Системы счисления

Система счисления — это система записи чисел.

В настоящее время почти все народы пользуются *десятичной позиционной системой счисления.*

В этой системе все числа записываются с помощью десяти цифр: 0,1, 2, 3,4, 5, 6, 7, 8, 9. Число 10 —основание системы счисления. Счет идет десятками, сотнями, тысячами и т. д.

1 десяток = 10 единиц;

1 сотня = 10 десятков;

1 тысяча =10 сотен.

Единица каждого следующего разряда в 10 раз больше единицы предыдущего разряда. Значение каждой цифры зависит от ее места (позиции) в записи числа.

Например, число, состоящее из двух сотен, трех десятков и четырех единиц, мы записываем так: 234 = 2 • 10 • 10 + 3• 10 + 4.

Использование числа 10 как основания системы счисления связано с тем, что у людей на руках 10 пальцев, которые удобнее всего было использовать при счете.

Современная десятичная позиционная система счисления возникла в VI веке в Индии. Индийская система счисления пришла сначала в арабские страны, затем в XVI веке в Западную Европу и в XVII веке в Россию.

Основанием системы счисления может быть любое число, большее единицы. Раньше некоторые народы применяли системы счисления с основаниями: 2, 5, 8, 12, 16, 20, 40, 60 и др.

Недесятичные системы счисления сохранились до сих пор. Так, например, мы делим год на 12 месяцев, сутки - на 24 часа, 1 час — на 60 минут, 1 минуту — на 60 секунд.

Системы счисления с основаниями 2, 8 и 16, так называемые «машинные системы счисления» составляют математическую основу работы компьютера.

Чтобы различить числа, записанные в разных системах счисления, внизу справа указывают основание системы счисления. Десятичное основание обычно не указывается, поскольку все мы пользуемся десятичной системой счисления.

Так, например: $5 = 101_2 = 12з = 11_4 = 10_5$

Двоичная система счисления

В двоичной системе счисления только две цифры 0 и 1. С их помощью можно записать любое число. За основание системы счисления принимается число 2. Счет ведется двойками. Число 2 считается единицей 2-го разряда и записывается в виде 10, читается «один-нуль». Каждая единица следующего разряда в 2 раза больше предыдущей, т. е. эти единицы составляют последовательность чисел 2, 4, 8, 16, 32, ...

$1 = 1_2$ $3 = 11_2$ $5 = 101_2$ $7 = 111_2$ $9 = 1001_2$

$2 = 10_2$ $4 = 100_2$ $6 = 110_2$ $8= 1000_2$ $10 = 1010_2$

• ***Из десятичной в двоичную***

Для того чтобы число, записанное в десятичной системе счисления, записать в двоичной системе счисления, его делят последовательно на 2 и записывают получающиеся остатки 0 и 1 в порядке от последнего к первому, первая цифра числа — последнее частное, например:

43 : 2 = 21 (ост. 1);
21 : 2 = 10 (ост. 1);
10 : 2 = 5 (ост. 0);
5:2 = 2 (ост. 1);
2:2 = 1 (ост. 0).

Ответ: $43 = 101011_2$.

Проверьте самостоятельно запись: $35 = 100011_2$.

Из двоичной в десятичную

Чтобы перевести число 101011_2в десятичную систему счисления, надо представить это число в следующем виде:

$1 • 2^5 + 0 • 2^4 + 1 • 2^3 + 0 • 2^2 + 1 • 2^1 + 1 • 2° =$
$= 32 + 0 + 8 + 0 + 2 + 1 =43.$

Ответ: 1010112 = 43.

Проверьте самостоятельно запись: 111012 = 29.

Сложение

В двоичной системе счисления:

0 + 0 = 0; 0 + 1 = 1; 1 + 0 = 1; 1 + 1 = 10.

Таблица сложения:

+	0	1
0	0	1
1	1	10

Пример сложения в двоичной системе счисления: $101011_2 + 10101_2 = 1000000_2$.

Пятеричная система счисления

В пятеричной системе счисления используются цифры 0, 1, 2, 3 и 4. Основание системы счисления - число 5. Счет ведется пятерками. Число 5 считается единицей 2-го разряда и записывается в виде 10. Каждая единица следующего разряда равна пяти единицам предыдущего разряда:

$1= 1_5$ $3 = 3_5$ $5 = 10_5$ $7=12_5$ $9=14_5$
$2 = 2_5$ $4 = 4_5$ $6 = 11_5$ $8=13_5$ $10=20_5$

- ***Из десятичной в пятеричную***

Перевод чисел в пятеричную систему счисления из десятичной происходит так же, как и в двоичную, только делением на 5:
42:5 = 8 (ост. 2);
8:5 = 1 (ост. 3).
Ответ: 42 = 132s.

- ***Из пятеричной в десятичную***

Чтобы перевести число 23421s в десятичную систему счисления, надо представить это число в виде:
$2 \cdot 5^4 + 3 \cdot 5^3 + 4 \cdot 5^2 + 2 \cdot 5^1 + 1 \cdot 5^\circ =$
$= 1250 + 375 + 100 + 10 + 1 = 1736.$
Ответ: 23421s = 1736.

- ***Сложение***

В пятеричной системе счисления:

+	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	10
2	2	3	4	10	11
3	3	4	10	11	12
4	4	10	11	12	13

1 + 1 = 2 1 + 2 = 3 1 + 3 = 4 1 + 4 = 10 2 + 2 = 4
2 + 3 = 10 2 + 4 = 11 3 + 3 = 11 3 + 4 = 12 4 + 4 = 13.

Пример сложения в пятеричной системе счисления: $1304_5 + 334_5 = 2143_5$

Восьмеричная система счисления

В восьмеричной системе счисления используются цифры 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Основание системы счисления — число 8. Счет ведется восьмерками. Число 8 считается единицей 2-го разряда и записывается в виде 10. Каждая единица следующего разряда равна восьми единицам предыдущего разряда.
$= 1_8$ $3=3_8$ $5 = 5_8$ $7 = 7_8$ $9=11_8$
$= 2_8$ $4=4_8$ $6 = 6_8$ $8 = 10_8$ $10=12_8$

Из десятичной в восьмеричную

Перевод чисел из десятичной системы счисления в восьмеричную происходит так же как и в предыдущие, но делением на 8.
158 : 8 = 19 (ост. 6);
19 : 8 = 2 (ост. 3).
Ответ: $158 = 236_8$.

1 ***Из восьмеричной в десятичную***

Чтобы перевести число 123_8 в десятичную систему счисления, надо представить его в виде:

$1 \cdot 8^2 + 2 \cdot 8^1 + 3 \cdot 8° = 64 + 16 + 3 = 83.$

Ответ: 123з = 83.

Сложение

Таблица сложения:

+	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	1	2	3	4	5	6	7
1	1	2	3	4	5	6	7	10
2	2	3	4	5	6	7	10	11
3	3	4	5	6	7	10	11	12
4	4	5	6	7	10	11	12	13
5	5	6	7	10	11	12	13	14
6	6	7	10	11	12	13	14	15
7	7	10	11	12	13	14	15	16

Пример сложения в восьмеричной системе счисления: $1234_8 + 6544_8 = 10000_8$.

Применение систем счисления к решению задач

Все 5-буквенные слова, составленные из букв А, О, У, записаны в алфавитном порядке.

Вот начало списка:

1. ААААА
2. ААААО
3. ААААУ
4. АААОА

……

Запишите слово, которое стоит на 240-м месте от начала списка.

Решение

Идея - троичная система счисления.

А – 0, О - 1, У, - 2

1) выпишем начало списка, заменив буквы на цифры:

1. 00000

2. 00001

3. 00002

4. 00010

.....

Перед нами числа, записанные в троичной системе счисления в порядке возрастания: на первом месте стоит число 0, на втором – 1 и т.д.
тогда на 240-м месте стоит число 239, записанное в троичной системе счисления
переведем 239 в троичную систему: $239 = 22212_3$
заменяем обратно цифры на буквы: 22212 → УУУОУ
Ответ: УУУОУ.
ВАЖНО помнить, что нумерация в задаче начинается с 1, а числа в троичной системе – с нуля, поэтому для получения 240-го элемента списка нужно переводить в троичную систему число 240-1 = 239.

Задачи для самостоятельного решения.

1.Запишите натуральные числа от 1 до 10 в троичной системе счисления.
2.В какой системе счисления числа записываются:
а) 23 как 212;
б) 33 как 53;
в) 42 как 52?
3.Какое из чисел больше:
а) 3 или 3_8;
б) 14_5 или 14_8;
в) 111_2 или 111_8?
4. Напишите наибольшее трехзначное число в четверичной системе счисления.
5.Напишите наименьшее четырехзначное число в семеричной системе счисления.
6.Напишите наибольшее пятизначное число, в котором все цифры различны в пятеричной системе счисления.
7.Напишите наименьшее шестизначное число, в котором все цифры различны в шестеричной системе счисления.
8.Запишите:
а) 64 в двоичной;
б) 321 в троичной;
в) 2456 в пятеричной;
г) 3074 в восьмеричной системе счисления.

9. Запишите 130 в системах счисления с основаниями от 2 до 9.
10.Запишите в десятичной системе счисления числа:
а) 100101_2; б) 12001_3; в) 4032_5; г) 504_8.
11.Если 4 • 4 = 20, то чему равно произведение 5 • 5 в той же системе счисления?
12.В какой системе счисления:

а) 2 + 3 = 12;
б) 5 + 2 = 11;
в) 2 • 2 = 10;
г) 3 3 = 14?

13.Во сколько раз увеличится число 325_6, если приписать справа:
а) один нуль;
б) два нуля?
14.Во сколько раз уменьшится число 212000з, если отбросить:
а) один нуль;
б) три нуля?
15.Установите, в какой системе счисления выполнялось каждое из следующих действий:

а) 23 + 14 = 42;
б) 71 - 36 = 33;
в) 14 -2 = 30;
г) 55 : 4 = 13.

16. В какой системе счисления у квадрата 100 сторон? Сколько сторон в этой системе счисления у треугольника?
17. Расшифруйте высказывание: «мне 1111 лет, и я учцсь в 111 классе»?
18. Учитель на вопрос, много ли у него в классе учеников, ответил: «В классе 100 детей, из них 25 мальчиков и 31 девочка». В какой системе счисления учитель дал ответ?

19. «Я окончил курс университета 44 лет от роду. Спустя год, 100-летним молодым человеком я женился на 34-летней девушке. Незначительная разница в возрасте — всего 11 лет — способствовала тому, что мы жили общими интересами и мечтами. Спустя несколько лет у меня была уже семья из 10 детей». В какой системе счисления дан рассказ?
20.Необыкновенная девочка

Ей было тысяча сто лет,
Она в сто первый класс ходила,
В портфеле по сто книг носила —

Все это правда, а не бред.
Когда, пыля десятком ног,
Она шагала по дороге,
За ней всегда бежал щенок
С одним хвостом, зато стоногий.
Она ловила каждый звук
Своими десятью ушами,
И десять загорелых рук
Портфель и поводок держали.
И десять темно-синих глаз
Рассматривали мир привычно...
Но станет все совсем обычным,
Когда поймете наш рассказ.
А. Н. Старичков

В какой системе счисления написано стихотворение?

21.Все 5-буквенные слова, составленные из букв А, К, Р, У, записаны в алфавитном порядке. Вот начало списка:

1. ААААА
2. ААААК
3. ААААР
4. ААААУ
5. АААКА

……

Запишите слово, которое стоит на 450-м месте от начала списка.