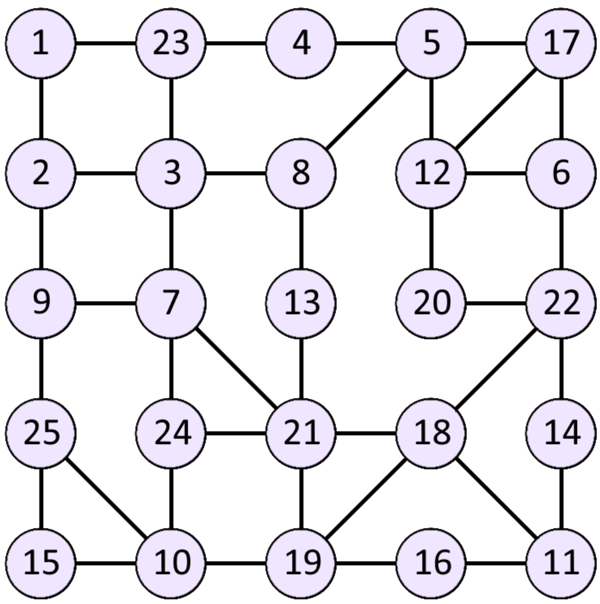
Заочный тур олимпиады по наглядной геометрии. 2023-2024 учебный год

3-4 классы

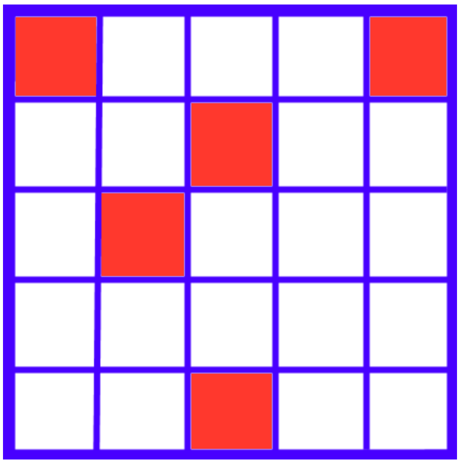
1. Отметьте 9 центров клеток прямоугольника размером 3 × 5, чтобы существовало 10 прямых, на каждой из которых расположены ровно 3 отмеченные точки.

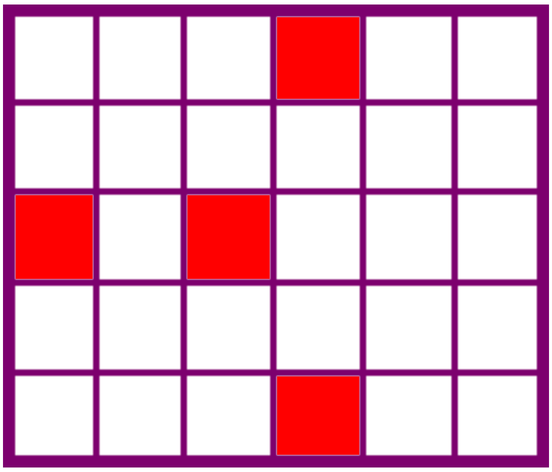
2. Расстоянием между двумя клетками шахматной доски назовём наименьшее количество ходов, которыми король может перейти из одной из этих клеток в другую, не делая диагональных ходов. Отметьте на шахматной доске клетки, находящиеся на равных расстояниях от клеток a4 и h3.

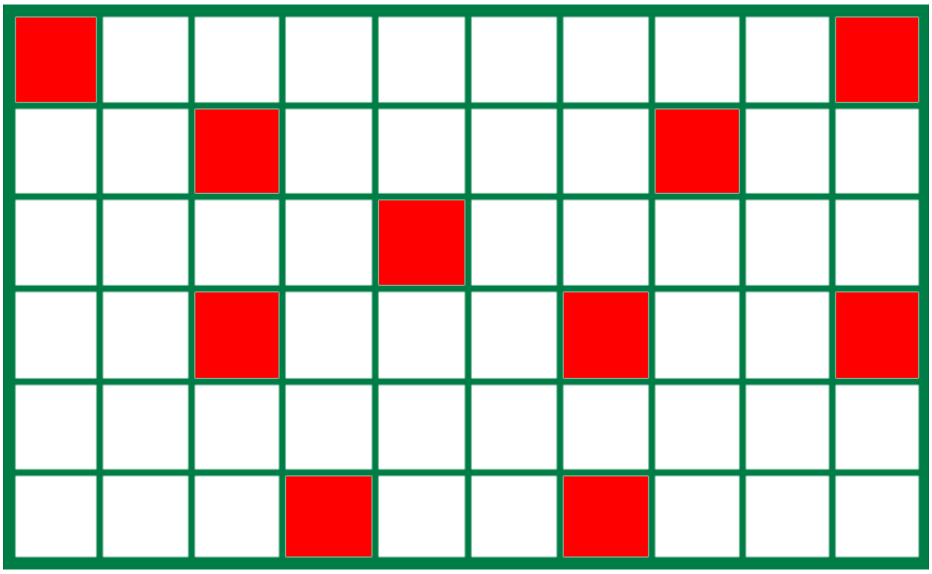
3. Выпишите числа от 1 до 25 в строку так, чтобы последовательность начиналась на числа 1 и 2, заканчивалась на число 23, а любые два соседних числа обладали тем свойством, что помеченные ими кружки на рисунке соединены отрезком.

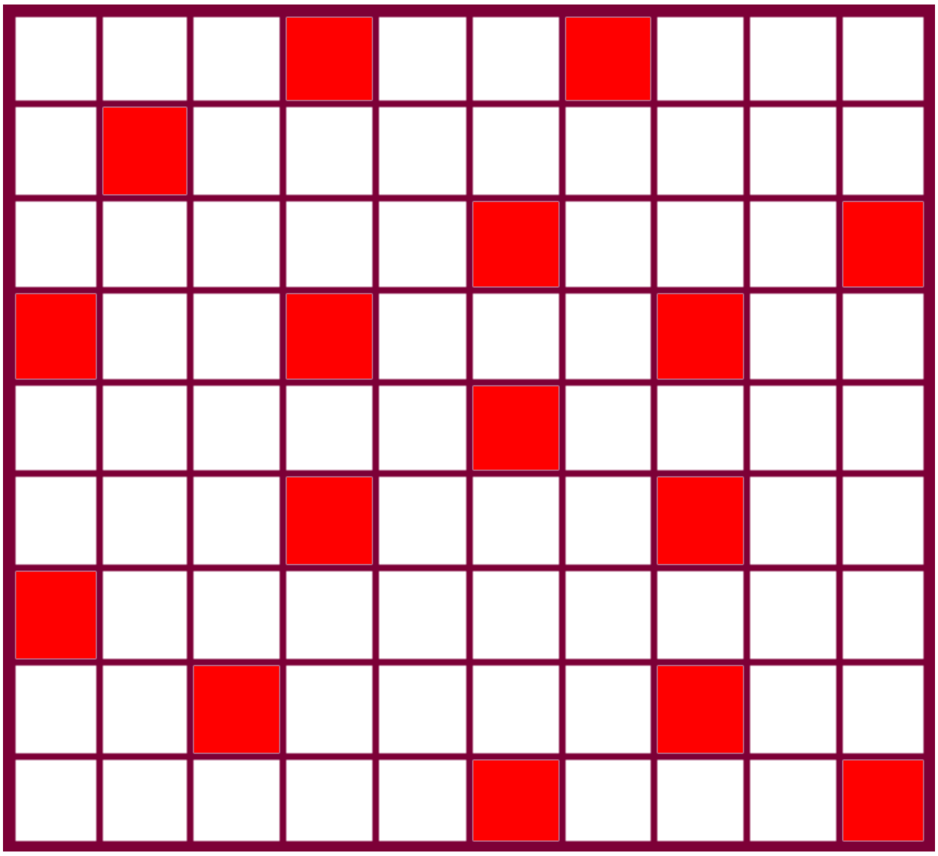


4. Некоторые клетки прямоугольников закрашены красным цветом. Это означает, что в них заходить нельзя. Нарисуйте для каждого прямоугольника замкнутый (то есть заканчивающийся в той клетке, где начался) маршрут ладьи, которая проходит по одному разу по всем незакрашенным клеткам, причём каждым ходом сдвигается в соседнюю клетку, ни через какую клетку не перепрыгивая.

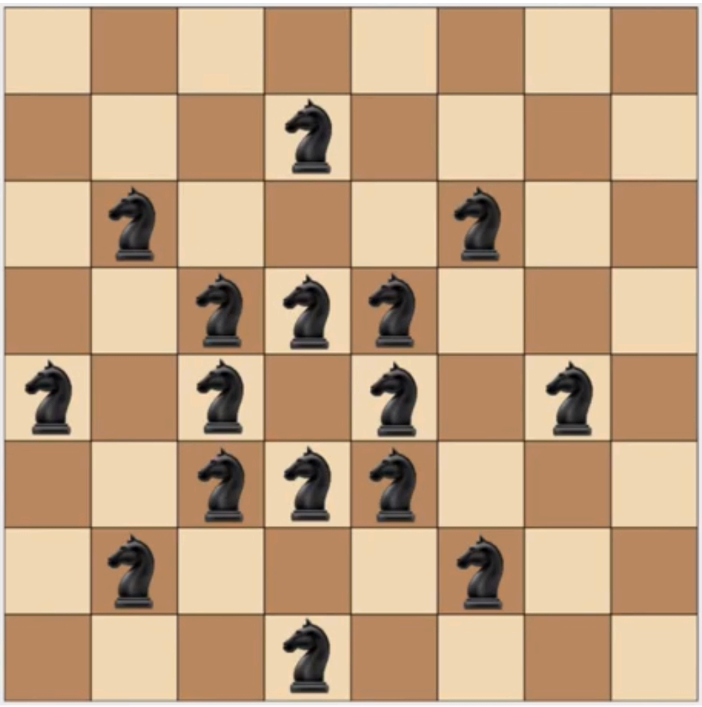
а) 

б) 

в) 

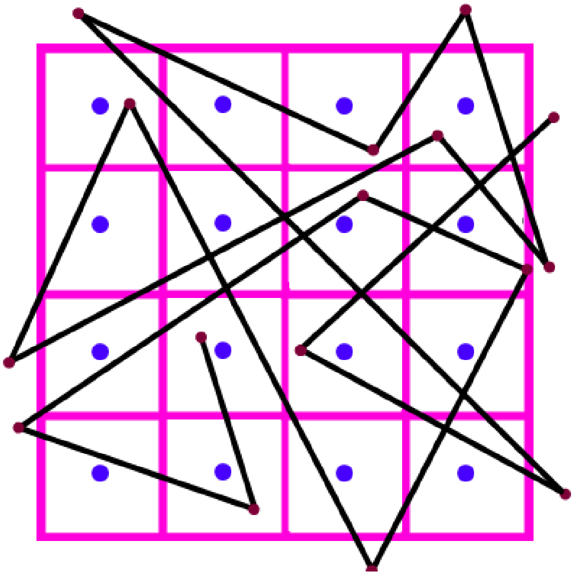
г) 

5. Можно ли раскрасить вершины куба в а) три; б) четыре цвета так, чтобы каждая вершина была соединена рёбрами с вершинами трёх разных цветов, а никакие две вершины одного цвета не были соединены ребром?

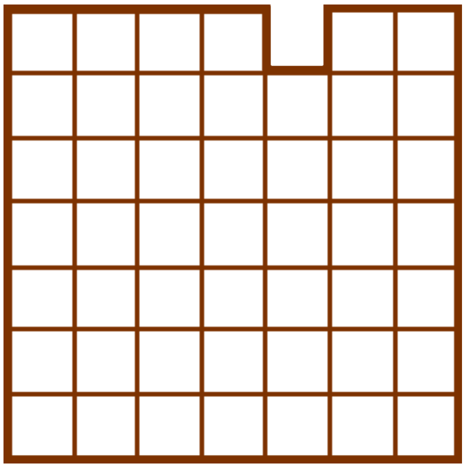


6. На шахматной доске расположены 16 коней, как показано на рисунке. Раскрасьте их в четыре цвета, чтобы каждый конь бил ровно одного коня каждого цвета.

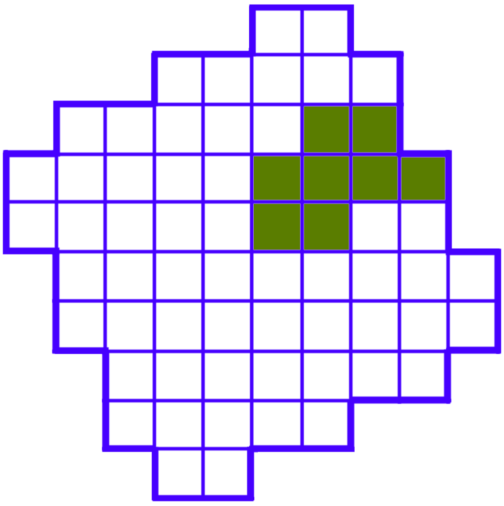
7. Изображённая на рисунке 15-звенная ломаная расположена по отношению к 16 центрам клеток квадрата со стороной 4 так, что любой отрезок с концами в центрах двух разных клеток пересекает ломаную, причём ломаная не проходит ни через один из центров клеток. Нарисуйте 7-звенную ломаную, обладающую тем же свойством.

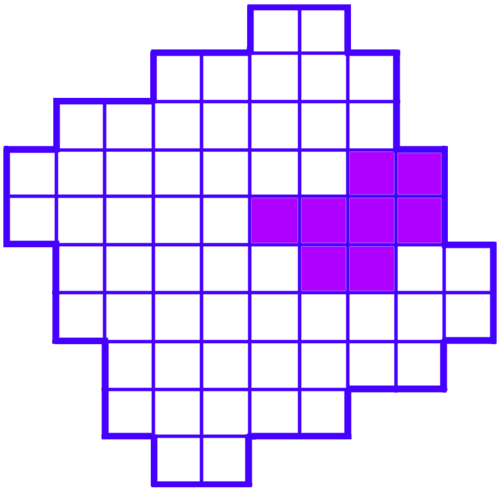


8. Из квадрата со стороной 7 вырезали одну клетку, как показано на рисунке.
   Разрежьте полученную фигуру на 8 конгруэнтных (то есть одной площади и одной формы) многоугольников.



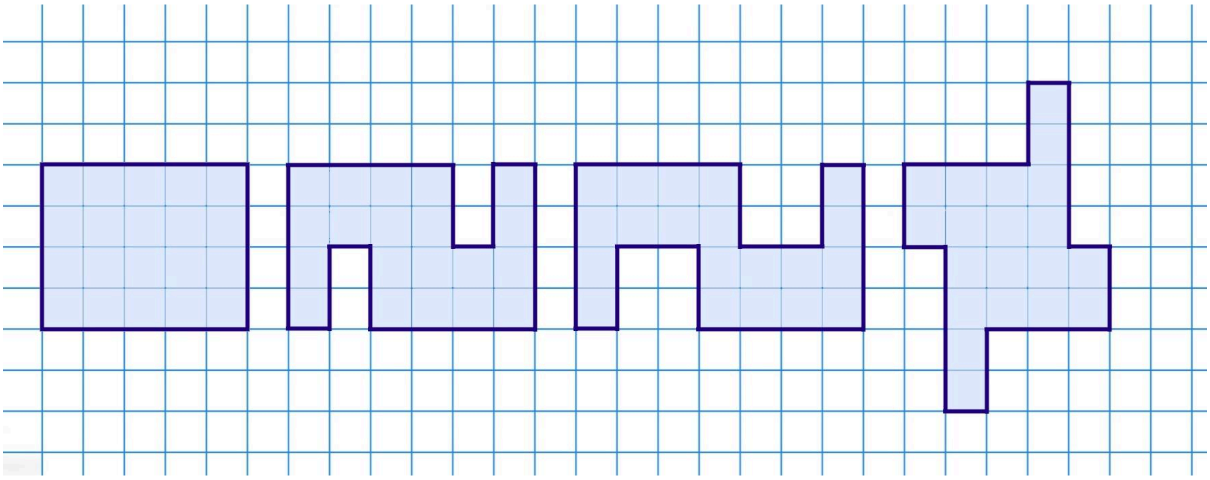
9. В клетчатом многоугольнике расположили восьмиклеточную фигуру, как показано на рисунке. Разрежьте оставшуюся часть фигуры на 7 таких же восьмиклеточных фигур (переворачивать и поворачивать можно, но менять положение уже нарисованной фигуры нельзя).

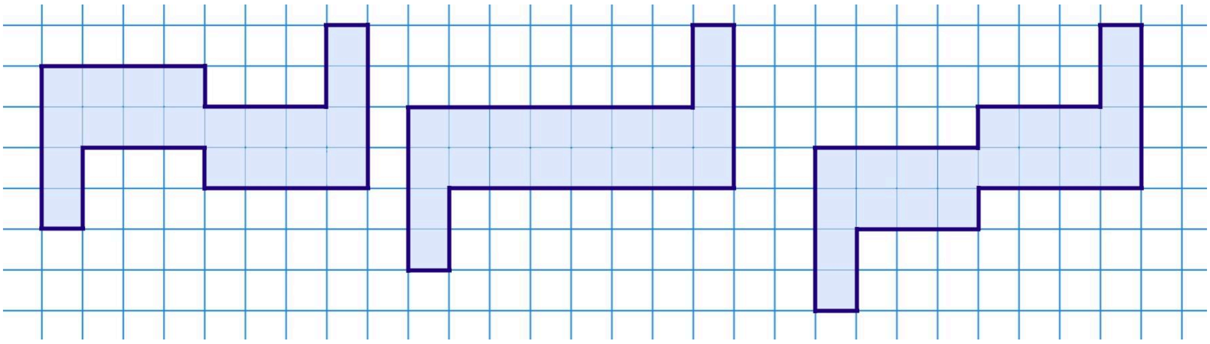

а)

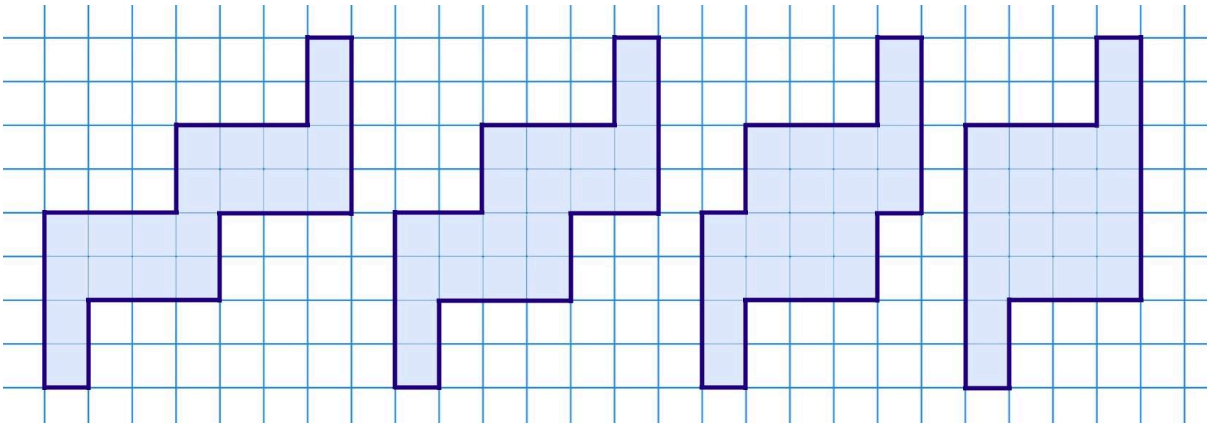

б)

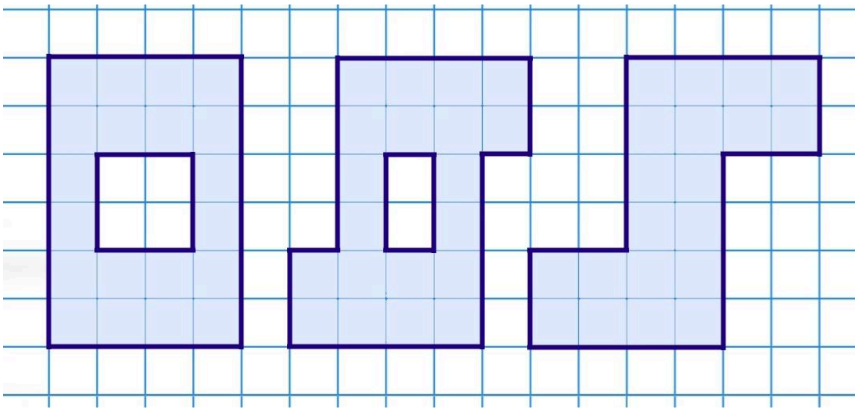
10. Прямоугольный параллелепипед размером 1 × 2 × 2 оклейте без зазоров и перекрытий двумя прямоугольниками, из которых можно сложить квадрат.

11. Придумайте четыре фигуры пентамино (то есть четыре многоугольника, каждый из которых состоит из 5 клеток), из которых можно сложить каждую из изображённых на рисунке четырнадцати фигур.



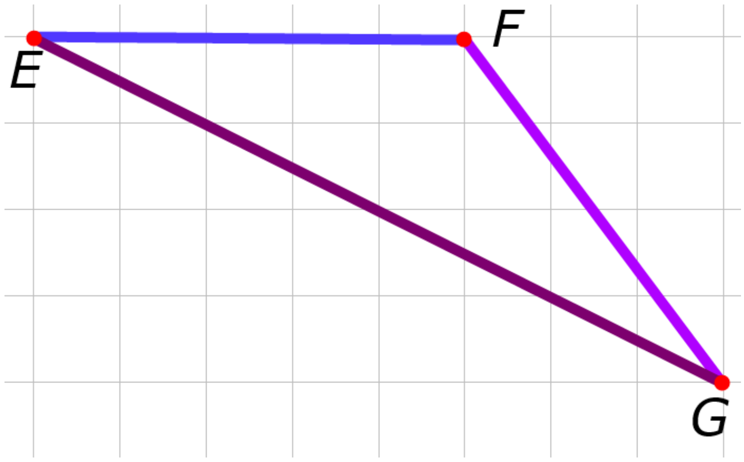






5-6 классы

1. а) Проведя высоту из вершины *F* нарисованного на клетчатой бумаге треугольника *EFG,* докажите равенство длин отрезков *EF* и *FG.*

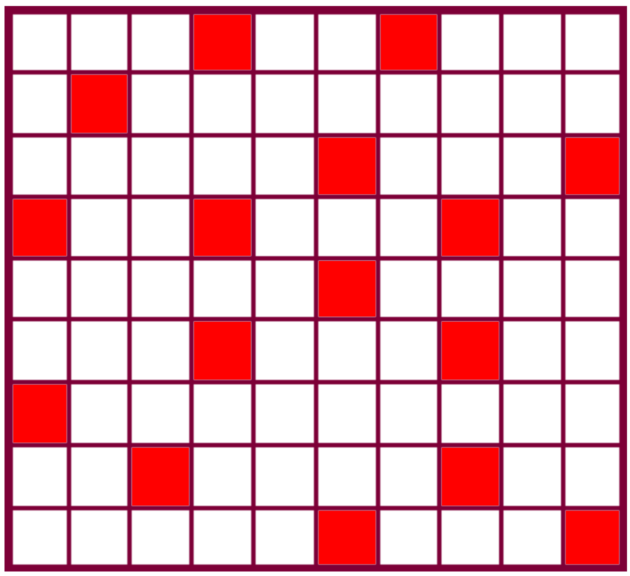


б) Воспользовавшись результатом предыдущего пункта, найдите длину гипотенузы прямоугольного треугольника с катетами длин 3 и 4.

2. Расстоянием между двумя клетками шахматной доски назовём наименьшее количество ходов, которыми король может перейти из одной из этих клеток в другую, не делая диагональных ходов. Отметьте на шахматной доске клетки, находящиеся на равных расстояниях от клеток a4 и h1.

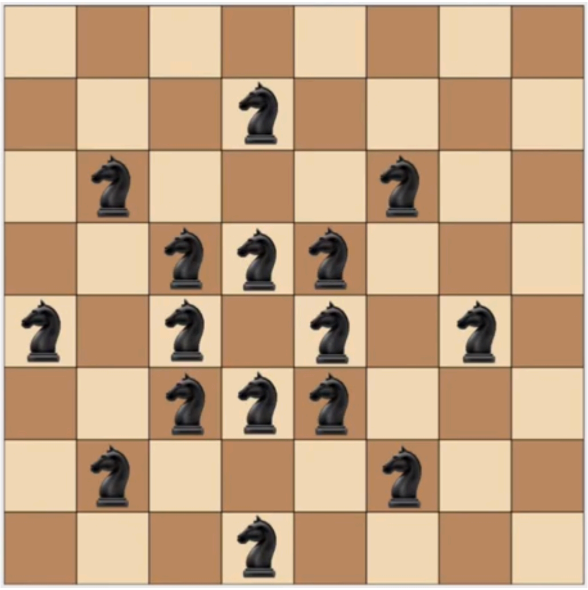
3. Нарисуйте а) пятизвенную; б) семизвенную; в) восьмизвенную; г) десятизвенную ломаную, которая каждое своё звено пересекает дважды.

4. Некоторые клетки прямоугольника закрашены красным цветом. Это означает, что в них заходить нельзя. Нарисуйте замкнутый (то есть заканчивающийся в той клетке, где начался) маршрут ладьи, которая



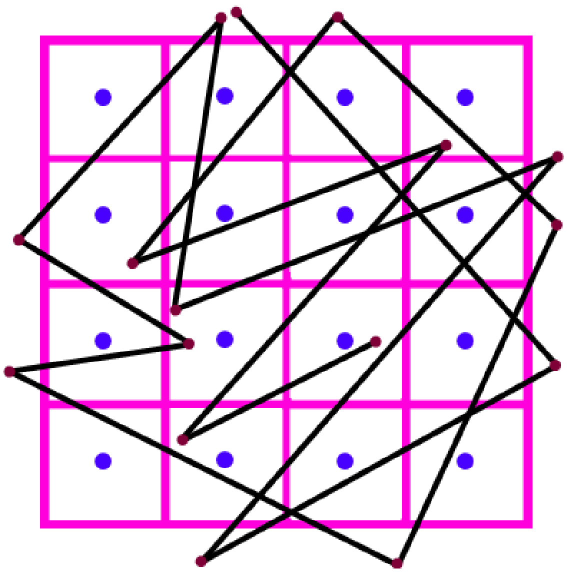
проходит по одному разу по всем незакрашенным клеткам, причём каждым ходом сдвигается в соседнюю клетку, ни через какую клетку не перепрыгивая.

5. Раскрасьте вершины куба в четыре цвета так, чтобы каждая вершина была соединена рёбрами с вершинами трёх разных цветов, а никакие две вершины одного цвета не были соединены ребром.

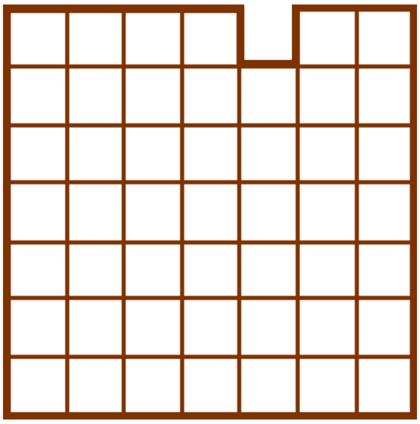


6. На шахматной доске расположены 16 коней, как показано на рисунке. Раскрасьте их в четыре цвета, чтобы каждый конь бил ровно одного коня каждого цвета.

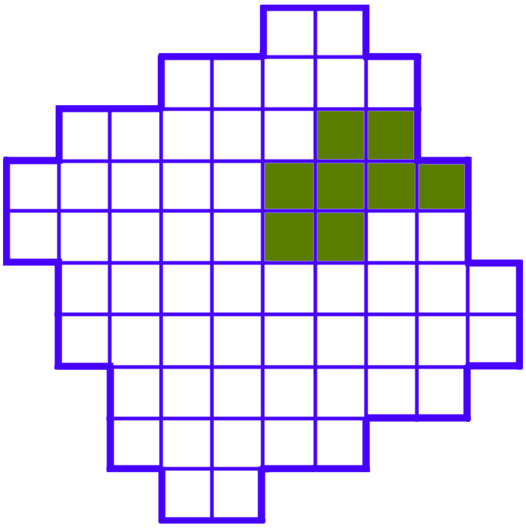
7. Изображённая на рисунке 15-звенная ломаная расположена по отношению к 16 центрам клеток квадрата со стороной 4 так, что любой отрезок с концами в центрах двух разных клеток пересекает ломаную, причём ломаная не проходит ни через один из центров клеток. Нарисуйте 7-звенную ломаную, обладающую тем же свойством.



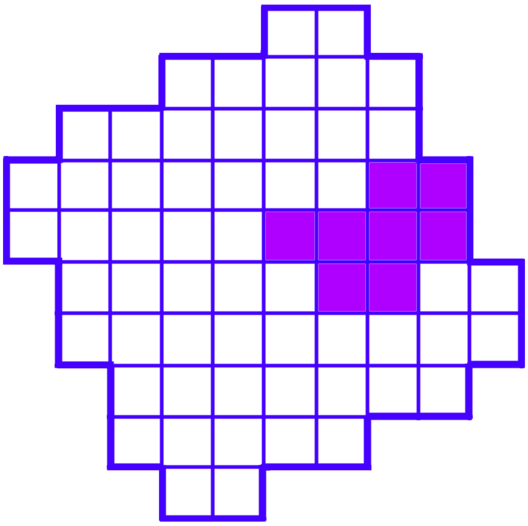
8. Из квадрата со стороной 7 вырезали одну клетку, как показано на рисунке. Разрежьте полученную фигуру на 8 конгруэнтных (то есть одной площади и одной формы) многоугольников.



9. В клетчатом многоугольнике расположили восьмиклеточную фигуру, как показано на рисунке. Разрежьте оставшуюся часть фигуры на 7 таких же восьмиклеточных фигур (переворачивать и поворачивать можно, но менять положение уже нарисованной фигуры нельзя).



а)

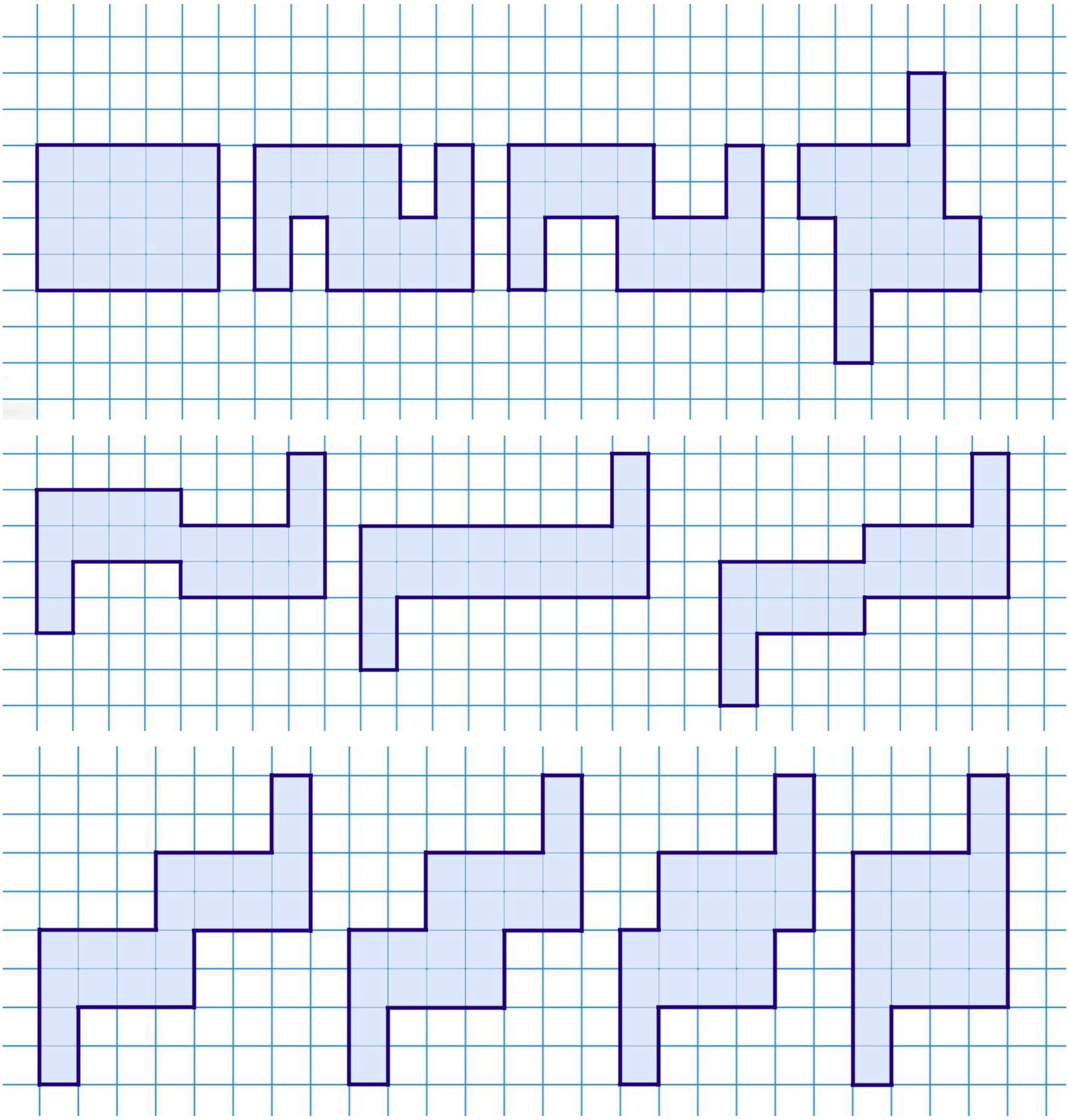


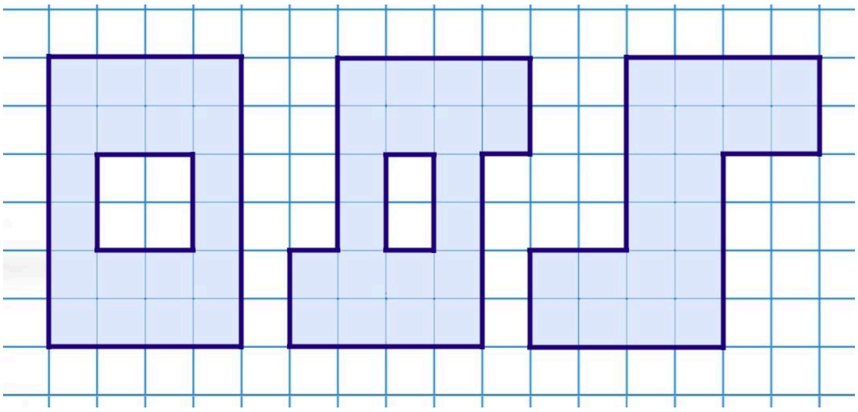
б)

10. а) Прямоугольный параллелепипед размером 1 × 2 × 2 оклейте без зазоров и перекрытий двумя прямоугольниками, из которых можно сложить квадрат.

б) Бумажный квадрат размером 12 × 12 разрежьте на два прямоугольника, которыми можно оклеить без зазоров и наложений какой-нибудь стаканчик в форме параллелепипеда без верхней грани. В ответе укажите форму и размеры каждой из частей, а также размеры дна и высоту стаканчика.

11. Придумайте четыре фигуры пентамино (то есть четыре многоугольника, каждый из которых состоит из 5 клеток), из которых можно сложить каждую из изображённых на рисунке четырнадцати фигур.





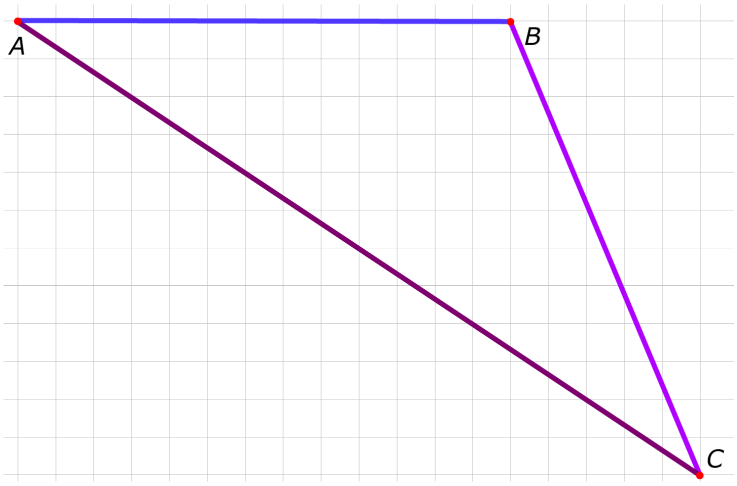
12. а) Разрежьте прямоугольник размером 48 × 50 на прямоугольники размером 4 × 6.

б) Разрежьте прямоугольный параллелепипед размером 48 × 50 × 50 на 1000 параллелепипедов размером 4 × 5 × 6.

в) Найдите площади поверхностей параллелепипедов размеров 48 × 50 × 50 и 40 × 50 × 60. Какая из этих площадей больше?

7-8 классы

1. а) Проведя высоту из вершины *B* нарисованного на клетчатой бумаге треугольника *ABC*, докажите равенство длин отрезков *AB* и *BC*.

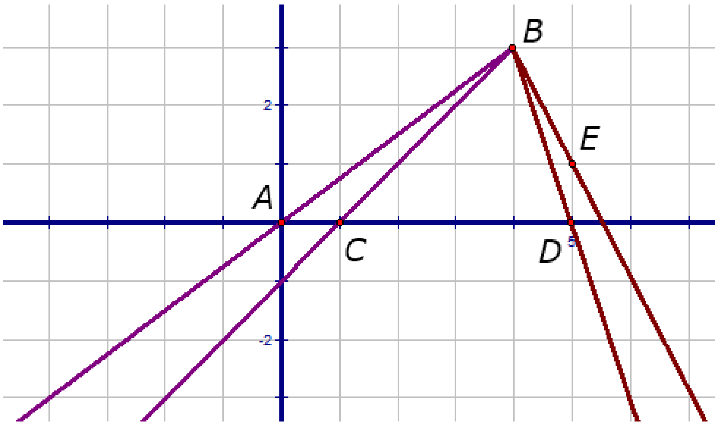


б) Воспользовавшись результатом предыдущего пункта, найдите длину гипотенузы прямоугольного треугольника с катетами длин 5 и 12.

2. Найдите отношение длин сторон параллелограмма, одна из сторон которого видна из середины противоположной стороны под прямым углом.

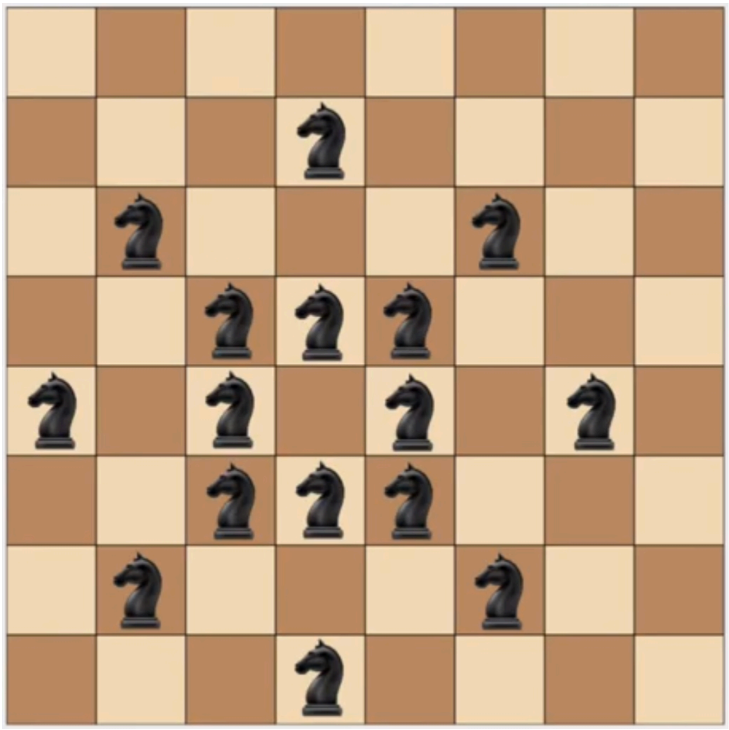
3. Нарисуйте а) пятизвенную; б) семизвенную; в) восьмизвенную; г) десятизвенную ломаную, которая каждое своё звено пересекает дважды.

4. Докажите равенство величин углов ABC и DBE, где $A = (0; 0)$, $B = (4; 3)$, $C = (1; 0)$, $D = (5; 0)$, $E = (5; 1)$.



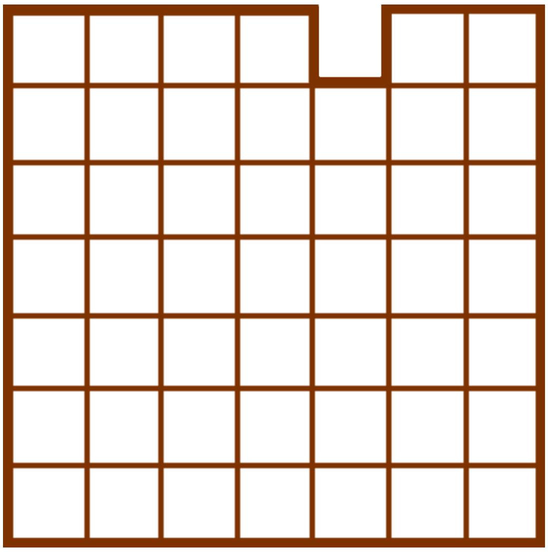
5. Можно ли раскрасить вершины куба в четыре цвета так, чтобы каждая вершина была соединена рёбрами с вершинами трёх разных цветов, а никакие две вершины одного цвета не были соединены ребром?

6. На шахматной доске расположены 16 коней, как показано на рисунке. Раскрасьте их в четыре цвета, чтобы каждый конь бил ровно одного коня каждого цвета.

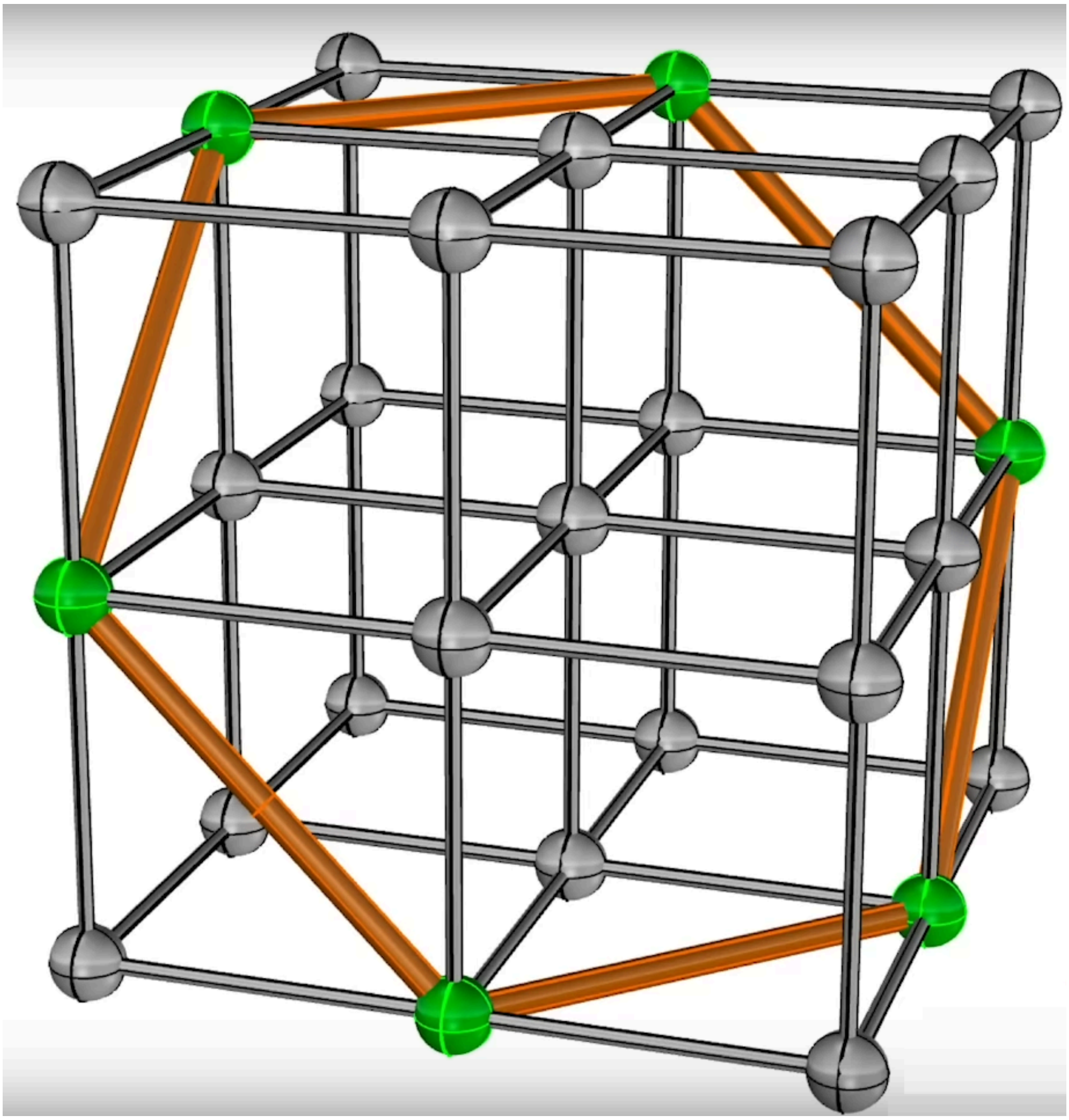


7. В правильном 12-угольнике существуют четыре диагонали, не проходящие через центр многоугольника и пересекающиеся в одной точке. Докажите это.

8. Из квадрата со стороной 7 вырезали одну клетку, как показано на рисунке. Разрежьте полученную фигуру на 8 конгруэнтных (то есть одной площади и одной формы) многоугольников.



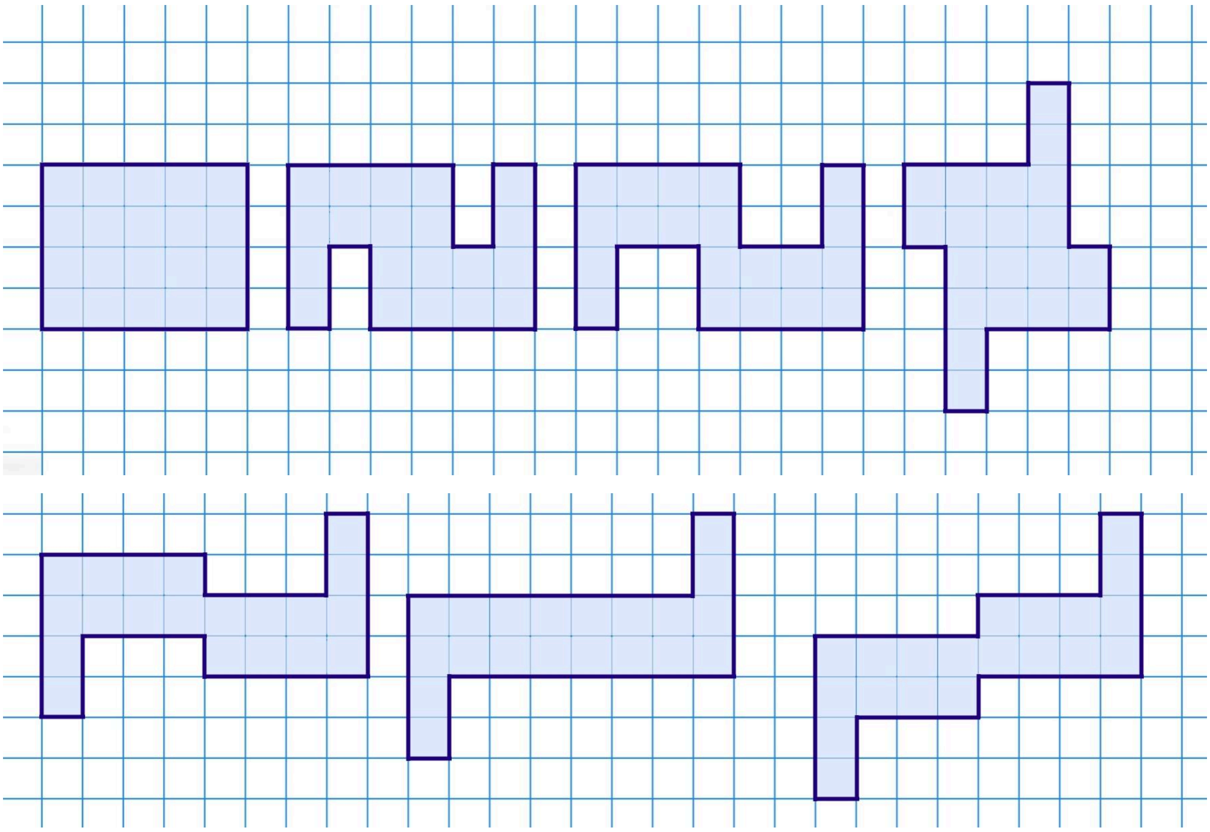
9. Отметив середины рёбер куба с ребром длины 2, получили равносторонний шестиугольник, изображённый на рисунке. Найдите его площадь.

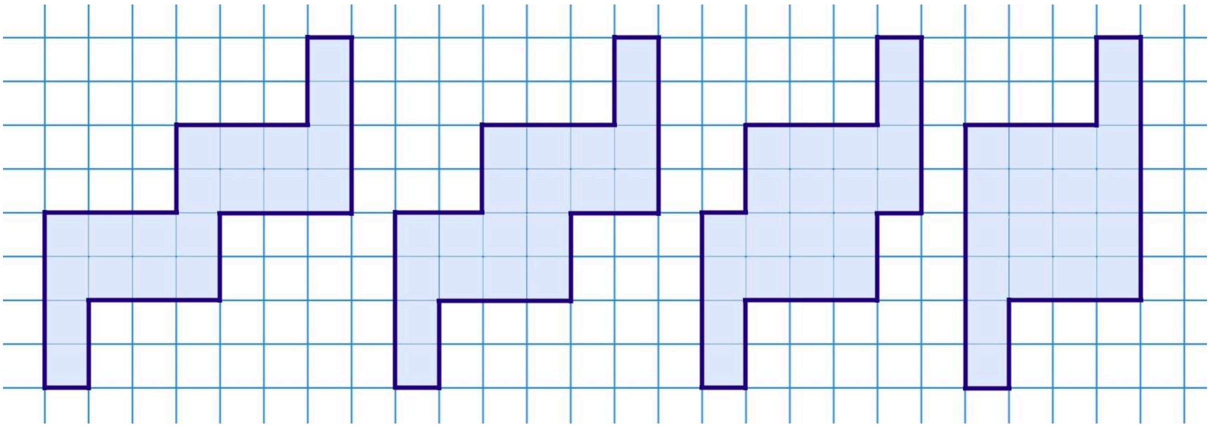


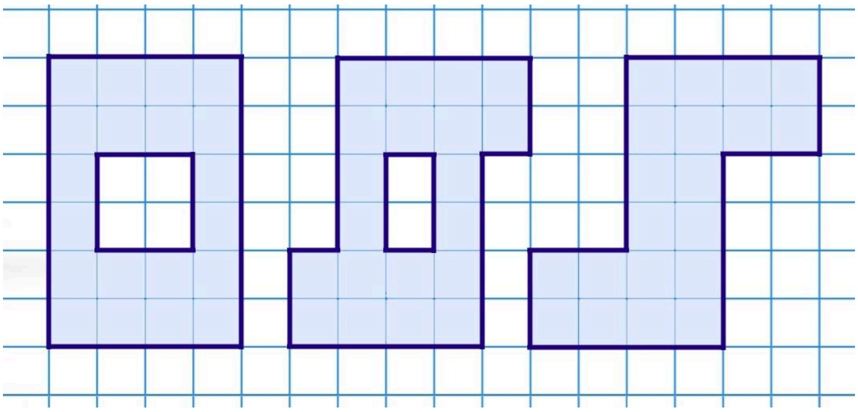
10. а) Прямоугольный параллелепипед размером 1 × 2 × 2 оклейте без зазоров и перекрытий двумя прямоугольниками, из которых можно сложить квадрат.

б) Бумажный квадрат размером 12 × 12 разрежьте на два прямоугольника, которыми можно оклеить без зазоров и наложений какой-нибудь стаканчик в форме параллелепипеда без верхней грани. В ответе укажите форму и размеры каждой из частей, а также размеры дна и высоту стаканчика.

11. Придумайте четыре фигуры пентамино (то есть четыре многоугольника, каждый из которых состоит из 5 клеток), из которых можно сложить каждую из изображённых на рисунке четырнадцати фигур.







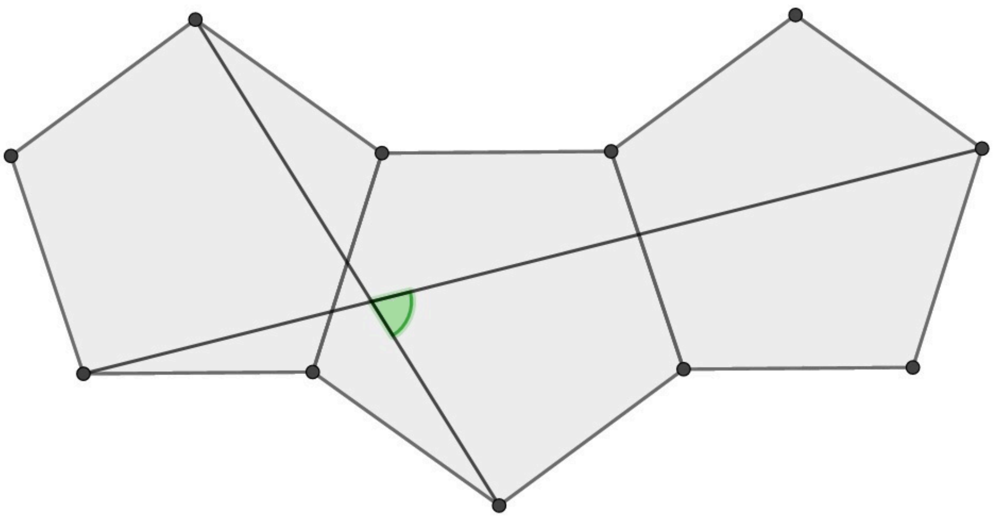
12. а) Разрежьте прямоугольник размером 48 × 50 на прямоугольники размером 4 × 6.

б) Разрежьте прямоугольный параллелепипед размером 48 × 50 × 50 на 1000 параллелепипедов размером 4 × 5 × 6.

в) Найдите площади поверхностей параллелепипедов размеров 48 × 50 × 50 и 40 × 50 × 60. Какая из этих площадей больше?

9-10 классы

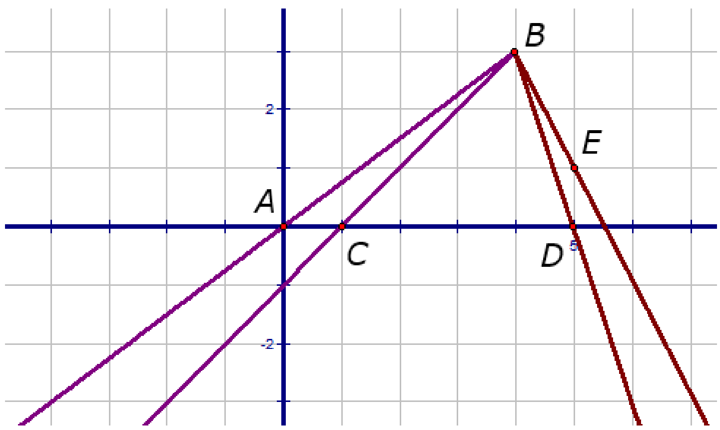
1. Три правильных пятиугольника расположены, как показано на рисунке. Найдите величину отмеченного угла.



2. Дан треугольник ABC. Прямые, симметричные прямой AC относительно прямых AB и BC соответственно, пересекаются в точке K. Докажите, что прямая BK проходит через центр описанной окружности треугольника ABC.

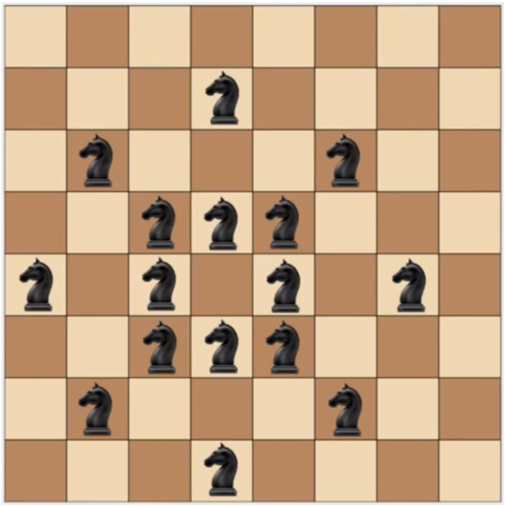
3. Расположите в пространстве тетраэдр, шар и плоскость таким образом, чтобы площади сечений тетраэдра и сферы любой плоскостью, параллельной выбранной, были равны.

4. Докажите равенство величин углов ABC и DBE, где $A = (0; 0)$, $B = (4; 3)$, $C = (1; 0)$, $D = (5; 0)$, $E = (5; 1)$.



5. Назовём вытянутостью прямоугольника отношение большей стороны к меньшей. Докажите, что вытянутость прямоугольника G, вписанного в прямоугольник F (так, что вершины G лежат по одной на сторонах F), не меньше вытянутости F.

6. На шахматной доске расположены 16 коней, как показано на рисунке. Раскрасьте их в четыре цвета, чтобы каждый конь бил ровно одного коня каждого цвета.



7. В правильном
а) 12-угольнике;
б) 54-угольнике существуют
четыре диагонали, не проходящие через центр многоугольника и пересекающиеся в одной и точке. Докажите это.

8. Квадрат разрезали на прямоугольники. Докажите, что сумма длин наименьших сторон всех этих прямоугольников не меньше длины стороны квадрата.

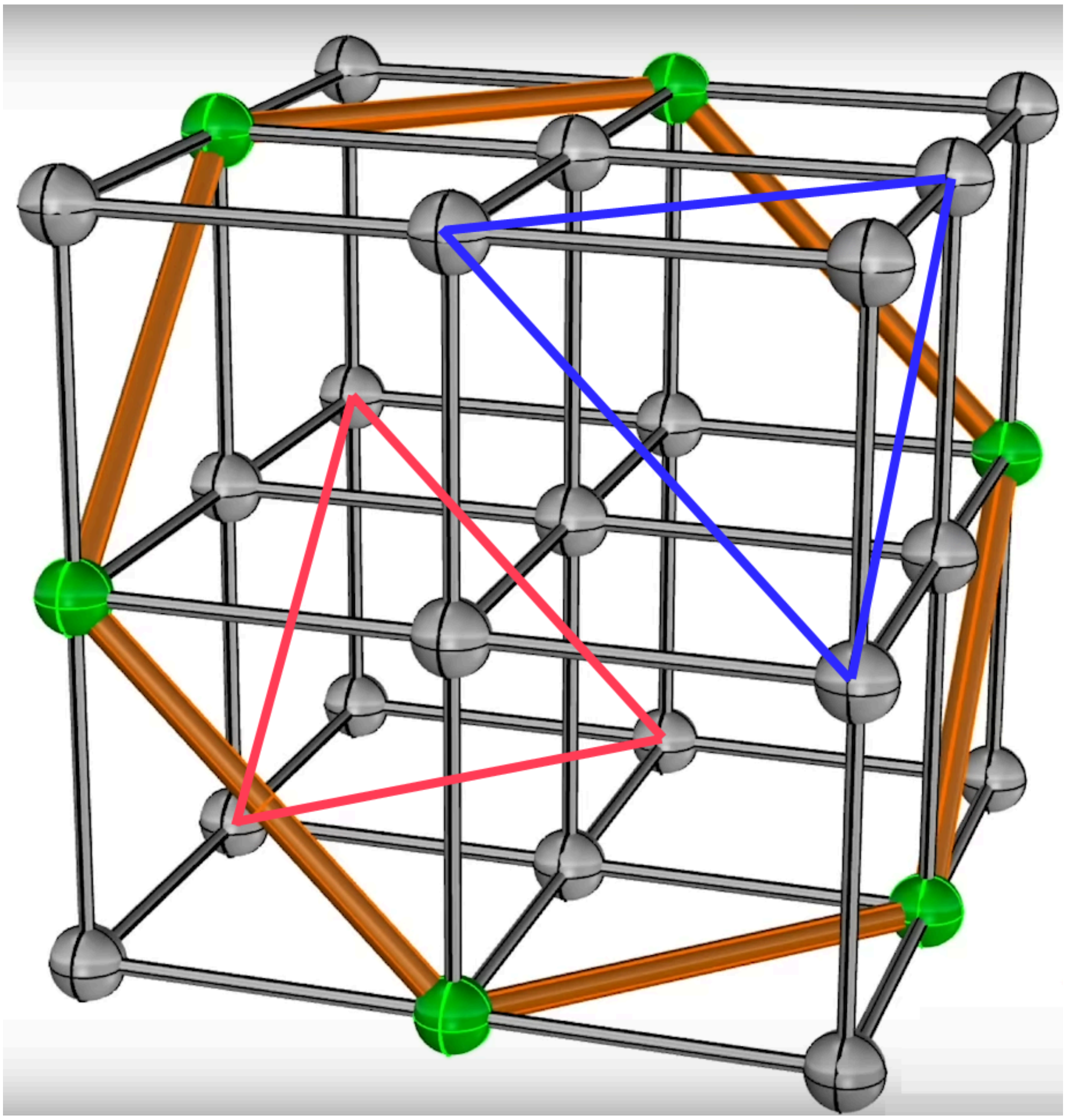
9. Отметив середины рёбер куба с ребром длины 2, получили равносторонний шестиугольник, изображённый на рисунке.

а) Найдите его площадь.

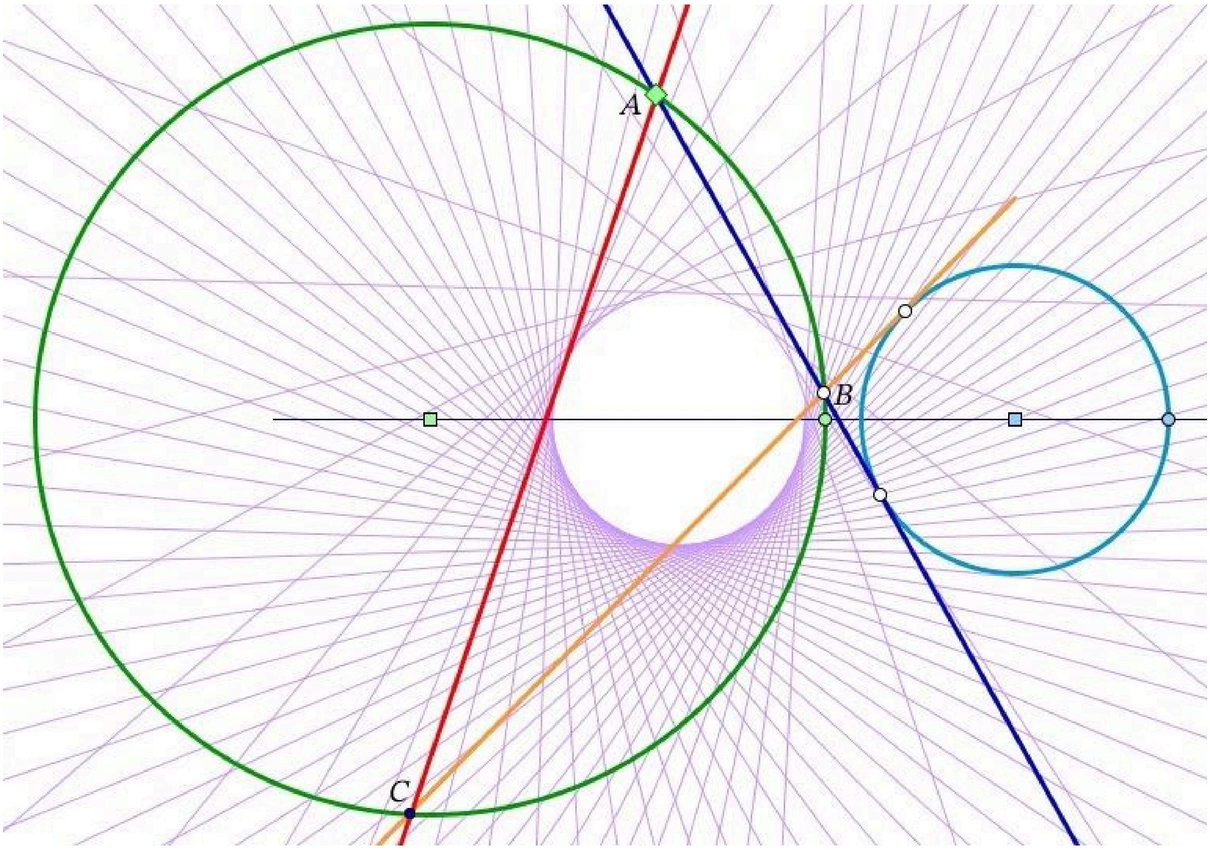
б) Соединив середины трёх выходящих из одной вершины рёбер того же куба, получили (красный на рисунке) равносторонний треугольник. Найдите отношение площади правильного шестиугольника пункта а) к площади этого правильного треугольника.

в) Отразив относительно центра куба вершины красного треугольника, получили синий треугольник, вершины которого — тоже середины рёбер куба. Найдите объём антипризмы, одним из оснований которой является красный треугольник, а другим — синий.

г) Найдите объём кубооктаэдра — выпуклого многогранника, вершинами которого являются середины всех рёбер рассматриваемого куба.



10. Даны две окружности. Рассмотрим всевозможные пары хорд *AB* и *BC* одной из них, которые касаются другой (сами или продолжениями). Докажите, что огибающая хорд AC — окружность или дуга окружности (зависит от взаимного расположения данных окружностей).



11. На гиперболе, заданной уравнением $xy = 1$, взяты две точки *M* и *N*, симметричные относительно начала координат. Окружность с центром *M*, проходящая через точку *N*, пересекает гиперболу ещё в трёх точках. Докажите, что эти точки — вершины равностороннего треугольника.

12. а) Разрежьте прямоугольник размером 48 × 50 на прямоугольники размером 4 × 6.

б) Разрежьте прямоугольный параллелепипед размером 48 × 50 × 50 на 1000 параллелепипедов размером 4 × 5 × 6.

в) Найдите площади поверхностей параллелепипедов размеров 48 × 50 × 50 и 40 × 50 × 60. Какая из этих площадей больше?

Благодарим Сергея Ивановича Токарева — автора задачи 10 для 3-4 классов и задачи 12 для 9-10 классов.

Условия задач разных лет

2024-2025 год:
https://docs.google.com/document/d/1XWSg25ErZUpMK3rUMfZrVcD1VoBmFR5vz22sAmeoX9I

2023-2024 год:
https://docs.google.com/document/d/1YRcI6yzGDC2Yyng3v0Dokt9rO2eGWwOb_oxU0e5Rh74

2022-2023 год:
https://docs.google.com/document/d/1j2UF72XTgKEXR8viwhh7E-QIzKj4o_oZKsA3u4aS3vA

2021-2022 год:
https://docs.google.com/document/d/1sH3gFGNbg_qv3jCMi2QhnOnn-xpTr66JxFUc4JYbU5g

2020-2021 год:
https://docs.google.com/document/d/1BEcWilXdGSmM9jdQ9RQv9nc3ykeVyyAoatsxoDpPt4I

2019-2020 год:
https://docs.google.com/document/d/1IVuR85ut6X94XtqWUEhRLI5VSBAp8v69NPyxfAUc_3A

2018-2019 год:
https://docs.google.com/document/d/1-ZZaun_v1cBprOueHdEzccvqMvcIoUEFEu-KQuO7FQM

2017-2018 год:
https://docs.google.com/document/d/1eYK40nnq76r1hFDwtYoQ_1cSpKXFJguOI-SMzs3lIKg

2016-2017 год:
https://docs.google.com/document/d/1JrOn0j3SsH4wtCW1gMrwo3wV_nDOPWeHAAuL3P-vD1Q

Условия задач очного тура 2023 года:

https://docs.google.com/document/d/13XdDsoFrorY9veeR5A3nkyy3V-EtaPvK4F7urKVAHEk

Условия задач очного тура 2024 года:

https://docs.google.com/document/d/1ZDWDYQuuN5gxMuSicyrcyHelJyhkSy8h1zhmROT5-QY

Видео Елены Борисовны Прониной об олимпиаде 2023-2024 учебного года:
https://www.youtube.com/watch?v=ZAIuJWzDoas