УДК 539.3

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРИ ДОСЛІДЖЕННІ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ SMART-МАТЕРІАЛІВ

Т. С. Кагадій*, О. В. Білова, А. Г. Шпорта*, О. Д. Онопрієнко*****
* Національний технічний університет «Дніпровська політехніка»,
**Український державний університет науки і технологій, ***Дніпровський державний аграрно-економічний університет

Анотація: *Активні матеріали, перш за все п'єзоелектричні і пьєзоелектромагнітні, часто використовуються в якості функціональних частин різних електронних пристроїв, включаючи датчики та перетворювачі, оскільки ці матеріали здатні змінювати свою форму під дією електричного або магнітного поля. У багатьох випадках розміри згаданих пристроїв надзвичайно малі, але тим не менше вони можуть піддаватися впливу дуже великих механічних, електричних і магнітних полів. Крім того, ці пристрої зазвичай складаються з елементів, що можуть бути виготовлені з різних матеріалів (п'єзоелектричні або пьєзоелектромагнітні елементи, електроди тощо). Дослідження поведінки конструкцій, виготовлених з таких матеріалів, виявляє суттєві математичні труднощі під час відповідних розрахунків. Необхідність у вирішенні цих питань, яка проявилася на практиці, зумовила важливість розробки методів розрахунку контактних взаємодій, а також дослідження контактних задач з урахуванням п'єзоелектричної і п'єзоелектромагнітної складової.*

Проведено узагальнення методу малого параметру на двовимірні задачі електропружності. Перевагою запропонованого узагальненого методу збурень є те, що він дозволяє звести розв'язання складних задач теорії електропружності до послідовного розв'язання більш простих крайових задач (інтегрування рівнянь Лапласа, у складніших випадках – рівняння Пуассона).

Доведено, що в усіх випадках вихідної постановки можуть бути сформульовані крайові умови для основних функцій. Механічні та електричні складові можуть бути відокремлені, але мають взаємний вплив через крайові умови. Розв'язок знаходиться як суперпозиція розв'язків для кожного напруженого стану.

Ключові слова: *п'єзоелектрики, асимптотичний розв'язок, метод збурень.*

MATHEMATICAL MODELING IN THE STUDY OF THE STRESS-STRAIN STATE OF SMART-MATERIALS

T. S. Kagadiy*, O. V. Belova, A. G. Shporta*, O. D. Onopriienko*****
*Dnipro University of Technology, **Ukrainian State University of Science and Technologies, ***Dnipro State Agrarian and Economic University

Abstract: *Active materials, primarily piezoelectric and piezoelectromagnetic, are often used as functional parts of various electronic devices, including sensors and transducers, because these materials are able to change their shape under the action of electric or magnetic fields. In many cases, the size of these devices is extremely small, but they can still be exposed to very large mechanical, electric and magnetic fields. In addition, these devices usually consist of elements that can be made of different materials (piezoelectric or piezoelectromagnetic elements, electrodes, etc.). The study of such materials' structural behavior reveals significant mathematical difficulties in the relevant calculations. The need to address these issues, which manifested itself in practice, led to* *the importance of developing methods for calculating contact interactions, as well as the study of contact problems with account of the piezoelectric and piezoelectromagnetic component.*

The generalization of the small parameter method to two-dimensional problems of electric elasticity is carried out. The advantage of the proposed generalized perturbation method is that it reduces the solution of complex problems of the electric elasticity theory to the sequential solution of simpler boundary value problems (integration of Laplace equations, in more complex cases Poisson equations).

It is proved that in all cases of the initial statement the boundary conditions for the main functions can be formulated. Mechanical and electrical components can be separated, but have a mutual influence through the boundary conditions. The solution can be presented as the superposition of the solutions for each stress state.

***Keywords:** piezoelectrics, asymptotic analysis, perturbation method.*

Сучасні технічні розробки, нові вимоги до механізмів та конструкцій [1] призвели до широкого застосування SMART-матеріалів, до яких, зокрема, відносяться і п’єзоелектрики. У суднобудуванні такі матеріали застосовують, наприклад, в датчиках тиску. Вони дозволяють вимірювати рівні заповнення резервуарів питною та морською водою, паливних баків, а також контролювати роботу насосних та компресорних установок, пневматичних систем керування, тиск мастила в паливній системі. Завдяки використанню п’єзоелектриків, такі датчики можуть використовуватись з хімічними агресивними та в’язкими середовищами. П’єзоелектричні датчики використовують також для контролю осаду при завантаженні судна, вимірюванні рівня наповнення відкритих відсіків та ін. Складна поведінка таких матеріалів викликає інтерес спеціалістів різних галузей, результати досліджень є сучасними та актуальними [2].

Метою даної роботи є узагальнення методу збурень [3] на випадок електропружних [4] матеріалів та створення математичних моделей відповідних контактних задач.

Нехай через кожну точку однорідної анізотропної пластини проходять дві взаємно перпендикулярні площини пружної симетрії. Припускаючи, що ці площини перпендикулярні відповідно декартовим координатним осям x, y отримаємо наступні рівняння рівноваги, електростатики, електропружного стану і співвідношень Коші:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0; \tag{1}$$

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial Э_x}{\partial y} - \frac{\partial Э_y}{\partial x} = 0; \tag{2}$$

$$e_x = s_{11}^D \sigma_x + s_{12}^D \sigma_y + g_{11}^{\sigma_0} D_x;$$

$$e_y = s_{21}^D \sigma_x + s_{22}^D \sigma_y + g_{12}^{\sigma_0} D_x;$$

$$\gamma_{xy} = s_{66}^D \tau_{xy} + g_{26}^{\sigma,D} D_y;$$

$$Э_x = -g_{11}^{\sigma,D}\sigma_x - g_{12}^{\sigma,D}\sigma_y + \beta_{11}^{\sigma}D_x; \quad Э_y = -g_{26}^{\sigma,D}\tau_{xy} + \beta_{22}^{\sigma}D_y; \tag{3}$$

$$e_x = \frac{\partial U}{\partial x}; \quad e_y = \frac{\partial V}{\partial y}; \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x}. \tag{4}$$

З першого рівняння системи (2) випливає, що існує деяка скалярна функція $\phi = \phi(x, y)$, така, що

$$D_1 = D_x = \frac{\partial \phi}{\partial y};$$

$$D_2 = D_y = -\frac{\partial \phi}{\partial x}.$$

Розв'язання тієї чи іншої крайової задачі може бути зведено до інтегрування системи рівнянь

$$\begin{gathered} U_{xx} + \varepsilon U_{yy} + \varepsilon m V_{xy} - \left(a_{11} - \varepsilon a_{26}\right)\phi_{xy} = 0; \\ \varepsilon V_{xx} + qV_{yy} + \varepsilon m U_{xy} + \varepsilon a_{26}\phi_{xx} - q a_{12}\phi_{yy} = 0; \\ -\left(a_{11} - \varepsilon a_{26}\right)U_{xy} + \varepsilon a_{26}V_{xx} - q a_{12}V_{yy} + \\ + \varepsilon b_{22}\phi_{xx} + b_{11}\phi_{yy} = 0; \end{gathered} \tag{5}$$

$$\varepsilon = \frac{G}{B_1}; \quad q = \frac{B_2}{B_1}; \quad m = 1 + \frac{\nu_2 B_1}{G} = 1 + \frac{\nu_1 B_2}{G};$$

$$a_{11} = g_{11}^{\sigma,D} + \nu_2 g_{12}^{\sigma,D};$$

$$a_{26} = g_{26}^{\sigma,D}; \quad a_{12} = g_{12}^{\sigma,D} + \nu_1 g_{11}^{\sigma,D};$$

$$b_{22} = a_{26}^2 + \beta_{22}^{\sigma}\frac{\sigma}{G};$$

$$b_{11} = g_{11}^{\sigma,D}a_{11} + g_{12}^{\sigma,D}a_{12}\frac{B_2}{B_1} + \beta_{11}^{\sigma}\frac{\sigma}{B_1},$$

при відповідних граничних умовах.

Компоненти тензора напружень і вектору напруженості в цьому випадку записуються наступним чином:

$$\sigma_1 = B_1\left(U_x + \nu_2 V_y - a_{11}\phi_y\right);$$

$$\sigma_2 = B_2\left(\nu_1 U_x + V_y - a_{12}\phi_y\right);$$

$$\tau = G\left(U_y + V_x + a_{26}\phi_x\right);$$

$$Э_1 = -B_1 a_{11} U_x - B_2 a_{12} V_y + B_1 b_{11}\phi_y; \tag{6}$$

$$Э_2 = -Ga_{26}U_y - Ga_{26}V_x + Gb_{22}\phi_x.$$

У реальних ортотропних матеріалах величина $\varepsilon = \dfrac{G}{B_1}$ завжди значно менша за одиницю. Величину ε можна розглядати як малий параметр при асимптотичному інтегруванні системи (5). Таке припущення можна зробити тому, що відношення $q = \dfrac{B_2}{B_1}$ може бути різним ($q \le 1$ або $q \ge 1$), але завжди залишається більше за ε. Тому значення q в подальшому будемо вважати порядку одиниці.

Щоб урахувати усі можливі відмінності між величинами шуканих функцій та їх швидкостями зміни вздовж координат x, y у пружних матеріалах вводяться аффінні перетворення координат та шуканих функцій [4].

$$\xi_1 = \alpha\varepsilon^{1/2}x\,;\ \eta_1 = y\,;\ U = U^{(1)}\,;$$

$$V = \varepsilon^{3/2}V^{(1)}\,;\ \ \phi = \varepsilon^{3/2}\phi^{(1)}\,; \qquad (7)$$

$$\xi_2 = x\,;\ \eta_2 = \beta\varepsilon^{1/2}y\,;\ U = \varepsilon^{3/2}U^{(2)}\,;$$

$$V = V^{(2)}\,;\ \ \phi = \varepsilon^{2}\phi^{(2)}\,. \qquad (8)$$

З перетворень (7), (8) видно, що розв’язки системи рівнянь, отриманої з (5) після введення перетворень (7) (або (8)), відносно повільно змінюються вздовж координати *x* (або *y*) в порівнянні з аналогічними розв’язками системи, отриманої після застосування інших перетворень. При цьому в напруженому стані першого типу (повільно змінюється уздовж координати *x*; перетворення (7)) основну роль грають компонента переміщення *u*, нормальне напруження σ_1, складова дотичного напруження τ, що залежить від переміщення U. У напруженому стані другого типу (перетворення (8)) переважає переміщення V, напруження σ_2 і складова дотичного напруження τ, що залежить від компоненти переміщення *V*. Повне дотичне напруження складається з суми обох складових; через нього ж і здійснюється зв'язок між цими двома типами напружених станів. Залежно від навантаження, одне з них має характер приграничного шару.

Таким чином, при механічному навантаженні п'єзоматеріалів, коли граничні умови задаються в напружених, переміщеннях або їх комбінаціях, розв’язки відповідних крайових задач будемо представляти у вигляді суперпозиції розв’язків цих двох типів напружено-деформованого стану:

$$U = U^{(1)} + U^{(2)}\,;\ \ V = V^{(1)} + V^{(2)}\,;\ \ \phi = \phi^{(1)} + \phi^{(2)}\,.$$

Розшукуючи функції $U^{(n)}$, $V^{(n)}$, $\phi^{(n)}$ $(n=1,2)$ у вигляді ряду за степенями параметра ε, необхідно вибрати відповідні асимптотичні послідовності. Вид асимптотичної послідовності визначається структурою рівнянь (5) і порядком по ε похибки в крайових умовах, що виникає після розв'язання задачі в нульовому наближенні $(\varepsilon \to 0)$. Щоб урахувати всі можливі випадки, ці функції визначатимемо у вигляді рядів за параметром $\varepsilon^{1/2}$ (з перетворень (7), (8) видно, що рядів за меншими степенями параметра ε виникнути не може):

$$U^{(n)}=\sum_{j=0}^{\infty}\varepsilon^{j/2}U^{n,j};\quad V^{(n)}=\sum_{j=0}^{\infty}\varepsilon^{j/2}V^{n,j};\quad \phi^{(n)}=\sum_{j=0}^{\infty}\phi^{n,j},\quad (n=1,2). \qquad (9)$$

Коефіцієнти α, β також представимо у вигляді рядів по параметру $\varepsilon^{1/2}$ $\alpha=\sum_{j=0}^{\infty}\varepsilon^{j/2}\alpha_j$, $\beta=\sum_{j=0}^{\infty}\varepsilon^{j/2}\beta_j$ причому $\alpha_0=\beta_0=1$, а коефіцієнти α_j,β_j $(j=1,2,...)$ знаходяться з тих же умов, що і для пружних матеріалів, а саме: в кожному з наближень в лівій частині рівнянь для визначення основних функцій $U^{1,j}$, $V^{2,j}$ повинні залишатися оператори Лапласа цих функцій, а в правій частині відсутні компоненти вектору переміщень або їх похідні (в пружній задачі для визначення основних функцій в кожному з наближень праві частини обертаються на нуль). Допоміжні ж функції $V^{1,j}$, $U^{2,j}$, $\phi^{1,j}$, $\phi^{2,j}$ через основні виражаються простим інтегруванням.

Підставимо перетворення (7) в систему (5) і використаємо відповідні розкладання. Після розщеплення отриманої системи по параметру $\varepsilon^{1/2}$ прийдемо до нескінченної системи рівнянь щодо функцій $U^{1,j}$, $V^{1,j}$, $\phi^{1,j}$ $(j=0,1,...)$. При цьому будемо вважати, що $\alpha_{11}\sim\varepsilon\beta_{11}$, $b_{22}\sim\varepsilon^2 b_{11}$, $a_{12}\sim a_{26}\sim\varepsilon^3 b_{11}$. Наведемо ці рівняння для перших трьох наближень $(j=0,1,2)$.

При $j=0$:

$$U^{1,0}_{\xi\xi}+U^{1,0}_{\eta\eta}=0;\quad qV^{1,0}_{\eta\eta}+mU^{1,0}_{\xi\eta}=0;\quad -a_{11}U^{1,0}_{\xi\eta}+\varepsilon b_{11}\phi^{1,0}_{\eta\eta}=0;$$

При $j=1$:

$$U^{1,1}_{\xi\xi}+U^{1,1}_{\eta\eta}=0;\quad qV^{1,1}_{\eta\eta}+mU^{1,1}_{\xi\eta}=0;\quad -a_{11}U^{1,1}_{\xi\eta}+\varepsilon b_{11}\phi^{1,1}_{\eta\eta}=0; \qquad (10)$$

При $j=2$:

$$U^{1,2}_{\xi\xi} + U^{1,2}_{\eta\eta} - a_{11}\phi^{1,0}_{\xi\eta} = 0\,; \quad qV^{1,2}_{\eta\eta} + mU^{1,2}_{\xi\eta} = 0\,; \quad -a_{11}U^{1,2}_{\xi\eta} + \varepsilon b_{11}\phi^{1,2}_{\eta\eta} = 0\,.$$

Тут і далі прийнято, що диференціювання (індекси ξ, η) виконуються за тими координатами ξ_n, η_n $(n = 1,2)$, індекси яких збігаються з першими верхніми індексами функцій.

Після підстановки перетворень (9) в систему (5) з використанням відповідних розкладів і розщеплення за параметром $\varepsilon^{1/2}$ отримаємо нескінченну систему рівнянь відносно функцій $U^{2,j}$, $V^{2,j}$, $\phi^{2,j}$ $(j = 0,1,...)$, які визначають рішення другого типу.

Із системи (10) випливає, що в перших двох наближеннях $(j = 0,1)$ основні функції $U^{1,j}$ ($V^{2,j}$ для другого напруженого стану) визначаються з рівнянь Лапласа (при $q = 1$ або очевидній заміні однієї зі змінних), а допоміжні функції виражаються простим інтегруванням через основні.

У третьому наближенні $(j = 2)$ і далі для напруженого стану першого типу функції $U^{1,j}$ знаходяться з рівняння Пуассона при відомій правій частині, яка містить тільки функцію ϕ, знайдену в попередніх наближеннях. Аналогічна ситуація має місце в напруженому стані другого типу для функції $V^{2,j}$, але починаючи з четвертого наближення $(j = 3)$ і далі [5].

Аналіз граничних умов показує, що для всіх крайових задач граничні умови в нульовому наближенні ($j = 0$) напруженого стану першого типу не залежать ні від більш високих наближень, ні від рішень рівнянь напруженого стану другого типу. Тому функція $U^{1,0}$ знаходиться незалежно від інших. Потім простим інтегруванням через $U^{1,0}$ визначаються функції $V^{1,0}$, $\phi^{1,0}$. Після цього повністю визначаються граничні умови для знаходження функції $V^{2,0}$ також з рівняння Лапласа. Розв'язавши це рівняння і визначивши функції $U^{2,0}$ і $\phi^{2,0}$, отримаємо граничні умови для знаходження функції $U^{1,1}$ і так далі.

Зауважимо, що отримані вище результати повністю відповідають задачам магнітопружності, якщо виконати відповідні заміни.

Якщо відбувається лише електрична взаємодія, то компоненти вектору переміщень будуть суттєво меншими, ніж при механічному навантаженні. Припускаючи, що ці компоненти порядку ε^2, а диференціювання за координатами не змінює порядку, у нульовому наближенні ($j=0$) у вихідних змінних $x,\ y$ функція $\varphi^{Э}(x,y)$ визначається з рівняння

$$\varepsilon b_{22}\varphi^{Э}_{xx}+b_{11}\varphi^{Э}_{yy}=0 \tag{11}$$

при відповідних граничних умовах, а компоненти вектору переміщень $U^{Э}$, $V^{Э}$ через функцію $\varphi^{Э}(x,y)$ знаходяться за формулами

$$U^{Э}_{x}=a_{11}\varphi^{Э}_{y},\quad V^{Э}_{y}=a_{12}\varphi^{Э}_{y},$$

звідки

$$U^{Э}_{y}=-a_{11}k^{-2}\varphi^{Э}_{x},\quad V^{Э}_{x}=a_{12}\varphi^{Э}_{x},$$

(12)

де $k^{2}=\dfrac{b_{11}}{\varepsilon b_{22}}$.

Якщо ж урахувати, що $\varepsilon b_{22}<b_{11}$, то у рівнянні (11) у першому наближенні взагалі може залишитись лише другий доданок. Але, оскільки граничні умови для функції $\varphi^{Э}(x,y)$ можуть бути довільними, її слід знаходити з рівняння (12).

При комбінованому, механічному та електричному (або ж магнітному), навантаженні завдяки лінійності можна розглядати ці дві задачі (три види напружених станів) окремо. Повний же розв'язок представляти у вигляді суперпозиції розв'язків окремих задач.

Висновки. Узагальнення методу малого параметру поширено на двовимірні задачі електропружності. Крайові задачі теорії електропружності для плоских ортотропних тіл зводяться до послідовного розгляду задач теорії потенціалу. Показано, що при розв'язанні тієї чи іншої крайової задачі електропружності з відповідними крайовими умовами методом збурень механічні та електричні складові можуть бути відокремлені, але мають взаємний вплив через крайові умови.

ЛІТЕРАТУРА

1. Belova O. V., Kagadiy T. S., Belova J. A. The stress-stain state investigation of ship designs elements from composite materials / Збірка матеріалів II Міжнародної науково-практичної конференції кафедри СЕУ І ТЕ інституту морського флота Одеського національного морськ. універ-ту / Одеса-Стамбул квітень 2020 / Матеріали конференції. С. 114–117 / Електор. https://doi.org/10.13140/RG.2.2.19286.4000.

2. Shporta A. Asymptotic method in two-dimensional problems of electroelasticity / A. Shporta, T. Kagadiy, O. Onopriienko // Naukovyi Visnyk Natsionalnoho Hirnychoho Universytetu. – 2020. – № 1. – С. 130–134.

3. Застосування методу малого параметру при моделюванні задач теорії в΄язкопружності / Вісник Херсонського національного університету / 2(69). Ч. 3. Фах. / ISSN 2078-4481. DOI 10/35546/Реєстр. КВ 17371-6141 ПР . – Херсон, 2019. – С. 69–76.

4. Кагадий Т. С., Белова О. В., Щербина И. В. Аналитический поход к решению некоторых контактных задач / Вісник Херсонського національного університету. – Херсон, 2016. – № 3 (58). – С. 104–110.
5. Білова О. В., Кагадій Т. С., Щербина І. В. Аналитическое решение плоских задач о передаче нагрузки / Вісник Запорожського Національного Університету, серія ф.-м. науки. 2017. – № 1. – С. 168–175.

Кагадій Тетяна Станіславівна *д.фіз.-мат.н., професор кафедри прикладної математики Національного технічного університету «Дніпровська політехніка».*

Білова Оксана Вікторівна *к.ф.-м.н., доцент кафедри прикладної математики та обчислювальної техніки Українського державного університету науки і технологій, м. Дніпро.*

Шпорта Анна Григорівна *к.ф.-м.н., доцент кафедри прикладної математики Національного технічного університету «Дніпровська політехніка».*

Онопрієнко Олег Дмитрович *доктор філософії (PhD), доцент кафедри теоретичної механіки, опору матеріалів та матеріалознавства Дніпровського державного аграрно-економічного університету.*