникальное по свойствам: *она делится только сама на себя, но любое другое число на неё делится без остатка, любая её степень равна тому же самому числу - единице. После деления на неё ни одно число не изменяется, а если и поделить любое число на само себя, получится опять же единица!*

$$1:1=1$$

$$a : 1 = a$$

$$1^n = 1 * 1 * 1 \dots$$

$$a : a = 1$$

Не удивительно ли это? Поразмыслив над этим, Эйлер заявил: «Нужно исключить единицу из последовательности простых чисел, она не является ни простым, ни составным». Это было уже существенно важное упорядочивание в тёмном и сложном вопросе о простых числах.

У Эйлера учились все - и в Западной Европе, и в России. Диапазон его творчества широк: дифференциальное и интегральное исчисление, алгебра, механика, диоптрика, артиллерия, морская наука, теория движение планет и Луны, теория музыки - всего не перечислить. Во всей этой научной мозаики находится и теория чисел. Эйлер отдал ей немало сил и немалого добился. Он, как и многие его предшественники, искал магическую формулу, которая позволяла бы выделить простые числа из бесконечного множество чисел натурального ряда, т.е. из всех чисел, какие можно себе представить. Эйлер написал более ста сочинений по теории чисел....

Доказано, например, что число простых чисел неограниченно, т.е.: - нет самого большого простого числа;- нет последнего простого числа, после которого все числа были бы составными.

Первое доказательство этого положения принадлежит ученым древней Греции (V - III вв. до н.э.), второе доказательство - Эйлеру (1707-1783).

ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА АРИФМЕТИКИ.

Всякое натуральное число, отличное от 1, либо является простым, либо может быть представлено в виде произведения простых чисел, причём однозначно, если не обращать внимание на порядок следования.

Доказательство: Возьмем натуральное число $n=1$. Если n - простое, то это тот случай, о котором сказано в заключение теоремы. Теперь предположим, n - составное. Тогда оно представлено в виде произведения $n= a \cdot b$, где натуральные числа a и b меньше n . Опять либо a и b -простые, тогда все доказано, либо хотя бы одно из них составное, т.е. составлено из меньших множителей и так далее; в конце концов мы получим разложение на простые множители.

ПРОСТЫЕ ЧИСЛА МЕРСЕНА

В течение нескольких столетий шла погоня за простыми числами. Многие математики боролись за честь стать открывателем самого большого из известных простых чисел.

Простые числа Мерсена являются простыми числами специального вида.

$$M_p = 2^p - 1,$$

где p - другое простое число.

Эти числа вошли в математику давно, они появляются ещё в евклидовых размышлениях о простых числах. Своё название они получили в честь французского монаха Меренна Мерсена (1589-1648), который долго занимался проблемой простых чисел.

Если вычислять числа по этой формуле, получим:

$$M_2 = 2^2 - 1 = 3 \text{ - простое;}$$

$$M_3 = 2^3 - 1 = 7 \text{ - простое;}$$

.....

$$M_7 = 2^7 - 1 = 127 \text{ - простое;}$$

.....

$$M_{11} = 2^{11} - 1 = 2047$$

Общий способ нахождения простых больших чисел Мерсена состоит в проверке всех чисел M_p для различных простых чисел p . Эти числа очень быстро увеличиваются и столь же быстро увеличиваются затраты труда на их нахождение.

В исследовании чисел Мерсена можно выделить раннюю стадию, достигшую своей кульминации в 1750г., когда Эйлер установил, что число

M_{31} является простым. К тому времени было найдено восемь простых чисел Мерсена: $p=2, p=3, p=5, p=7, p=13, p=17, p=19, p=31$.

Эйлерово число M_{31} оставалось самым большим из известных простых чисел более ста лет.

В 1876г французский математик Лукас установил, что огромное число M_{127} - с 39 цифрами - простое. 12 простых чисел Мерсена были вычислены с

помощью только карандаша и бумаги, а для вычисления следующих уже использовались механические настольные счётные машины.

Появление вычислительных машин с электрическим приводом позволило продолжить поиски, доведя их до $P=257$.

Однако результаты были неутешительными, среди них не оказалось новых простых чисел Мерсена. Затем задача была переложена на ЭВМ.

Самое большое известное в настоящее время простое число имеет 3376 цифр. Это число было найдено на ЭВМ в Иллинойском университете (США). Математический факультет этого университета был так горд своим достижением, что изобразил это число на своём почтовом штемпеле, таким образом, воспроизводя его на каждом отсылаемом письме для всеобщего обозрения.

ПРОСТЫЕ ЧИСЛА ФЕРМА

Существует ещё один тип простых чисел с большой интересной историей. Они были впервые введены французским юристом Пьером Ферма (1601-1665), который прославился своими выдающимися математическими работами. Первыми простыми числами Ферма были числа, которые удовлетворяли формуле $F_n = 2^m + 1$, где $m=2^n$

$$F_0 = 2^m + 1 = 3, \text{ где } m=2^0$$

$$F_1 = 2^m + 1 = 5, \text{ где } m=2^1$$

$$F_2 = 2^m + 1 = 17, \text{ где } m=2^2$$

$$F_3 = 2^m + 1 = 257, \text{ где } m=2^3$$

.....
.....

Однако это предположение было сдано в архив не оправдавшихся математических гипотез, но после того, как Леонард Эйлер сделал ещё один шаг и показал, что следующее число Ферма $P_5=6416700417$ является составным.

Возможно, что история чисел Ферма была бы закончена, если бы числа Ферма не появились в совсем другой задаче - на построение правильных многоугольников при помощи циркуля и линейки.

Однако ни одного простого числа Ферма не было найдено, и сейчас многие математики склонны считать, что их больше нет.

РЕШЕТО ЭРАТОСФЕНА.

Существуют таблицы простых чисел, простирающихся до очень больших чисел. Как подступиться к составлению такой таблицы? Эта задача

была, в известном смысле решена (около 200г до н.э.). Эратосфеном, математиком из Александрии. Его схема состоит в следующем. Напишем последовательность всех целых чисел от 1 до числа, которым мы хотим закончить таблицу.

Вы, наверное, обратили внимание, что простые числа в ряду натуральных чисел встречаются неравномерно - в одних частях ряда их больше, в других - меньше. Но чем дальше мы продвигаемся по числовому ряду, тем реже встречаются простые числа. Возникает вопрос: существует ли последнее (самое большое) простое число? Древнегреческий математик Евклид в своей книге «начало», бывшей на протяжении двух тысяч лет основным учебником математики, доказал, что простых чисел бесконечное множество, т.е. за каждым простым числом есть еще большее простое число.

Для отыскания простых чисел другой греческий математик того же времени Эратосфен придумал такой способ. Он записывал все числа от 1 до какого-то числа, а потом вычеркивал единицу, которая не является ни простым, ни составным числом, затем вычеркивал через одну все числа, идущего после двойки (числа, кратные 2, т.е. 4,6,8 т.д.). Первым оставшимся числом после 2 было 3 . Далее вычеркивались через два, все числа, идущие после 3 (числа, кратные 3, т.е. 6, 9, 12 , т.д.). В конце концов, остались не вычеркнутыми только простые числа:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60

Так как греки делали записи на покрытых воском табличках или на натянутом папирусе, а числа они вычеркивали, а выкалывали иглой, то таблица в конце вычислений напоминала решето. Поэтому метод Эратосфена называют решето Эратосфена: в этом решете «отсеиваются» простые числа от составных.

Решето Эратосфена - это примитивное и в тоже время гениальное изобретение. **ВСЁ ГЕНИАЛЬНОЕ ПРОСТО!**

Эратосфеново решето неплохо поработало на исследователей далеко не простых чисел. Началось своеобразное соревнование на изыскание

наибольшего простого числа с древнейших времён до Чебышева и даже до наших дней.

ОТКРЫТИЕ ПАНФУТИЯ ЛЬВОВИЧА ЧЕБЫШЕВА.

Итак, число простых чисел бесконечно. Мы уже видели, что простые числа, размещаются без какого - либо порядка. Проследим более подробно.

2 и 3 - простые числа. Это единственная пара простых чисел, стоящих рядом.

Затем идут 3 и 5, 5 и 7, 11 и 13, 17 и 19 и т.д. Это так называемые смежные простые числа или близнецы. Близнецов много: 29 и 31, 41 и 43, 59 и 61, 71 и 73, 101 и 103, 827 и 829 и т. д. Самая большая известная пара близнецов такая: 10 016 957 и 10 016 959.

Чем дальше от начала численного ряда, тем простых чисел становится меньше. Можно найти как угодно большой конечный промежуток в числовом ряду, в котором не будет ни одного простого числа.

Как же распределены простые числа в натуральном ряду, в котором не будет ни одного простого числа? Есть ли какой-нибудь закон в их распределении или нет?

Если есть, то какой? Но ответ на эти вопросы не находился более 2000 лет.

Первый и очень большой шаг в разрешении этих вопросов сделал великий русский учёный Панфутий Львович Чебышев. В 1850г. он доказал, что между любым натуральным числом (не равным 1) и числом, в два раза большего его (т. е. между n и $2n$), находится хотя бы одно простое число.

Проверим это на несложных примерах.

Примем для n несколько произвольных значений n и найдём соответственно значение $2n$:

$$n=5, 2n=10$$

$$n=12, 2n=24$$

$$n=37, 2n=74$$

$$n=61, 2n=112$$

Мы видим, что для рассмотренных примеров теорема Чебышева верна. Чебышев доказал её для любого случая, для любого n . Открытый Чебышевым закон распределения простых чисел был поистине фундаментальным законом в теории чисел после закона, открытого Евклидом, о бесконечности количества простых чисел. Едва ли не самый добрый, самый восторженный отклик на открытие Чебышева пришёл из Англии от известного математика Сильвестр: «...Дальнейших успехов теории простых чисел можно ожидать тогда, когда родится некто, настолько превосходящий Чебышева своей проницательностью и вдумчивостью, насколько Чебышев превосходит этими качествами обыкновенных людей».

Более чем полвека спустя немецкий математик Э.Ландау, крупный специалист в теории чисел, добавил к этому высказыванию следующее: «Первым после Евклида Чебышев пошёл правильным путём при решении проблемы простых чисел и достиг важных результатов».

ПРОБЛЕМА ГОЛЬДБАХА.

Выпишем все простые числа от 1 до 50:

2,3,5,7,9,11,17,19,23,29,31,37,41,43,47,

А теперь попытаемся любое число от 4 до 50 представить в виде суммы двух или трёх простых чисел. Возьмём несколько чисел наугад:

$$50=47+3$$

$$46=43+3$$

$$32=29+3$$

$$22=19+3$$

$$18=13+5$$

Как видим, поставленную задачу мы выполнили без труда. А всегда это возможно? Любое ли число можно представить в виде суммы нескольких простых чисел? И если можно, то скольких: двух? трёх? десяти?

В 1742г. член петербургской академии наук Гольдбах в письме к Эйлеру высказал предположение, что любое целое положительное число, больше пяти, представляет собой сумму не более чем трёх простых чисел. Гольдбах испытал очень много чисел и ни разу не встретил такого числа, которое нельзя было бы разложить на сумму двух или трёх простых слагаемых. Но будет ли так всегда, он не доказал. Долго учёные занимались этой задачей, которая названа "Проблемой Гольдбаха" и сформулирована следующим образом. Требуется доказать или опровергнуть предложение «всякое число, больше единицы, является суммой не более трёх простых чисел»

Почти 200 лет выдающиеся учёные пытались разрешить проблему Гольдбаха-Эйлера, но безуспешно. Многие пришли к выводу о невозможности её решить.

Но решение её, и почти и полностью, было найдено в 1937г. советским математиком И.М. Виноградовым.

Иван Михайлович Виноградов является одним из крупнейших современных математиков. Им написано более 120 различных научных работ. В них он разрешил много задач, над которыми учёные всего мира трудились десятки и сотни лет, в том числе и в области простых чисел.

За заслуги в области математики И.М. Виноградов всеми учеными мира признан одним из первых математиков современности.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Говорят, нужны особые способности, чтобы быть хорошим математиком или физиком. Поэтому поводу мне хочется заметить, что талант, способности в какой - либо области деятельности - это, прежде всего способность много, упорно работать и иметь глубокий интерес к делу. Тогда и придёт успех! Ведь редко бывает, что человек не Достигает успеха в науке, если он действительно ею интересуется.

Академик. И. Г.

Петровский

Подводя итог выше сказанному, нам бы хотелось отметить, что данная работа расширила наш кругозор, углубила наши знания в области истории простых чисел. Исследования, проводимые выдающимися учёными математиками, начиная с древних времён до наших дней, оказались интересными и познавательными. Вывод, к которому мы пришли: простые числа - это как бы кирпичики, из которых строятся остальные натуральные числа. Таким образом, простые числа, казавшиеся когда-то бесполезным, бессмысленным понятием, не только приобрели характер, но и оказались мощным средством, ускоряющим развитие науки.

Библиографический список литературы

1. Энциклопедия для детей Т.-2. Главный редактор М.Д.Аксёнова, М.: Аванша плюс, 2000г. «Великий мастер индукции Леонард Эйлер»
2. За страницами учебника математики. «Великий мастер индукции Леонард Эйлер»
3. Прдников Н.И. «П.Л. Чебышев» М.: Просвещения, 1980г.
- 4.Сербский И.А. «Что мы знаем и не знаем о простых числах»