СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ

Система счисления — это система записи чисел.

В настоящее время почти все народы пользуются *десятичной позиционной системой счисления*.

В этой системе все числа записываются с помощью десяти цифр: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Число 10 — основание системы счисления. Счет идет десятками, сотнями, тысячами и т. д.

1 десяток = 10 единиц;

1 сотня = 10 десятков;

1 тысяча = 10 сотен.

Единица каждого следующего разряда в 10 раз больше единицы предыдущего разряда. Значение каждой цифры зависит от ее места (позиции) в записи числа.

Например, число, состоящее из двух сотен, трех десятков и четырех единиц, мы записываем так: $234 = 2 \cdot 10 \cdot 10 + 3 \cdot 10 + 4$.

Использование числа 10 как основания системы счисления связано с тем, что у людей на руках 10 пальцев, которые удобнее всего было использовать при счете.

Современная десятичная позиционная система счисления возникла в VI веке в Индии. Индийская система счисления пришла сначала в арабские страны, затем в XVI веке в Западную Европу и в XVII веке в Россию.

Основанием системы счисления может быть любое число, большее единицы. Раньше некоторые народы применяли системы счисления с основаниями: 2, 5, 8, 12, 16, 20, 40, 60 и др.

Недесятичные системы счисления сохранились до сих пор. Так, например, мы делим год на 12 месяцев, сутки — на 24 часа, 1 час — на 60 минут, 1 минуту — на 60 секунд.

Системы счисления с основаниями 2, 8 и 16, так называемые «машинные системы счисления» составляют математическую основу работы компьютера. Чтобы различить числа, записанные в разных системах счисления, внизу справа указывают основание системы счисления. Десятичное основание обычно не указывается, поскольку все мы пользуемся десятичной системой счисления.

Так, например: $5 = 101_2 = 12_3 = 11_4 = 10_5$

Двоичная система счисления

В двоичной системе счисления только две цифры 0 и 1. С их помощью можно записать любое число. За основание системы счисления принимается число 2. Счет ведется двойками. Число 2 считается единицей 2-го разряда и записывается в виде 10, читается «один-ноль». Каждая единица следующего разряда в 2 раза больше предыдущей, т. е. эти единицы составляют последовательность чисел 2, 4, 8, 16, 32, ...

$$1 = 1_2$$

$$3 = 11_2$$

$$5 = 101_2$$

$$7 = 111_2$$

$$9 = 1001_2$$

$$2 = 10_2 \quad 4 = 100_2 \quad 6 = 110_2 \quad 8 = 1000_2 \quad 10 = 1010_2$$

• **Из десятичной в двоичную**

Для того чтобы число, записанное в десятичной системе счисления, записать в двоичной системе счисления, его делят последовательно на 2 и записывают получающиеся остатки 0 и 1 в порядке от последнего к первому, первая цифра числа — последнее частное, например:

$$43 : 2 = 21 \text{ (ост. 1);}$$

$$21 : 2 = 10 \text{ (ост. 1);}$$

$$10 : 2 = 5 \text{ (ост. 0);}$$

$$5 : 2 = 2 \text{ (ост. 1);}$$

$$2 : 2 = 1 \text{ (ост. 0).}$$

Ответ: $43 = 101011_2$.

Проверьте самостоятельно запись: $35 = 100011_2$.

Из двоичной в десятичную

Чтобы перевести число 101011_2 в десятичную систему счисления, надо представить это число в следующем виде:

$$1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = \\ = 32 + 0 + 8 + 0 + 2 + 1 = 43.$$

Ответ: $101011_2 = 43$.

Проверьте самостоятельно запись: $111012 = 29$.

Сложение

В двоичной системе счисления:

$$0 + 0 = 0; \quad 0 + 1 = 1; \quad 1 + 0 = 1; \quad 1 + 1 = 10.$$

Таблица сложения:

+	0	1
0	0	1
1	1	10

Пример сложения в двоичной системе счисления: $101011_2 + 10101_2 = 1000000_2$.

Пятеричная система счисления

В пятеричной системе счисления используются цифры 0, 1, 2, 3 и 4.

Основание системы счисления - число 5. Счет ведется пятерками. Число 5 считается единицей 2-го разряда и записывается в виде 10. Каждая единица следующего разряда равна пяти единицам предыдущего разряда:

$$1 = 1_5 \quad 3 = 3_5$$

$$5 = 10_5$$

$$7 = 12_5$$

$$9 = 14_5$$

$$2 = 2_5$$

$$4 = 4_5$$

$$6 = 11_5$$

$$8 = 13_5$$

$$10 = 20_5$$

• **Из десятичной в пятеричную**

Перевод чисел в пятеричную систему счисления из десятичной происходит так же, как и в двоичную, только делением на 5:

$$42:5 = 8 \text{ (ост. 2);}$$

$$8:5 = 1 \text{ (ост. 3).}$$

Ответ: $42 = 132_5$.

• **Из пятеричной в десятичную**

Чтобы перевести число 23421_5 в десятичную систему счисления, надо представить это число в виде:

$$2 \cdot 5^4 + 3 \cdot 5^3 + 4 \cdot 5^2 + 2 \cdot 5^1 + 1 \cdot 5^0 = \\ = 1250 + 375 + 100 + 10 + 1 = 1736.$$

Ответ: $23421_5 = 1736$.

• **Сложение**

В пятеричной системе счисления:

+	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	10
2	2	3	4	10	11
3	3	4	10	11	12
4	4	10	11	12	13

$$1 + 1 = 2 \quad 1 + 2 = 3 \quad 1 + 3 = 4 \quad 1 + 4 = 10 \quad 2 + 2 = 4 \\ 2 + 3 = 10 \quad 2 + 4 = 11 \quad 3 + 3 = 11 \quad 3 + 4 = 12 \quad 4 + 4 = 13.$$

Пример сложения в пятеричной системе счисления: $1304_5 + 334_5 = 2143_5$

Восьмеричная система счисления

В восьмеричной системе счисления используются цифры 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Основание системы счисления — число 8. Счет ведется восьмерками. Число 8 считается единицей 2-го разряда и записывается в виде 10. Каждая единица следующего разряда равна восьми единицам предыдущего разряда.

$$= 1_8 \quad 3=3_8 \quad 5 = 5_8 \quad 7 = 7_8 \quad 9=11_8 \\ = 2_8 \quad 4=4_8 \quad 6 = 6_8 \quad 8 = 10_8 \quad 10=12_8$$

Из десятичной в восьмеричную

Перевод чисел из десятичной системы счисления в восьмеричную происходит так же как и в предыдущие, но делением на 8.

$$158 : 8 = 19 \text{ (ост. 6);}$$

$$19 : 8 = 2 \text{ (ост. 3).}$$

Ответ: $158 = 236_8$.

1 Из восьмеричной в десятичную

Чтобы перевести число 123_8 в десятичную систему счисления, надо представить его в виде:

$$1 \cdot 8^2 + 2 \cdot 8^1 + 3 \cdot 8^0 = 64 + 16 + 3 = 83.$$

Ответ: $123_8 = 83$.

Сложение

Таблица сложения:

+	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	1	2	3	4	5	6	7
1	1	2	3	4	5	6	7	10
2	2	3	4	5	6	7	10	11
3	3	4	5	6	7	10	11	12
4	4	5	6	7	10	11	12	13
5	5	6	7	10	11	12	13	14
6	6	7	10	11	12	13	14	15
7	7	10	11	12	13	14	15	16

Пример сложения в восьмеричной системе счисления: $1234_8 + 6544_8 = 10000_8$.

Применение систем счисления к решению задач

Все 5-буквенные слова, составленные из букв А, О, У, записаны в алфавитном порядке.

Вот начало списка:

1. ААААА
2. ААААО
3. ААААУ
4. АААОА

.....

Запишите слово, которое стоит на 240-м месте от начала списка.

Решение

Идея - троичная система счисления.

А - 0, О - 1, У - 2

1) выпишем начало списка, заменив буквы на цифры:

1. 00000

2. 00001

3. 00002

4. 00010

.....

Перед нами числа, записанные в троичной системе счисления в порядке возрастания: на первом месте стоит число 0, на втором – 1 и т.д.

тогда на 240-м месте стоит число 239, записанное в троичной системе счисления

переведем 239 в троичную систему: $239 = 22212_3$

заменяем обратно цифры на буквы: $22212 \rightarrow \text{УУУОУ}$

Ответ: УУУОУ.

ВАЖНО помнить, что нумерация в задаче начинается с 1, а числа в троичной системе – с нуля, поэтому для получения 240-го элемента списка нужно переводить в троичную систему число $240-1 = 239$.

Задачи для самостоятельного решения.

1. Запишите натуральные числа от 1 до 10 в троичной системе счисления.
2. В какой системе счисления числа записываются:
  - а) 23 как 212;
  - б) 33 как 53;
  - в) 42 как 52?
3. Какое из чисел больше:
  - а) 3 или 3_8 ;
  - б) 14_5 или 14_8 ;
  - в) 111_2 или 111_8 ?
4. Напишите наибольшее трехзначное число в четверичной системе счисления.
5. Напишите наименьшее четырехзначное число в семеричной системе счисления.
6. Напишите наибольшее пятизначное число, в котором все цифры различны в пятеричной системе счисления.
7. Напишите наименьшее шестизначное число, в котором все цифры различны в шестеричной системе счисления.
8. Запишите:
  - а) 64 в двоичной;
  - б) 321 в троичной;
  - в) 2456 в пятеричной;
  - г) 3074 в восьмеричной системе счисления.

9. Запишите 130 в системах счисления с основаниями от 2 до 9.
10. Запишите в десятичной системе счисления числа:
а) 100101_2 ; б) 12001_3 ; в) 4032_5 ; г) 504_8 .
11. Если $4 \cdot 4 = 20$, то чему равно произведение $5 \cdot 5$ в той же системе счисления?
12. В какой системе счисления:
а) $2 + 3 = 12$;
б) $5 + 2 = 11$;
в) $2 \cdot 2 = 10$;
г) $3 \cdot 3 = 14$?
13. Во сколько раз увеличится число 325_6 , если приписать справа:
а) один ноль;
б) два нуля?
14. Во сколько раз уменьшится число 212000_3 , если отбросить:
а) один ноль;
б) три нуля?
15. Установите, в какой системе счисления выполнялось каждое из следующих действий:
а) $23 + 14 = 42$;
б) $71 - 36 = 33$;
в) $14 - 2 = 30$;
г) $55 : 4 = 13$.
16. В какой системе счисления у квадрата 100 сторон? Сколько сторон в этой системе счисления у треугольника?
17. Расшифруйте высказывание: «мне 1111 лет, и я учусь в 111 классе»?
18. Учитель на вопрос, много ли у него в классе учеников, ответил: «В классе 100 детей, из них 25 мальчиков и 31 девочка». В какой системе счисления учитель дал ответ?
19. «Я окончил курс университета 44 лет от роду. Спустя год, 100-летним молодым человеком я женился на 34-летней девушке. Незначительная разница в возрасте — всего 11 лет — способствовала тому, что мы жили общими интересами и мечтами. Спустя несколько лет у меня была уже семья из 10 детей». В какой системе счисления дан рассказ?
20. Необыкновенная девочка
Ей было тысяча сто лет,
Она в сто первый класс ходила,
В портфеле по сто книг носила —

Все это правда, а не бред.
Когда, пыля десятком ног,
Она шагала по дороге,
За ней всегда бежал щенок
С одним хвостом, зато стоногий.
Она ловила каждый звук
Своими десятью ушами,
И десять загорелых рук
Портфель и поводок держали.
И десять темно-синих глаз
Рассматривали мир привычно...
Но станет все совсем обычным,
Когда поймете наш рассказ.

А. Н. Старичков

В какой системе счисления написано стихотворение?

21. Все 5-буквенные слова, составленные из букв А, К, Р, У, записаны в алфавитном порядке. Вот начало списка:

1. ААААА
2. ААААК
3. ААААР
4. ААААУ
5. АААКА

.....

Запишите слово, которое стоит на 450-м месте от начала списка.