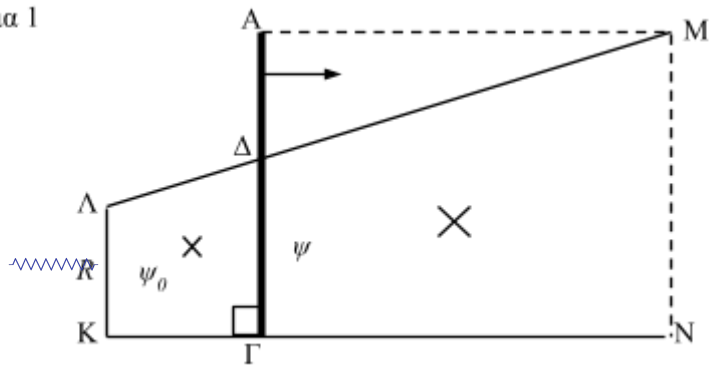
## Όταν το μήκος του αγωγού μεταβάλλεται

σχήμα 1




Σε οριζόντιο επίπεδο βρίσκεται ένα πλαίσιο σχήματος τραπεζίου ΚΛΜΝ, ανοιχτό στην πλευρά ΜΝ, όπως φαίνεται στην κάτοψη του σχήματος 1, όπου τα Μ, Ν είναι συνευθειακά, με *(ΜΝ) = 3m*. Δεν είναι όλες οι πλευρές από το ίδιο υλικό, με αποτέλεσμα υπολογίσιμη αντίσταση έχει μόνο η πλευρά ΚΛ, *R = 0,5Ω*. Οι γωνίες του είναι $\hat{K} = 90^0$, $\hat{\Lambda} = 135^0$, ενώ *(ΚΛ) = $\psi_0$ = 1m*. Σε όλο το χώρο υπάρχει κατακόρυφο ομογενές μαγνητικό πεδίο, έντασης μέτρου *B =1T* με φορά προς το έδαφος. Ευθύγραμμος αγωγός ΑΓ, μήκους *L =3m*, είναι συνεχώς σε επαφή με το πλαίσιο, με το άκρο του Γ να ολισθαίνει πάνω στην πλευρά ΚΝ, έτσι ώστε ό αγωγός να είναι συνεχώς κάθετος σε αυτή. Ασκώντας κατάλληλη μεταβλητή δύναμη , ο αγωγός μεταφέρεται προς τα δεξιά, με σταθερή ταχύτητα μέτρου *υ = 0,5m/s*, κάθετη στις δυναμικές γραμμές του μαγνητικού πεδίου. Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$, το ευθύγραμμο τμήμα ΑΓ συμπίπτει με την πλευρά ΚΛ του πλαισίου. Τριβές αμελητέες.

**α)** Βρείτε τη χρονική σχέση του μήκους *( ΓΔ) = ψ* του αγωγού (σχήμα 1), που έχει συνεχώς τα άκρα του πάνω στο πλαίσιο, από τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$, μέχρι τη χρονική στιγμή $t_1$ που ο αγωγός εγκαταλείπει το πλαίσιο.

**β)** Θεωρούμε το εμβαδικό διάνυσμα $\vec{\eta}$, που προσανατολίζει την επιφάνεια του κυκλώματος, που σαρώνει ο αγωγός κατά την κίνησή του, να έχει φορά προς το έδαφος.
Η αλγεβρική τιμή της ΗΕΔ επαγωγής που δημιουργείται στο κύκλωμα από την κίνηση του αγωγού είναι θετική ή αρνητική; Δικαιολογείστε.

**γ)** Να βρείτε τη χρονική εξίσωση της έντασης του επαγωγικού ρεύματος που διαρρέει το κύκλωμα.

**δ)** Να κάνετε τη γραφική παράσταση $I_{επ} \rightarrow t$ της έντασης του επαγωγικού ρεύματος σε βαθμολογημένους άξονες και να υπολογίσετε το ηλεκτρικό φορτίο, που θα περάσει από μια διατομή του κυκλώματος μέχρι τη χρονική στιγμή $t_1$.

**ε)** Σχεδιάστε τη φορά του επαγωγικού ρεύματος στο κύκλωμα. Είναι σύμφωνη και με τον κανόνα Lenz;

**στ)** Ποια οριζόντια δύναμη κάθετη στον αγωγό πρέπει να ασκούμε για να επιτυγχάνεται η σταθερή ταχύτητα;

**ζ)** Ποιες ενεργειακές μετατροπές συμβαίνουν τη χρονική στιγμή $t_2 = 2s$;

**Απάντηση**

**α)** Έστω κάποια τυχαία χρονική στιγμή *t*, που ο αγωγός έχει μετατοπιστεί κατά *(ΚΓ)* = $x=\upsilon\cdot t$, όπως βλέπουμε στο σχήμα 2.

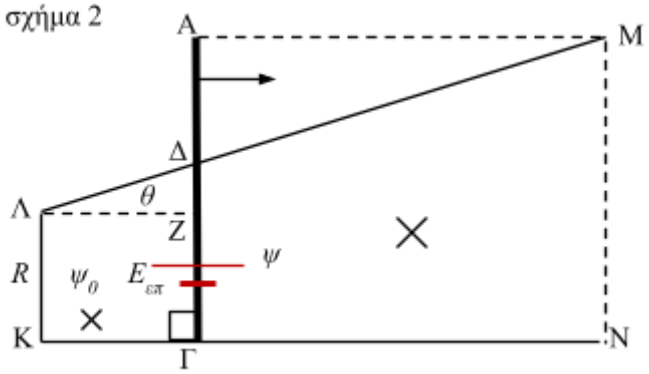
Φέρνουμε $\Lambda Z \perp A\Gamma$ . Από το τρίγωνο ΛΔΖ, έχουμε

$(\Delta Z)=(\Lambda Z)\cdot\varepsilon\varphi\theta \Leftrightarrow$

$(\Delta Z)=x\cdot\varepsilon\varphi\theta \Leftrightarrow$

$(\Delta Z)=\upsilon\cdot\varepsilon\varphi\theta\cdot t$ (1)

σχήμα 2




Το ζητούμενο μήκος του αγωγού είναι

$\psi=\psi_0+(\Delta Z) \xrightarrow{(1)}$

$\psi=\psi_0+\upsilon\cdot\varepsilon\varphi\theta\cdot t \Leftrightarrow$

$\psi=1+0,5\cdot\varepsilon\varphi 45\cdot t \Leftrightarrow$

$\psi=1+0,5\cdot t$ (S.I.) (2)

Προφανώς ο αγωγός εγκαταλείπει το πλαίσιο όταν το ευθύγραμμο τμήμα ΑΓ συμπέσει με την ΜΝ, δηλαδή $\psi = L = 3m$

Από τη σχέση (2) προκύπτει

$3=1+0,5\cdot t_1 \Leftrightarrow 0,5\cdot t_1=2 \Leftrightarrow t_1=4s$

**β)** Με βάση το εμβαδικό διάνυσμα η μαγνητική ροή που διέρχεται από την επιφάνεια του κυκλώματος είναι θετική. Καθώς ο αγωγός κινείται μέσα στο μαγνητικό πεδίο, το εμβαδόν του κυκλώματος αυξάνεται, άρα αυξάνεται αλγεβρικά και η μαγνητική ροή, που διέρχεται από αυτό, δηλαδή $d\Phi>0$ .

Από το νόμο Faraday έχουμε:

$d\Phi>0 \Leftrightarrow -E_{\varepsilon\pi}\cdot dt>0 \Leftrightarrow E_{\varepsilon\pi}<0$ , αρνητική αλγεβρική τιμή.

Η πολικότητα φαίνεται στο σχήμα 2.

**γ)** Θα υπολογίσουμε την «ωφέλιμη» ΗΕΔ, που αναπτύσσεται ανάμεσα στα σημεία Γ και Δ, επαφής του ευθύγραμμου αγωγού, με το πλαίσιο.

Είναι $\vec{\upsilon}\perp A\Gamma$, $\vec{\upsilon}\perp\vec{B}$, $\vec{B}\perp A\Gamma$ άρα με βάση και το προηγούμενο ερώτημα

$E_{\varepsilon\pi}=-B\cdot\upsilon\cdot\psi \xrightarrow{(2)}$

$E_{\varepsilon\pi}=-1\cdot 0,5\cdot(1+0,5\cdot t) \Leftrightarrow$

$E_{\varepsilon\pi}=-0,5-0,25\cdot t,\ 0s\le t\le 4s$ (S.I.) (3)

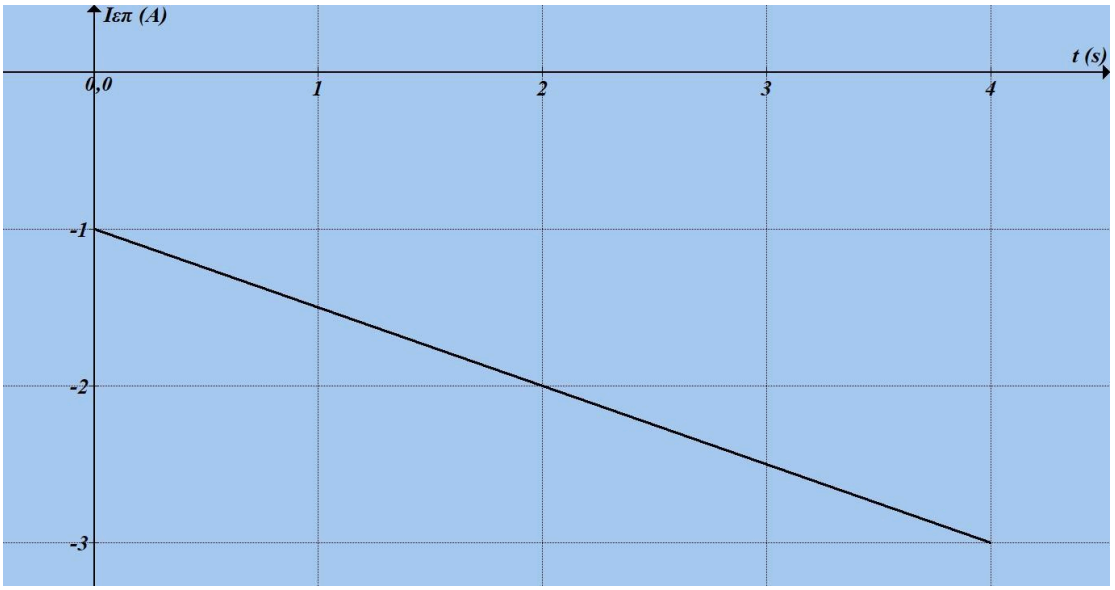
Η ένταση του ρεύματος που διαρρέει το κύκλωμα είναι

$I_{\varepsilon\pi}=\dfrac{|E_{\varepsilon\pi}|}{R} \xrightarrow{(3)}$

$I_{\varepsilon\pi}=\dfrac{-0,5-0,25\cdot t}{0,5} \Leftrightarrow$

$I_{\varepsilon\pi}=-1-0,5t$ (S.I) (4)

**δ)** Η γραφική παράσταση της σχέσης (4) φαίνεται στο σχήμα 3:




*dq*

Ένα στοιχειώδες εμβαδόν πάνω από τη γραφική παράσταση $I_{\varepsilon\pi} \rightarrow t$ είναι $I_{\varepsilon\pi} \cdot dt = dq$, δηλαδή δίνει μια στοιχειώδη ποσότητα ηλεκτρικού φορτίου, που πέρασε από μια διατομή του κυκλώματος. Το ολικό φορτίο θα είναι

$$\Delta q = Εμβ_Τραπ = \frac{-1-3}{2} \cdot 4 = -8C$$

**<u>Β΄τρόπος</u>**

Αν $\overline{I}_{\varepsilon\pi}$ είναι η μέση ένταση του επαγωγικού ρεύματος,

$$\Delta q = \overline{I}_{\varepsilon\pi} \cdot \Delta t \Leftrightarrow \Delta q = \frac{\overline{E}_{\varepsilon\pi}}{R} \cdot \Delta t \Leftrightarrow \Delta q = -\frac{\Delta\Phi}{R \cdot \Delta t} \cdot \Delta t \Leftrightarrow \Delta q = -\frac{\Delta\Phi}{R} \quad (5)$$

Η μεταβολή της μαγνητικής ροής που διέρχεται από το κύκλωμα, οφείλεται στη μεταβολή $\Delta S$ της επιφάνειας του κυκλώματος, εξαιτίας της κίνησης του αγωγού ΑΓ και είναι

$$\Delta\Phi = B \cdot \Delta S \Leftrightarrow \Delta\Phi = B \cdot \frac{\psi + \psi_0}{2} \cdot x$$

Τη χρονική στιγμή $t_1 = 4s$,

$\psi = 1 + 0,5 \cdot 4 = 3m,$

$x = 0,5 \cdot 2 = 2m$

άρα $\Delta\Phi = 1 \cdot \frac{3+1}{2} \cdot 2 = 4Wb$

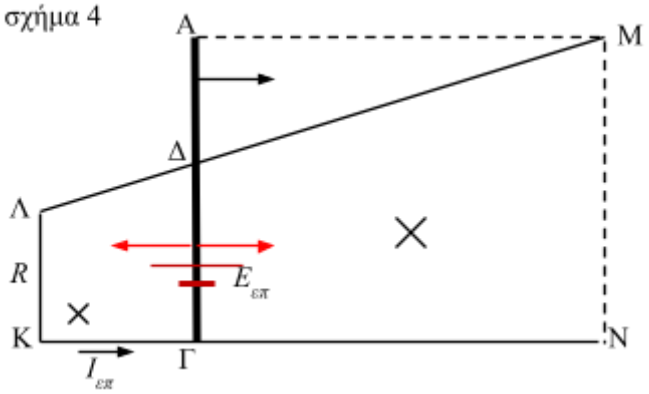
Τότε η σχέση (5) δίνει $\Delta q = -\frac{4}{0,5} = -8C$

**Παρατήρηση:**

Η σχέση (5), αναφέρεται στη βιβλιογραφία, ως **Νόμος Newman**. Υπάρχει αποδεδειγμένη στο βιβλίο στο παράδειγμα 5.1 και μπορεί να χρησιμοποιηθεί χωρίς απόδειξη.

**ε)** Στο σχήμα 4, φαίνεται η πολικότητα της ΗΕΔ επαγωγής και η φορά του επαγωγικού ρεύματος. Με βάση το εμβαδικό διάνυσμα, η θετική φορά διαγραφής του βρόχου του κυκλώματος είναι η ωρολογιακή. Βλέπουμε το ρεύμα να έχει αντιωρολογιακή φορά και έχουμε έτσι μια εξήγηση για το αρνητικό του πρόσημο, αφού το μαγνητικό του πεδίο $\vec{B}_{επ}$ πρέπει να αντιστέκεται στην αύξηση της μαγνητικής ροής. Επί πλέον ο αγωγός ως ρευματοφόρος, κινούμενος σε μαγνητικό πεδίο, δέχεται δύναμη Laplace με φορά, που προκύπτει από τον κανόνα των τριών δαχτύλων. Βλέπουμε ότι η δύναμη Laplace αντιστέκεται στην κίνηση, κάτι που είναι σύμφωνο και με τον κανόνα Lenz.

σχήμα 4




**στ)** Η δύναμη Laplace, έχει μέτρο

$$F_L = B\cdot|I_{επ}|\cdot\psi \xrightarrow{(2),(4)}$$
$$F_L = 1\cdot(1+0,5t)\cdot(1+0,5t) \Leftrightarrow$$
$$F_L = (1+0,5t)^2$$

Πρέπει $\Sigma\vec{F} = 0 \Leftrightarrow F - F_L = 0 \Leftrightarrow F = (1+0,5t)^2$ (S.I.), δηλαδή είναι 2ου βαθμού ως προς *t*.

**ζ)** Τη χρονική στιγμή $t_2 = 2s$

Η ΗΕΔ επαγωγής είναι $E_{επ} = -0,5 - 0,25\cdot 2 = -1V$

Η ένταση του ρεύματος είναι $I_{επ} = -1 - 0,5\cdot 2 = -2A$

Η δύναμη που ασκούμε είναι $F = (1+0,5\cdot 2)^2 = 4N$

Ο ρυθμός προσφοράς ενέργειας από τη δύναμη $\vec{F}$ είναι $P_F = F\cdot\upsilon = 4\cdot 0,5 = 2W$

Ο ρυθμός ενέργειας από τη δύναμη Laplace είναι $P_F = -F_L\cdot\upsilon = -4\cdot 0,5 = -2W$. Το αρνητικό πρόσημο δείχνει ότι η δύναμη Laplace απορροφά ενέργεια.

Η ΗΕΔ επαγωγής προσφέρει στο κύκλωμα ενέργεια με ρυθμό

$$P_{ηλ} = E_{επ}\cdot I_{επ} = (-1)\cdot(-2) = 2W$$

Η ενέργεια μετατρέπεται σε θερμική στην αντίσταση *R* με ρυθμό

$$P_θ = I_{επ}^{\ 2}\cdot R = 4\cdot 0,5 = 2W$$

Δηλαδή κάθε χρονική στιγμή, η ενέργεια που προσφέρεται στο σύστημα μέσω του έργου της $\vec{F}$, απορροφάται μέσω του έργου της $\vec{F}_L$, μετατρέπεται σε ηλεκτρική και προσφέρεται από την επαγωγική πηγή στο κύκλωμα, όπου μετατρέπεται τελικά σε θερμική στην αντίσταση του κυκλώματος.

**Ανδρέας Ριζόπουλος**