

Centrale MP 2009 – Epreuve de PHYSIQUE-CHIMIE

*Le Seigneur des Anneaux**Partie I – Bilan radiatif de Saturne*

I.A-

$$\rho = \frac{M_{Sa}}{\frac{4}{3}\pi R_{Sa}^3} = 689 \text{ kg.m}^{-3}$$

I.A.1)

Cette masse volumique moyenne est intermédiaire entre une masse volumique de solide (de quelques 10^3 kg.m^{-3}) et une masse volumique de gaz (quelques kg.m^{-3}) ce qui s'explique par le fait que la planète Saturne est une géante gazeuse, essentiellement constituée de gaz avec un noyau solide.

I.A.2) Par symétrie sphérique, le champ gravitationnel est de la forme $\vec{g}(M) = g(r)\vec{u}_r$.

Appliquons le théorème de Gauss de la gravitation à la sphère de centre O et de rayon $r \leq R_{Sa}$:

$$4\pi r^2 g(r) = -4\pi G \left(\frac{4}{3}\pi r^3 \rho \right) \Rightarrow g(r) = -\frac{4}{3}\pi G \rho r$$

$$\vec{g}(M) = -\frac{GM_{Sa}}{R_{Sa}^2} \vec{u}_r$$

Finalement :

$$g_0 = \frac{GM_{Sa}}{R_{Sa}^2} = 11,2 \text{ m.s}^{-2}$$

Application numérique : le champ de pesanteur à la surface de Saturne est

I.A.3)a) Appliquons la loi fondamentale de l'hydrostatique :

$$\text{grad } P(M) = \rho(M) \vec{g}(M) \Rightarrow \frac{dP}{dr} = -\rho \frac{GM_{Sa}}{R_{Sa}^2} r = -\frac{\rho g_0}{R_{Sa}} r \Rightarrow P(r) = \frac{\rho g_0}{2R_{Sa}} (R_{Sa}^2 - r^2)$$

en tenant compte de la condition aux limites $P(R_{Sa}) = 0$.

$$\text{b) La distance cherchée vérifie : } \frac{\rho g_0}{2R_{Sa}} (R_{Sa}^2 - r_{\text{mét}}^2) = P_{\text{mét}} \Rightarrow r_{\text{mét}} = R_{Sa} \sqrt{1 - \frac{2P_{\text{mét}}}{\rho g_0 R_{Sa}}} = 0,33 R_{Sa}$$

I.A.4)a) La puissance surfacique émise par le Soleil est donnée par la loi de Stefan : $\varphi_{\text{émis},S} = \sigma T_S^4$. La puissance totale émise par le Soleil est : $\Phi_0 = \varphi_{\text{émis},S} 4\pi R_S^2$ soit : $\Phi_0 = 4\pi \sigma R_S^2 T_S^4 = 3,64 \cdot 10^{26} \text{ W}$.

b) Saturne intercepte la fraction $\frac{\pi R_{Sa}^2}{4\pi d_{SaS}^2} = \left(\frac{R_{Sa}}{2d_{SaS}} \right)^2$ de Φ_0 , et absorbe la fraction a de la puissance

$$\Phi_{\text{abs}} = a \left(\frac{R_{Sa}}{2d_{SaS}} \right)^2 \Phi_0$$

interceptée, donc :

c) Si Saturne rayonne comme un corps noir, la puissance émise par Saturne est : $\Phi_{\text{émis}} = \sigma T_{Sa}^4 \times 4\pi R_{Sa}^2$. La

condition d'équilibre thermique pour Saturne s'écrit : $\Phi_{\text{émis}} = \Phi_{\text{abs}}$ et conduit à :

$$T_{Sa} = T_S a^{\frac{1}{4}} \left(\frac{R_S}{2d_{SaS}} \right)^{\frac{1}{2}}$$

Application numérique : $T_{Sa} = 80,1 \text{ K}$. La valeur réelle est notablement plus élevée ; la différence est due à l'existence d'un processus dégageant de l'énergie thermique à l'intérieur de la planète.

I.B-

I.B.1) Les forces s'appliquant sur la gouttelette sont : son poids : $mg(M)$, la force de frottement :

$$-\lambda v_{He}, \text{ la } \underline{\text{poussée d'Archimède}} : -m \frac{\rho_H}{\rho_{He}} g(M).$$

$$m \frac{dv_{He}}{dt} = m \left(1 - \frac{\rho_H}{\rho_{He}} \right) g(M) - \lambda v_{He}$$

Le théorème de la résultante cinétique s'écrit donc :

I.B.2)a) Les gouttelettes traversant la surface dS pendant la durée dt sont celles qui se situent à l'instant t dans un cylindre oblique tel que celui qui est dessiné sur l'énoncé, de base dS et de hauteur $v_{He} dt$, donc de volume $v_{He} dt \cdot dS$. Leur nombre est $n v_{He} dt \cdot dS$ et leur masse totale :

$$dm_{He} = m n v_{He} dt \cdot dS = (nm v_{He}) \cdot dS dt$$

Ainsi le vecteur densité de courant d'hélium est : $\vec{j}_{He} = nm v_{He}$.

b) En régime permanent les gouttelettes d'hélium ont une vitesse constante donnée par l'équation

différentielle du I.B.1) avec $\frac{dv_{He}}{dt} = 0$: $v_{He} = \frac{m}{\lambda} \left(1 - \frac{\rho_H}{\rho_{He}} \right) g$. Il vient donc :

$$\vec{j}_m = \vec{j}_{He} + \vec{j}_H = nm \left(1 - \frac{\rho_H}{\rho_{He}} \right) v_{He} = \frac{nm^2}{\lambda} \left(1 - \frac{\rho_H}{\rho_{He}} \right)^2 g = \gamma g \quad \text{avec} \quad \gamma = \frac{nm^2}{\lambda} \left(1 - \frac{\rho_H}{\rho_{He}} \right)^2$$

n est en m^{-3} , m en kg , λ en kg.s^{-1} (car $-\lambda v_{He}$ est homogène à $m dv_{He}/dt$) donc γ est en $\text{m}^{-3}.\text{kg.s}$.

c) Cette formule est analogue à la loi d'Ohm locale $\vec{j}_{el} = \gamma_{el} \vec{E}$ reliant le vecteur densité de courant électrique $\vec{j}_{el}$ au champ électrique $\vec{E}$, où γ_{el} est la conductivité électrique.

I.B.3)a) La puissance de la force de frottement sur une gouttelette est : $P_F = \vec{F} \cdot \vec{v}_{He} = -\lambda v_{He}^2$.

La densité volumique de puissance de ces forces est :

$$P_V = n P_F = -n \lambda v_{He}^2 = -\frac{nm^2}{\lambda} \left(1 - \frac{\rho_H}{\rho_{He}} \right)^2 g^2 \quad \text{soit} \quad P_V = -\gamma g^2 = -\vec{j}_m \cdot \vec{g}$$

b) On a des expressions analogues pour la puissance volumique des forces électromagnétiques dans un milieu ohmique : $P_{V,el} = \vec{j} \cdot \vec{E} = \gamma E^2$. Le signe est opposé parce qu'on a considéré la puissance des forces de frottement d'un côté et la puissance des forces motrices (forces électriques) de l'autre.

c) L'énergie dissipée par frottement est convertie en énergie interne. Il y a « production d'énergie thermique » au sein de la planète ce qui augmente sa température. La puissance thermique créée au sein de la planète est :

$$P_{\text{diss}} = \iiint_{\text{volume de Saturne}} -P_V d\tau = \int_{r=0,2R_{Sa}}^{0,55R_{Sa}} \gamma g(r)^2 4\pi r^2 dr = 4\pi \gamma \left(\frac{GM_{Sa}}{R_{Sa}^3} \right)^2 \int_{r=0,2R_{Sa}}^{0,55R_{Sa}} r^4 dr = \frac{4\pi \gamma (GM_{Sa})^2}{5 R_{Sa}} (0,55^5 - 0,2^5)$$

Il se trouve que : $\frac{4 \times (0,55^5 - 0,2^5)}{5} \approx \frac{1}{25}$ (erreur relative de 10^{-5}), on peut donc écrire :

$$P_{\text{diss}} \approx \frac{\pi}{25} \frac{\gamma (\text{GM}_{\text{Sa}})^2}{R_{\text{Sa}}} .$$

D'autre part le bilan thermique de Saturne s'écrit, en tenant compte de cette puissance :

$$P_{\text{diss}} + \Phi_{\text{abs}} = \Phi_{\text{émis}} \quad \text{soit} \quad P_{\text{diss}} = 4\pi R_{\text{Sa}}^2 \sigma T_{\text{Sa}}^4 - \Phi_{\text{abs}} .$$

Remarque : ces deux relations répondent à la question posée.

On en déduit la valeur de γ , la température $T_{\text{Sa}} = 130 \text{ K}$ étant connue :

$$\gamma = \frac{100 R_{\text{Sa}}^3 \sigma}{(\text{GM}_{\text{Sa}})^2} \left(T_{\text{Sa}}^4 - a \left(\frac{R_{\text{S}}}{2d_{\text{SaS}}} \right)^2 T_{\text{S}}^4 \right) = \underline{1,9.10^{-7} \text{ m}^{-3}.\text{kg.s}} .$$

Partie II-**II.A- Une réaction de dissociation de l'ammoniac**

II.A.1) $\Delta_r H^\circ(298) = -2 \times (-46,1) = 92,2 \text{ kJ.mol}^{-1}$; cette valeur étant positive, la réaction est endothermique.

II.A.2) Lorsque la température diminue, la réaction est déplacée dans le sens exothermique : dissociation moins importante de l'ammoniac.

II.A.3) $\Delta_r S^\circ(298) = -2 \times 192,5 + 191,6 + 3 \times 130,7 = 198,7 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$; cette valeur positive s'explique par le fait que la réaction de dissociation s'accompagne d'une augmentation de la quantité de gaz.

II.A.4) Dans l'approximation d'Ellingham : $\Delta_r G^\circ(T) \approx \Delta_r H^\circ(298) - T \Delta_r S^\circ(298)$ donc :

$$T_i \approx \frac{\Delta_r H^\circ(298)}{\Delta_r S^\circ(298)} = 464 \text{ K}$$

Pour $T > T_i$, $\Delta_r G^\circ(T) < 0$ donc la réaction de dissociation est favorisée dans les conditions standard, pour

$T < T_i$ c'est l'inverse.

II.A.5) a) Bilan de matière :

	NH_3	N_2	H_2	Total des gaz
Etat initial	n	0	0	n
Etat d'équilibre final	$n(1-\alpha)$	$\frac{n\alpha}{2}$	$\frac{3n\alpha}{2}$	$n(1+\alpha)$

$$Q = \frac{P_{N_2} P_{H_2}^3}{(P_{NH_3})^2 P^{\circ 2}} = \frac{\frac{\alpha}{2} \left(\frac{3\alpha}{2} \right)^3}{(1-\alpha)^2 (1+\alpha)^2} \left(\frac{P}{P^\circ} \right)^2 = \frac{27\alpha^4}{16(1-\alpha^2)^2} \left(\frac{P}{P^\circ} \right)^2$$

Quotient réactionnel dans l'état final :

$$\text{Loi de Guldberg et Waage : } \frac{27\alpha^4}{16(1-\alpha^2)^2} \left(\frac{P}{P^\circ} \right)^2 = K^\circ \Rightarrow \alpha = \sqrt{\frac{\frac{4}{3\sqrt{3}} \frac{P^\circ}{P} \sqrt{K^\circ}}{1 + \frac{4}{3\sqrt{3}} \frac{P^\circ}{P} \sqrt{K^\circ}}}$$

$$K^\circ(298) = \exp\left(\frac{-\Delta_r H^\circ(298) + 298 \times \Delta_r S^\circ(298)}{R \times 298}\right) = 1,65 \cdot 10^{-6} \quad \text{et} \quad \alpha_{298} = 3,1 \cdot 10^{-2}$$

Pour $T = 500 \text{ K}$, il faut calculer :

$$\Delta_r C_p^\circ = -2 \times 32,8 + 29,1 + 3 \times 28,8 = 49,9 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1},$$

$$\Delta_r H^\circ(500) = 92,2 \cdot 10^3 + 49,9 \times (500 - 298) = 102,3 \text{ kJ.mol}^{-1},$$

$$\Delta_r S^\circ(500) = 198,7 + 49,9 \ln \frac{500}{298} = 224,5 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1},$$

$$\Delta_r G^\circ(500) = 102,3 \cdot 10^3 - 500 \times 224,5 = -9,95 \text{ kJ.mol}^{-1}, \quad K^\circ(500) = \exp\left(\frac{9,95 \cdot 10^3}{8,314 \times 500}\right) = 11 \quad \text{et}$$

$$\alpha_{500} = 0,85$$

Le refroidissement de l'atmosphère préserve l'ammoniac de la dissociation.

II.A.6) D'après la formule de la question II.A.5.a) α décroît si la pression augmente. Ceci est accord avec les lois générales du déplacement de l'équilibre : un abaissement de la pression favorise la dissociation parce qu'elle s'accompagne d'une augmentation de la quantité de gaz. C'est donc une diminution de pression qui peut expliquer la dissociation de l'ammoniac.

II.B- Dissociation photocatalysée par l'acétylène

II.B.1) La formule $k(T)$ correspond à la loi d'Arrhénius avec $E_a = 250 \times R = 2,08 \text{ kJ.mol}^{-1}$.

II.B.2) Le bilan de ce mécanisme est : $\text{CH}_4 = \text{H}_3\text{C}^\bullet + \text{H}^\bullet$.

II.B.3)a) $v_{\text{dis}} = -\frac{d[\text{CH}_4]}{dt} = k[\text{HC}_2^\bullet][\text{CH}_4]$. Or, d'après l'énoncé : $[\text{C}_2\text{H}_2] = \text{constante}$ soit

$$0 = \frac{d[\text{C}_2\text{H}_2]}{dt} = -k_0[\text{C}_2\text{H}_2] + k[\text{HC}_2^\bullet][\text{CH}_4]$$

Il vient : $v_{\text{dis}} = k_0[\text{C}_2\text{H}_2]$.

b) $[\text{C}_2\text{H}_2] = \text{constante} = \frac{n_{\text{C}_2\text{H}_2}}{V} = \frac{P_{\text{C}_2\text{H}_2}}{RT} = \frac{x_{\text{C}_2\text{H}_2} P_t}{RT} = \frac{2.10^{-6} \times 50}{8,314 \times 175} = 6,87.10^{-8} \text{ mol.L}^{-1}$. On calcule de même la

concentration initiale en méthane : $[\text{CH}_4]_0 = \frac{x_{\text{CH}_4} P_t}{RT} = \frac{3.10^{-2} \times 50}{8,314 \times 175} = 1,03.10^{-4} \text{ mol.L}^{-1}$.

Ainsi : $v_{\text{diss}} = \text{constante} = 3,2.10^{-11} \times 6,87.10^{-8} = 2,2.10^{-18} \text{ mol.L}^{-1}.\text{s}^{-1}$. Par intégration on en déduit :

$$[\text{CH}_4] = [\text{CH}_4]_0 - v_{\text{diss}} t$$

Le méthane disparaît au bout du temps :

$$t_1 = \frac{[\text{CH}_4]_0}{v_{\text{dis}}} = 4,7.10^{13} \text{ s} = 1,5.10^6 \text{ années}$$

II.C- Dissociation directe du méthane

II.C.1) En notant v_i la vitesse de l'étape i , nous avons : $v_{\text{dis}} = v_1 + v_2 + v_3 = (k_1 + k_2 + k_3)[\text{CH}_4]$.

II.C.2) $\frac{d[\text{CH}_4]}{dt} = -v_{\text{dis}} = -(k_1 + k_2 + k_3)[\text{CH}_4]$, équation différentielle dont la solution est :

$$[\text{CH}_4] = [\text{CH}_4]_0 \exp(-(k_1 + k_2 + k_3)t)$$

II.C.3) $[\text{CH}_4] = [\text{CH}_4]_0 \left(1 - \frac{99,9}{100}\right) = \frac{[\text{CH}_4]_0}{1000}$ à l'instant $t_2 = \frac{\ln(1000)}{k_1 + k_2 + k_3} = 1,4.10^{11} \text{ s} \approx 4600 \text{ ans}$.

II.C.4) Les durées t_1 et t_2 sont toutes les deux très inférieures à l'âge de Titan : il ne peut rester du méthane dans l'atmosphère de Titan que s'il y a une source de méthane sur Titan. Une source possible est évoquée dans l'introduction de l'énoncé du II.D.

II.D- Etude de l'eau solide

II.D.1) $\text{H}-\ddot{\text{O}}-\text{H}$; dans cette molécule le type VSEPR de l'oxygène est AX_2E_2 , la molécule est donc coudée avec un angle $\angle \text{HOH}$ proche de 109° mais inférieur car les doublets non liants sont plus encombrants que les doublets liants.

II.D.2) Les sites tétraédriques sont les centres des 8 petites cubes de côté $\frac{a}{2}$ composant la maille cubique de côté a .

II.D.3) Voir figure ci-contre.

II.D.4) La maille cubique de côté a comporte

$$8 \times \frac{1}{8} + 6 \times \frac{1}{2} + 4 \times 1 = 8$$

$\boxed{\times}$ 8 $\boxed{\times}$ 2 sites tétraédriques
 sommets centres des faces

atomes d'oxygène donc

$$N_{H_2O} = 8 \text{ molécules d'eau.}$$

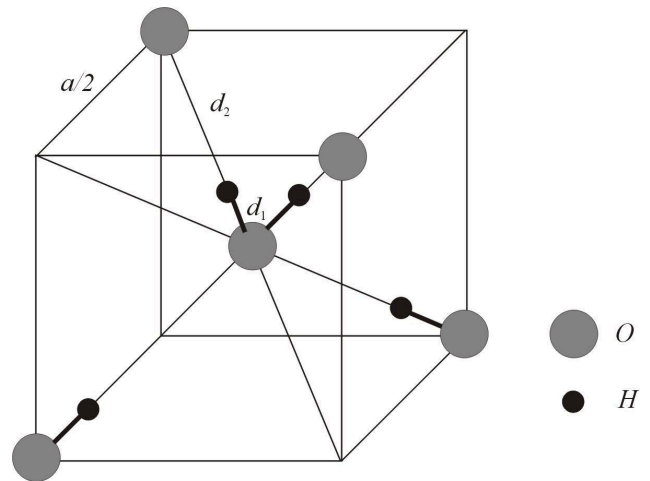
II.D.5) D'après le schéma on a :
est la moitié de la grande diagonale du petit cube),

$$d_2 = \frac{a\sqrt{3}}{4} - d_1 = 176 \text{ pm}$$

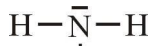
soit :

$$\rho_{\text{glace}} = \frac{N_{H_2O} \times M_{H_2O}}{N_A a^3} = 925 \text{ kg.m}^{-3}$$

II.D.6)



II.E- Les océans eau-ammoniac de Titan



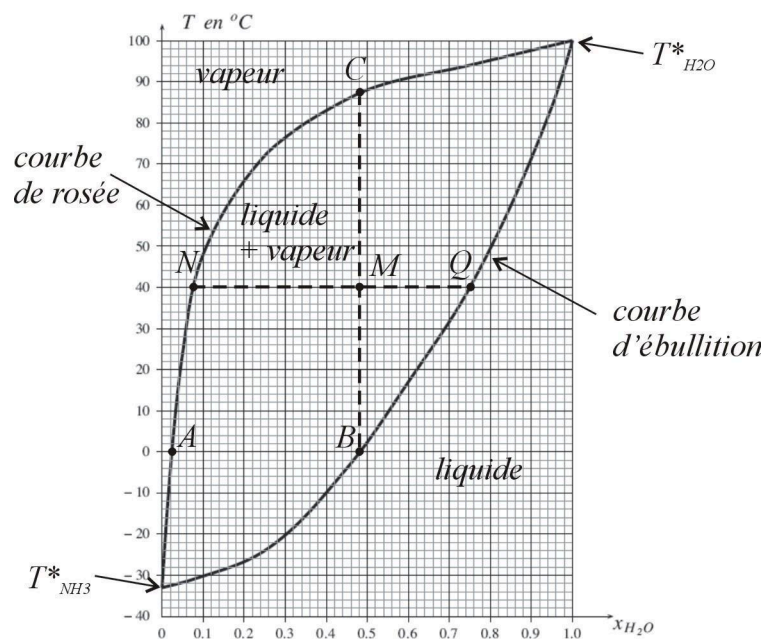
II.E.1) ; dans cette molécule le type VSEPR de l'azote est AX_3E_1 , la molécule est donc pyramidale avec un angle $\angle \text{HNH}$ proche de 109° mais légèrement inférieur car le doublet non liant est plus encombrant qu'un doublet liant.

II.E.2) L'ammoniac est un ampholyte, c'est-à-dire à la fois un acide et une base :

- NH_3 est l'acide du couple NH_3 / NH_2^- : $NH_3 = NH_2^- + H^+$,
- NH_3 est la base du couple NH_4^+ / NH_3 : $NH_4^+ = NH_3 + H^+$.

II.E.3) La réaction de NH_3 en tant qu'acide sur NH_3 en tant que base s'écrit : $2NH_3 = NH_4^+ + NH_2^-$.

II.E.4) a)



Les températures d'ébullition de H_2O et NH_3 sous 1 bar sont : $T_{H_2O}^* = 100^\circ\text{C}$ et $T_{NH_3}^* = -33^\circ\text{C}$

b) Les compositions molaires des deux phases en équilibre à 0°C sont :

- phase liquide : $x_{H_2O}(l) = 0,48$ (abscisse du point B) et $x_{NH_3}(l) = 0,52$;
- phase vapeur : $x_{H_2O}(v) = 0,02$ (abscisse du point A) et $x_{NH_3}(v) = 0,98$.

$$n_{H_2O} = \frac{1000}{M_{H_2O}} = 55,6 \text{ mol}$$

c) La quantité d'eau de l'échantillon est ; la quantité d'ammoniac nécessaire est

$$n_{NH_3} = n_{H_2O} \frac{x_{NH_3}}{x_{H_2O}} = 55,6 \frac{0,52}{0,48} = 60,2 \text{ mol}$$

; le volume d'ammoniac qu'il faut dissoudre dans 1L d'eau est

$$\text{donc : } V_S = n_{NH_3} \frac{RT}{P} = 60,2 \frac{8,314 \times 293}{10^5} = 1,46 \text{ m}^3$$

Ce volume est très important ; la forte solubilité de l'ammoniac dans l'eau s'explique par le fait que les deux molécules sont polaires et ont des interactions attractives importantes.

d) Les compositions des deux phases en équilibre à 40°C sont :

- phase liquide : $x_{H_2O}(l) = 0,75$ (abscisse du point Q) et $x_{NH_3}(l) = 0,25$;
- phase vapeur : $x_{H_2O}(v) = 0,08$ (abscisse du point N) et $x_{NH_3}(v) = 0,92$.

Les quantités $n(l)$ de liquide et $n(v)$ de vapeur vérifient les deux équations suivantes :

- conservation de la matière : $n(l) + n(v) = 55,6 + 60,2 = 115,8 \text{ mol}$,
- théorème des moments chimiques :

$$n(l) \times MQ = n(v) \times MN \quad \text{soit} \quad n(l) \times (0,75 - 0,48) = n(v) \times (0,48 - 0,08)$$

Il vient, après résolution : $n(v) = 46,7 \text{ mol}$ et $n(l) = 69,1 \text{ mol}$.

Enfin, les masses $m(l)$ de liquide et $m(v)$ de vapeur sont :

$$m(l) = M(l)n(l) = (x_{H_2O}(l)M_{H_2O} + x_{NH_3}(l)M_{NH_3})n(l) = 1227 \text{ g}$$

$$\text{et } m(v) = M(v)n(v) = (x_{H_2O}(v)M_{H_2O} + x_{NH_3}(v)M_{NH_3})n(v) = 798 \text{ g}$$

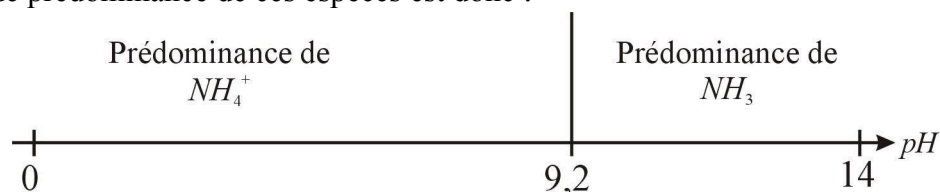
e) L'échantillon est entièrement vaporisé à 87°C (ordonnée du point C).

II.E.5) a) En appliquant la loi de Guldberg et Waage aux deux équilibres acido-basiques de NH_3 il vient :

$$\begin{aligned} - \frac{[NH_3][H^+]}{[NH_4^+]} &= 10^{-9,2} \quad \text{soit} \quad \log \frac{[NH_3]}{[NH_4^+]} = pH - 9,2 \quad \text{donc } NH_3 \text{ prédomine sur } NH_4^+ \text{ pour } \\ pH &> 9,2 ; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} - \frac{[NH_2^-][H^+]}{[NH_3]} &= 10^{-23} \quad \text{soit} \quad \log \frac{[NH_2^-]}{[NH_3]} = pH - 23 \quad \text{donc } NH_2^- \text{ prédomine sur } NH_3 \text{ pour } pH > 23 . \end{aligned}$$

Le diagramme de prédominance de ces espèces est donc :



b) NH_2^- est instable dans l'eau car elle réagit avec l'eau selon : $H_2O + NH_2^- = HO^- + NH_3$.

c) Réaction prépondérante : $NH_3 + H_2O = NH_4^+ + HO^-$ de constante d'équilibre :

$$K^\circ = \frac{[NH_4^+][HO^-]}{[NH_3]} = \frac{[NH_4^+]}{[NH_3][H^+]} \times [H^+][HO^-] = \frac{1}{10^{-9,2}} \times 10^{-14} = 10^{-4,8}$$

d) Si la réaction est peu avancée : $[NH_3] \approx c_0 = 0,1 \text{ mol.L}^{-1}$. De plus, d'après le bilan de la réaction prépondérante : $[NH_4^+] = [HO^-]$. Il vient :

$$K^\circ = \frac{[HO^-]^2}{c_0} \quad \text{soit} \quad [HO^-] = \sqrt{K^\circ c_0} = 10^{-2,9}$$

$$[H^+] = \frac{K_e}{[HO^-]} = 10^{-11,1} \quad \text{et} \quad pH = 11,1$$

Ce pH est inférieur à 12 : des formes de vies auraient pu survivre dans la zone océanique de Titan.

Partie III – Les anneaux de Saturne

III.A- Circularisation de la trajectoire

$$E_c = E_c^* + \frac{1}{2} M v_G^2$$

III.A.1) D'après le théorème de Koenig, l'énergie cinétique du nuage est :

G étant repéré par ses coordonnées polaires (r, θ) , $v_G = \dot{r}u_r + r\dot{\theta}u_\theta$ (avec les notations habituelles) ; il

en découle : $L_{Oorb} = OG \wedge M v_G = M r^2 \dot{\theta} u_z$. Ainsi : $v_G^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 = \dot{r}^2 + \frac{L_{Oorb}^2}{M^2 r^2}$ et :

$$E_c = E_c^* + \frac{1}{2} M \dot{r}^2 + \frac{L_{Oorb}^2}{2 M r^2}$$

Dans l'hypothèse où l'extension du nuage est très inférieure à r , on peut calculer son énergie potentielle

gravitationnelle en faisant comme si toute la masse était concentrée en G : $E_p \approx -\frac{GM_{Sa}M}{r}$.
Finalement :

$$E_m = E_c + E_p = E_c^* + \frac{1}{2} M \dot{r}^2 + \frac{L_{Oorb}^2}{2 M r^2} - \frac{GM_{Sa}M}{r}$$

$$r = \frac{\frac{L_{Oorb}^2}{GM_{Sa}M^2}}{1 + e \cos(\theta - \theta_0)}$$

III.A.2) Sachant que

$$r = \frac{dr}{d\theta} \theta = \frac{L_{Oorb}^2}{GM_{Sa}M^2} \frac{e \sin(\theta - \theta_0)}{(1 + e \cos(\theta - \theta_0))^2} \frac{L_{Oorb}}{Mr^2} = \frac{e GM_{Sa}M}{L_{Oorb}} \sin(\theta - \theta_0)$$

Il vient donc :

$$E_m = E_c^* + \frac{1}{2} M \left(\frac{e GM_{Sa}M}{L_{Oorb}} \sin(\theta - \theta_0) \right)^2 + \frac{L_{Oorb}^2}{2 M \left(\frac{L_{Oorb}^2}{GM_{Sa}M^2} \right)^2} (1 + e \cos(\theta - \theta_0))^2 - \frac{GM_{Sa}M}{\frac{L_{Oorb}^2}{GM_{Sa}M^2}} (1 + e \cos(\theta - \theta_0))$$

$$= E_c^* + \frac{1}{2} \frac{G^2 M_{Sa}^2 M^3}{L_{Oorb}^2} \left(e^2 \sin^2(\theta - \theta_0) + (1 + e \cos(\theta - \theta_0))^2 - 2(1 + e \cos(\theta - \theta_0)) \right)$$

$$E_m = E_c^* + \frac{1}{2} \frac{G^2 M_{Sa}^2 M^3}{L_{Oorb}^2} (e^2 - 1)$$

soit :

III.A.3) Le système « saturne+nuage » étant isolé, son énergie mécanique est constante. Si E_c^* augmente, e^2 doit diminuer, donc se rapprocher de 0 : la trajectoire se circularise.

III.B- Localisation équatoriale

III.B.1) Si l'on raisonne dans le référentiel de Saturne, la force d'inertie d'entraînement, est la cause de l'aplatissement des pôles.

III.B.2) Le champ gravitationnel créé par la superposition de différentes distributions de masse est la somme des champ gravitationnels créés par chacune de ces distribution prise seule. La distribution modèle est évidemment la superposition des trois distributions proposées.

III.B.3)a) D'après le théorème de Gauss, le champ et le potentiel gravitationnels créés par une sphère portant une répartition de masse à symétrie sphérique sont égaux, en tout point extérieur à cette sphère, aux champ et potentiel gravitationnels créés par une masse ponctuelle placée au centre de la sphère, égale à la masse totale de la sphère. Ainsi, en utilisant le théorème de superposition on trouve :

$$V(r, \alpha) = -\frac{GM_0}{r} + \frac{Gm}{r_A} + \frac{Gm}{r_B} = -\frac{GM_0}{r} + Gm \left(\frac{1}{(r^2 + b^2 - 2rb \sin(\alpha))^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{(r^2 + b^2 + 2rb \sin(\alpha))^{\frac{1}{2}}} \right)$$

b) On suppose $b < R_{Sa} \ll r$. Alors, en faisant un développement limité au 2^{ème} ordre en $\frac{b}{r} \ll 1$:

$$\frac{1}{(r^2 + b^2 \pm 2rb \sin(\alpha))^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{r} \frac{1}{\left(1 + \frac{b^2}{r^2} \pm 2\frac{b}{r} \sin(\alpha)\right)^{\frac{1}{2}}} \approx \frac{1}{r} \left(1 - \frac{1}{2} \left(\frac{b^2}{r^2} \pm 2\frac{b}{r} \sin(\alpha)\right) + \frac{3}{8} \left(\frac{b^2}{r^2} \pm 2\frac{b}{r} \sin(\alpha)\right)^2\right)$$

$$\approx \frac{1}{r} \left(1 \pm \frac{b}{r} \sin(\alpha) + \frac{b^2}{r^2} \frac{3 \sin^2(\alpha) - 1}{2}\right)$$

et : $V(r, \alpha) \approx -\frac{GM_{Sa}}{r} \left(1 - \frac{2m}{M_{Sa}} \frac{b^2}{r^2} \frac{3 \sin^2(\alpha) - 1}{2}\right)$, expression de la forme attendue avec $J_2 = \frac{2mb^2}{M_{Sa} R_{Sa}^2}$.

c) Application numérique : $m = M_{Sa} \frac{b^3}{R_{Sa}^3}$ donc $J_2 = 2 \left(\frac{b}{R_{Sa}}\right)^5$. On donne $\frac{b}{R_{Sa}} = \frac{100}{111}$, donc $J_2 = 1,19$.

III.B.4) En adaptant le résultat de II.A.1) on a : $E_m = E_c + E_p = E_c^* + \frac{L_{Oorb}^2}{2Mr^2} + MV(r, \alpha)$

III.B.5) L'énergie mécanique est constante : si E_c^* augmente, $E_{p,eff} = \frac{L_{Oorb}^2}{2Mr^2} + MV(r, \alpha)$ diminue.

Pour une trajectoire circulaire, le rayon r est tel que $E_{p,eff}$ est minimal. $E_{p,eff}$ ne peut donc diminuer

que si α varie. Or pour α compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3 \sin^2 \alpha - 1}{2}$ est minimum en $\alpha = 0$, et $V(r, \alpha)$ aussi. Ainsi, α diminue : la trajectoire se rapproche du plan équatorial.

III.C. Etalement du nuage

III.C.1) Appliquons le principe fondamental de la dynamique à une portion d'anneau de masse dM assimilable à une masse ponctuelle en mouvement circulaire uniforme de rayon r_0 autour de Saturne. L'anneau étant fait de petites particules, la seule force non négligeable agissant sur dM est l'attraction gravitationnelle de Saturne. En projection sur le vecteur radial u_r on a :

$$dM \frac{v^2}{r_0} = \frac{GM_{Sa} dM}{r_0^2} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{GM_{Sa}}{r_0}}$$

où v est la vitesse. Le moment cinétique par rapport à O de cette portion d'anneau est :

$$dL_{Oorb} = (r_0 u_r) \wedge (dM v u_\theta) = dM r_0 v u_z = dM \sqrt{GM_{Sa} r_0} u_z. \text{ Ainsi : } L_{Oorb} = \int dL_{Oorb} = M r_0 v u_z \text{ d'où}$$

$$L_{Oorb} = M \sqrt{GM_{Sa} r_0}$$

L'énergie mécanique de la portion d'anneau et : $dE_m = \frac{1}{2} dM v^2 - \frac{GM_{Sa} dM}{r_0} = -\frac{GM_{Sa} dM}{2r_0}$. L'énergie

mécanique de l'anneau est donc : $E_m = -\frac{GM_{Sa} M}{2r_0}$.

$$v(r) = \sqrt{\frac{GM_{Sa}}{r}}$$

III.C.2) D'après la question précédente :

Considérons une portion d'anneau comprise entre r et $r+dr$, et entre θ et $\theta+d\theta$, de masse

$$dM = \sigma dS = \sigma r dr d\theta \quad \text{avec} \quad \sigma = \frac{M}{\pi(r_2^2 - r_1^2)} :$$

- son moment cinétique est : $dL_{Oorb} = dM r v(r) u_z = \sigma \sqrt{GM_{Sa}} r^{\frac{3}{2}} dr d\theta u_z$,

- son énergie mécanique est : $dE_m = -\frac{GM_{Sa} dM}{2r} = -\frac{GM_{Sa} \sigma}{2} dr d\theta$.

On en déduit, pour l'anneau entier :

$$L_{Oorb} = \sigma \sqrt{GM_{Sa}} \int_{r=r_1}^{r_2} \int_{\theta=0}^{2\pi} r^{\frac{3}{2}} dr d\theta u_z = \frac{4\pi}{5} \sigma \sqrt{GM_{Sa}} \left(r_2^{\frac{5}{2}} - r_1^{\frac{5}{2}} \right) u_z \quad \text{soit} \quad L'_O = \frac{4}{5} M \sqrt{GM_{Sa}} \frac{r_2^{\frac{5}{2}} - r_1^{\frac{5}{2}}}{r_2^2 - r_1^2},$$

$$E_m = -\frac{GM_{Sa} \sigma}{2} \int_{r=r_1}^{r_2} \int_{\theta=0}^{2\pi} dr d\theta = -\pi GM_{Sa} \sigma (r_2 - r_1) \quad \text{soit} \quad E'_m = -\frac{GM_{Sa} M}{r_2 + r_1}.$$

III.C.3)a) La conservation du moment cinétique impose la condition :

$$\frac{4}{5} \frac{r_2^{\frac{5}{2}} - r_1^{\frac{5}{2}}}{r_2^2 - r_1^2} = \sqrt{r_0} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{r_1}{r_0} = f(X) \quad \text{avec} \quad f(X) = \frac{25}{16} \left(\frac{X^2 - 1}{X^{\frac{5}{2}} - 1} \right)^2.$$

$$\frac{\Delta E_m}{E_m} = \frac{E'_m - E_m}{E_m} = \frac{-\frac{1}{r_1 + r_2} + \frac{1}{2r_0}}{\frac{1}{2r_0}} = 1 - \frac{2r_0}{r_1 + r_2} = 1 - \frac{2}{\left(\frac{r_1}{r_2} + 1 \right) \frac{r_2}{r_0}}.$$

b)
En utilisant le graphe fournit on remplit les 3 premières lignes du tableau ci-dessous, et la 4^{ème} en appliquant la formule ci-dessus :

$\frac{r_1}{r_2}$	1	0,8	0,6	0,5
$\frac{r_1}{r_0}$	1	0,88	0,74	0,64
$\frac{r_2}{r_0}$	1	1,1	1,23	1,28
$\frac{\Delta E_m}{E_m}$	0	-0,010	-0,016	-0,042

c) D'après le tableau, lorsque 1% de l'énergie mécanique initiale a été dissipée :

$$\frac{r_2 - r_1}{r_0} = 1,1 - 0,88 = \underline{0,22}.$$