

Abbiamo già visto che la derivata è una funzione che dipende da  $x$ , ascissa del punto della curva.

Sostituendo nella funzione derivata un valore  $x_0$  si otterrà il coefficiente angolare della retta tangente alla curva nel punto  $x_0$ .

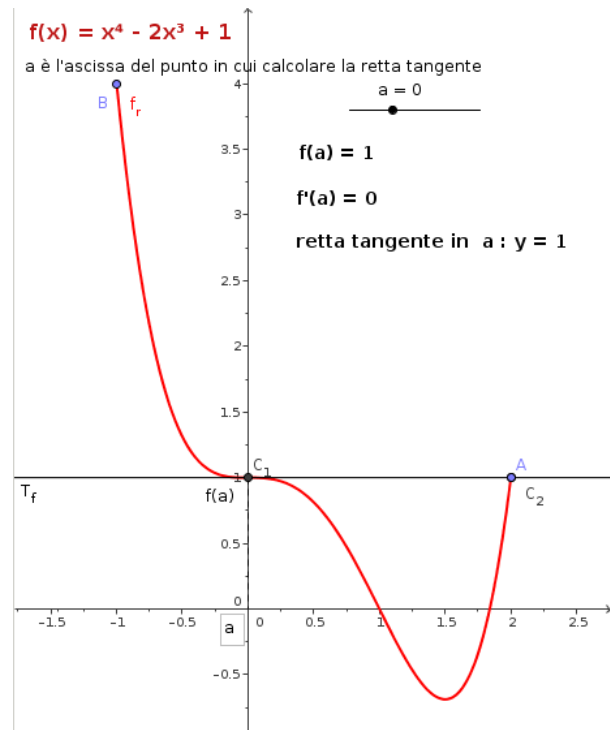
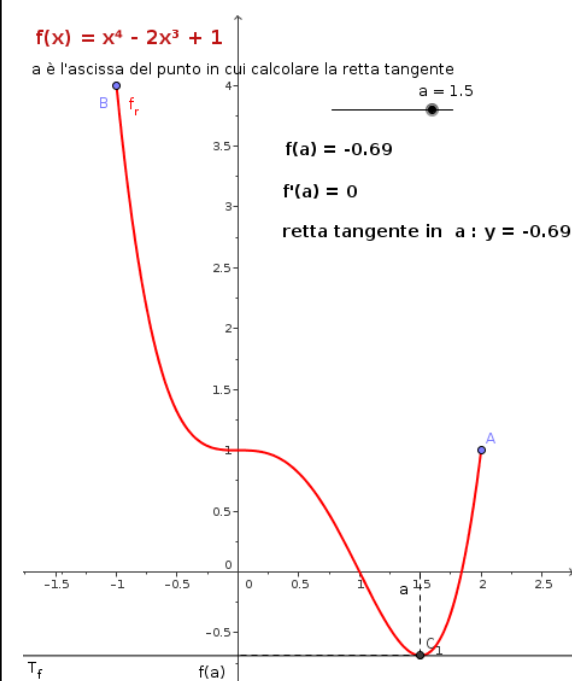
Ora osserviamo i seguenti disegni che rappresentano la retta tangente in alcuni punti della curva.

Nel punto  $C_1$  di coordinate  $(a, f(a))$  con  $a=1,5$  la funzione presenta un punto di minimo relativo, quello che in fisica si indica come un punto di equilibrio stabile. In esso la retta tangente è orizzontale, dunque con coefficiente angolare  $= 0$ , ovvero la derivata vale zero.

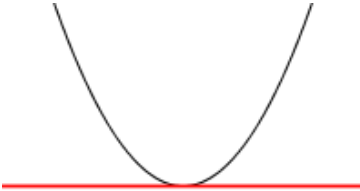
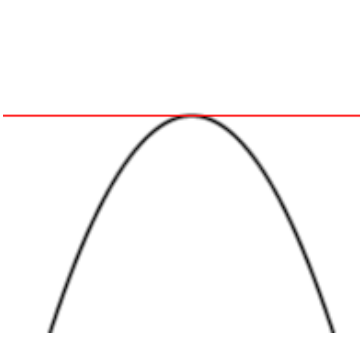
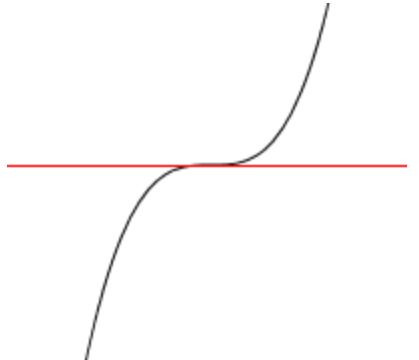
Osserviamo ora il punto  $C_1$  per  $a=0$ : anche in questa posizione la tangente è orizzontale.

La tangente alla funzione  $f(x)$  è orizzontale o, detto in modo più preciso, è parallela all'asse delle  $x$ . In altre parole la funzione non cresce e non decresce, è stazionaria.

Un punto nel quale la funzione ha derivata nulla si dirà allora **punto stazionario**.



Dal punto di vista geometrico, possono darsi tre tipi di punti stazionari:

|                                                                                                       |                                                                                                        |                                                                                                                                                                                                                                                                |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>Punti di <b>minimo</b>: la funzione è decrescente prima e crescente dopo il punto stazionario.</p> | <p>Punti di <b>massimo</b>: la funzione è crescente prima e decrescente dopo il punto stazionario.</p> | <p>Punti di <b>flesso a tangente orizzontale</b>: la funzione è crescente prima e dopo il punto stazionario (flesso crescente o ascendente)<br/><br/>oppure la funzione è decrescente prima e dopo il punto stazionario (flesso decrescente o discendente)</p> |
|                      |                      |                                                                                                                                                                             |

Il **punto di massimo** (e minimo) si dice **relativo**, perché potrebbe esserci un punto della funzione con un valore più grande (più piccolo) di quello. Il grafico a fianco presenta un max e un min relativi, che però non sono i valori più grande e più piccolo che può assumere la funzione.

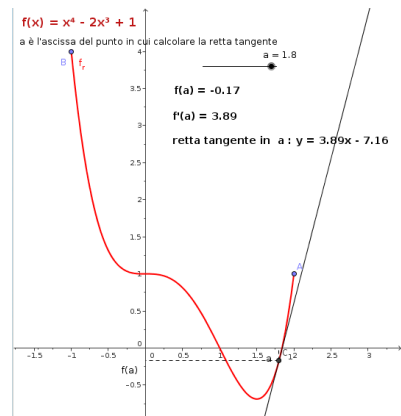
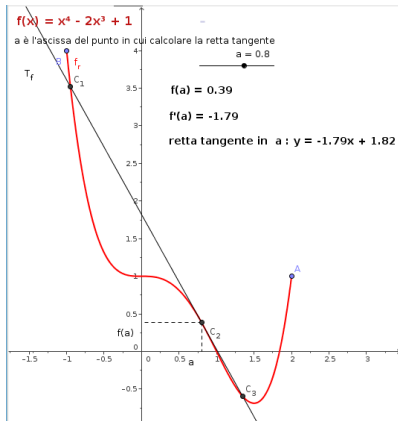
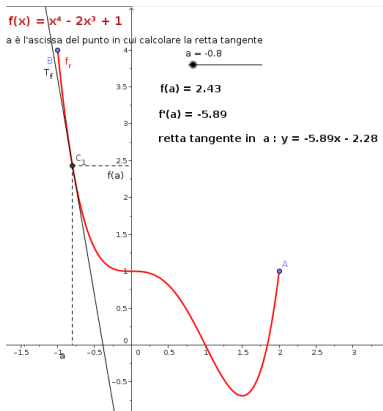


Al massimo (minimo) relativo si contrappone il **massimo** (minimo) **assoluto**, che è il valore più grande (più piccolo) che la funzione assume nel dominio o in un intervallo dato.

Ora osserviamo la retta tangente dove la funzione decresce: si nota che il coefficiente angolare della retta tangente è negativo.

Invece, dove la funzione cresce, il coefficiente angolare della retta tangente è positivo.

Dunque per  $0 < a < 1.5$  la funzione decresce e il coefficiente angolare della retta tangente è negativo; per  $1.5 < a < 2$  la funzione cresce e il coefficiente angolare della retta tangente è positivo.



Dopo aver osservato empiricamente questi risultati, ricaviamoli con una dimostrazione.

Consideriamo il caso della derivata prima positiva  $\lim_{dx \rightarrow 0} \left( \frac{f(x+dx) - f(x)}{dx} \right) > 0$  ; questo

implica che anche  $\frac{f(x+dx) - f(x)}{dx} > 0$ . Siccome  $dx$  è una quantità positiva, è  $f(x+dx) > f(x)$  cioè è una funzione crescente.

Allo stesso modo si dimostra che se la derivata prima è negativa la funzione è decrescente.

Riassumendo:

|                   |                                                                                                                                                                                                           |
|-------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| derivata positiva | funzione crescente                                                                                                                                                                                        |
| derivata negativa | funzione decrescente                                                                                                                                                                                      |
| derivata nulla    | se la funzione prima cresce poi decresce: max relativo<br>se la funzione prima decresce poi cresce: min relativo<br>se cresce - cresce : flesso ascendente<br>se decresce - decresce : flesso discendente |

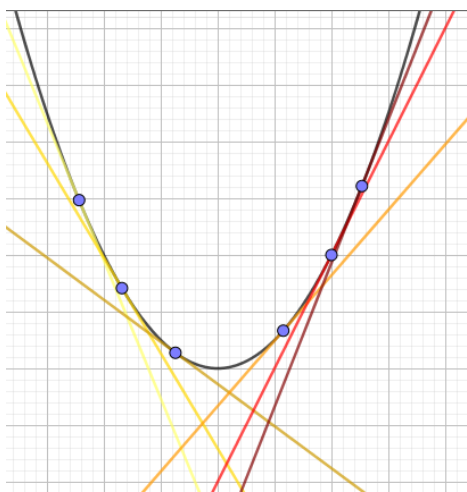
È ora naturale chiedersi se la derivata seconda abbia anch'essa un significato geometrico.

La risposta è positiva: innanzitutto va ribadito che la derivata seconda è la derivata della derivata e quindi misura l'incremento della derivata prima. In altre parole la

derivata seconda positiva indica che il coefficiente angolare della retta tangente aumenta, mentre con la derivata seconda negativa il coefficiente angolare della retta tangente diminuisce.

Vediamo due situazioni la prima in cui la derivata prima cresce e la seconda in cui la derivata prima decresce.

Osservando il primo grafico si vede che il coefficiente angolare delle tangenti alla curva, andando naturalmente da sinistra a destra, è inizialmente molto negativo, poi aumenta sempre più fino a diventare positivo nella parte destra della curva.

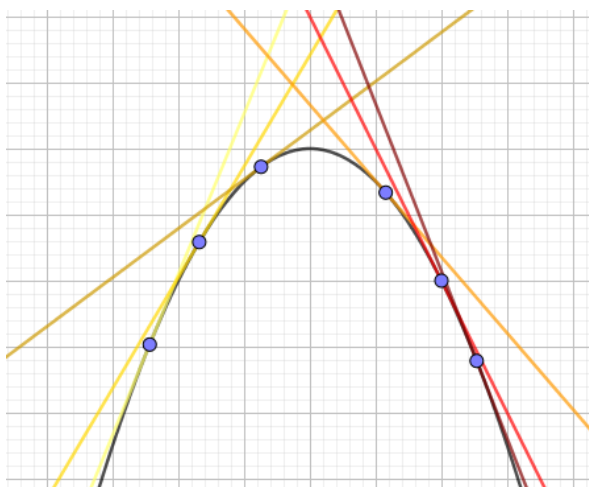


La derivata prima cresce; la derivata prima pensata come funzione è crescente; la derivata di una funzione crescente è positiva. Ma la derivata prima della derivata prima è la derivata seconda.

Dunque la derivata seconda è positiva.

In questo caso il grafico della funzione si dice che ha la concavità rivolta verso l'alto.

Osservando ora questo secondo disegno si ha una situazione rovesciata. Qui le tangenti partendo da sinistra hanno coefficiente angolare molto positivo, che andando verso destra diminuisce.



La derivata prima decresce; la derivata prima pensata come funzione è decrescente; la derivata di una funzione decrescente è negativa. Ma la derivata prima della derivata prima è la derivata seconda.

Dunque la derivata seconda è negativa.

In questo secondo caso che ha la concavità rivolta verso il basso.

Diamo ora la definizione di **funzione convessa** (o con la **concavità verso l'alto**):

se la funzione possiede la retta tangente in un suo punto possiamo dire che la funzione ha la concavità verso l'alto in quel punto se la curva giace al di sopra della retta tangente e la funzione ha la concavità verso il basso se la curva giace al di sotto della retta tangente (almeno per un intervallo contenente il punto stesso).

Abbiamo dunque scoperto che se la funzione è convessa (oppure si può dire che ha la concavità verso l'alto), la sua derivata seconda, se esiste, è positiva; se la funzione è concava (oppure si può dire che ha la concavità verso il basso) la derivata seconda è negativa.

Analizziamo ora che cosa succede se la derivata seconda è nulla. Può darsi che già la derivata prima in quel punto fosse 0; in questo caso avremmo un punto stazionario. Se invece la derivata prima fosse diversa da zero, in questo punto la concavità passerebbe dall'alto al basso o viceversa. Ci sarebbe dunque un cambio di concavità. Il punto in cui cambia la concavità si chiama **punto di flesso**. Abbiamo già incontrato i punti di flesso a tangente orizzontale, dove la derivata prima vale 0. In questi altri punti dove la derivata prima è diversa da zero ma la derivata seconda è uguale a zero il flesso è a tangente obliqua.

Nel punto di flesso la curva attraversa la retta tangente; infatti c'è un cambio di concavità cioè prima del punto di flesso la curva è tutta sopra la retta tangente e dopo il punto di flesso la curva è tutta sotto (o viceversa).

Per le derivate successive alla seconda non si prendono in considerazione ulteriori significati, anche se vedremo che possiamo utilizzare anche le derivate successive per esplorare i punti stazionari e i punti di flesso.