

ENSAM-ESTP-ENSAIS option PSI math 1

Question préliminaire l'équivalence de (1) et (2) est évidente et la question ne sert pas.

Première partie

1-1) Le polynôme p_n est la dérivée d'ordre n du polynôme q_n , de degré $2n$, donc $\deg(p_n) = n$

Le polynôme q_n est une fonction paire donc :

si n est pair alors p_n est une fonction paire

si n est impair alors p_n est une fonction impaire

On trouve : $p_0(x) = 1$, $p_1(x) = x$, $p_2(x) =$ et $p_3(x) =$.

Puis : $G_{0,0}(x) = 1$, $G_{1,0}(x) = x$, $G_{1,1}(x) =$,

$G_{2,0}(x) =$, $G_{2,1}(x) = 3x$, $G_{2,2}(x) = 3(1 - x^2)$,

$G_{3,0}(x) =$, $G_{3,1}(x) =$, $G_{3,2}(x) = 15x(1 - x^2)$, $G_{3,3}(x) = 15$.

Enfin : $G_{3,1}(x) + G_{1,1}(x) = x^2$.

1-2) Soient n et j deux entiers. On peut supposer $j \leq n$ pour la rédaction. En intégrant par partie, on trouve :

$$p_j(t) p_n(t) dt = p_j(t) (t) dt = \left[p_j(t) (t) \right] - p_j'(t) (t) dt.$$

Or 1 et -1 sont des racines d'ordre n de q_n , donc : $\forall k \in 1, n \quad (1) = (-1) = 0$.

On en déduit : $p_j(t) p_n(t) dt = p_j(t) (t) dt = -p_j'(t) (t) dt$.

Et, par récurrence : $\forall k \in 1, n \quad p_j(t) p_n(t) dt = (-1)^k p_j^{(k)}(t) (t) dt$.

Si $j < n$, alors $k = j + 1 \leq n$ et $p_j^{(k)} = 0$, donc $p_j(t) p_n(t) dt = 0$.

Si $j = n$, alors $p_j(t) p_n(t) dt = (p_n(t))^2 dt = (-1)^n p_n^{(n)}(t) (t) dt = (1 - t^2)^n dt$.

En posant $t = \sin(u)$, on obtient :

$$(p_n(t))^2 dt = 2 (\cos(u))^{2n+1} du = ,$$

d'après les résultats « bien connus » sur les intégrales de Wallis (vive le bachotage !).

1-3) La série de fonctions $a_k p_k$ converge uniformément sur $[-1, 1]$, pour n fixé, la fonction p_n est bornée sur $[-1, 1]$.

On en déduit que la série de fonction $a_k p_k p_n$ converge aussi uniformément sur $[-1, 1]$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad p_n(t) f(t) dt = a_k p_n(t) p_k(t) dt = a_n p_n^2(t).$$

Donc : $\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n = p_n(t) f(t) dt$.

1-4) En dérivant q_n , on obtient, pour tout x de :

$$(1 - x^2) q_n'(x) + 2n x q_n(x) = 0.$$

En dérivant $n + 1$ fois cette égalité à l'aide de la formule de Leibniz, on trouve, pour tout x de :

$$\left[(1 - x^2) q_n^{(n+2)}(x) + (n + 1)(-2x) q_n^{(n+1)}(x) + (-2) q_n^{(n)}(x) \right] + 2n \left[x q_n^{(n+1)}(x) + (n + 1) q_n^{(n)}(x) \right] = 0.$$

$$(1 - x^2) q_n^{(n+2)}(x) - 2x q_n^{(n+1)}(x) + n(n + 1) q_n^{(n)}(x) = 0.$$

Or $q_n^{(n)} = p_n$ donc : $(1 - x^2) p_n''(x) - 2x p_n'(x) + n(n + 1) p_n(x) = 0$.

Donc p_n est bien solution de (E_n) sur .

1-5) On pose $y(x) = (1 - x^2)^{k/2} z(x)$. Un calcul passionnant prouve que y est solution de $(E_{n,k})$ sur $] -1, 1[$ si et seulement si z est solution, sur ce même intervalle, de :

$$(F_{n,k}) : (1 - x^2) z''(x) - 2x(k + 1) z'(x) + [n(n + 1) - k(k + 1)] z(x) = 0.$$

Dérivons k fois la formule :

$$(1 - x^2) p_n''(x) - 2x p_n'(x) + n(n+1) p_n(x) = 0$$

$$\text{Nous obtenons : } (1 - x^2) p_n^{(k+2)}(x) - 2x(k+1) p_n^{(k+1)}(x) + [n(n+1) - k(k+1)] p_n^{(k)}(x) = 0.$$

Donc $p_n^{(k)}$ est solution de l'équation $(F_{n,k})$ et $G_{n,k} = (1 - x^2)^{k/2} p_n^{(k)}$ est solution de $(E_{n,k})$ sur $] -1, 1[$.

Deuxième partie

2-1) Sachant que $F(r, \theta, \phi) = H(r, \theta)$, si F est solution de (E) , alors H est solution de :

$$(E') : \left[r^2 \right] + \left[\sin(\theta) \right] = 0.$$

2-2) Si $H(r, \theta) = U(r) V(\theta)$ où U et V sont deux fonctions de classe $\mathbf{C}^2$, alors :

$$\begin{aligned} \left[r^2 \right] + \left[\sin(\theta) \right] \\ = \left[V(\theta) \left[r^2 \right] + \left[\sin(\theta) \right] \right] \end{aligned}$$

Si l'on suppose que U est solution de (S_1) et V solution de (S_2) , on aboutit à :

$$\left[r^2 \right] + \left[\sin(\theta) \right] = 0, \text{ et ce sans la question préliminaire.}$$

2-3) La fonction $U : r \mapsto r^\alpha$ est solution de (S_1) si et seulement si $\alpha(\alpha+1) - n(n+1) = 0$, i.e. $\alpha = n$ ou $\alpha = -(n+1)$.

Sur un intervalle ne contenant pas 0, les solutions de (S_1) sont de la forme $U(r) = a r^n + b$.

Les fonctions $U : r \mapsto a r^n$ sont solutions sur $\mathbb{R}^*$ de (S_1) .

Enfin, pour $n \geq 3$, les fonctions $U : r \mapsto r^n$ sont de classe $\mathbf{C}^2$ et solution sur $\mathbb{R}^*$ de (S_1) .

Troisième partie

3-1) On trouve : $U_n(r) = r^n$.

3-2) Posons : $V(\theta) = Z(\cos \theta)$.

On a : $U_n' = -(\sin \theta) Z'(\cos \theta)$ et $U_n'' = (\sin \theta)^2 Z''(\cos \theta) - (\cos \theta) Z'(\cos \theta)$.

En supposant V solution de (S_2) , on trouve que :

$$\forall \theta \in]0, \pi[\quad (\sin \theta)^2 Z''(\cos \theta) - 2(\cos \theta) Z'(\cos \theta) + n(n+1) Z(\cos \theta) = 0.$$

$$\forall \xi \in]-1, 1[\quad (1 - \xi^2) Z''(\xi) - 2\xi Z'(\xi) + n(n+1) Z(\xi) = 0.$$

Donc Z est une solution de (E_n) sur $] -1, 1[$. La fonction $Z = p_n$ est solution de (E_n) sur $] -1, 1[$ et la fonction :

$$V_n : \theta \mapsto p_n(\cos \theta)$$

est solution de (S_2) sur $]0, \pi[$.

3-3) L'application :

$$H : \left[r^2 \right] + \left[\sin(\theta) \right]$$

est linéaire, donc l'ensemble des solutions de (E') est stable par combinaison linéaire.

Pour tout entier n , la fonction $(r, \theta) \mapsto U_n(r) V_n(\theta)$ est solution de (E') . Le résultat demandé en découle.

3-4) On sait que $U_n(r) = r^n$. Donc, si $H(r, \theta) = c_n U_n(r) V_n(\theta)$, alors la fonction H vérifie automatiquement les conditions (3) et (4) de l'énoncé. De plus :

$$\forall (r, \theta) \in \mathbb{R}^* \times]0, \pi[:$$

$$H(r, \theta) + (r, \theta) = (c_n p_n(\cos \theta) + (n+1) c_{n+1} p_{n+1}(\cos \theta)) r^n + c_M p_M(\cos \theta)$$

Or, les fonctions $(\cos^k \theta)_{k \in \mathbb{N}}$ forment une famille libre et p_n est un polynôme de degré n , donc pour avoir la condition

(5) il est nécessaire que $M = 2$ et cette condition devient :

$$\forall \theta \in]0, \pi[\quad H(R, \theta) + (R, \theta) = (c_0 + c_1 \cos \theta) + (c_1 \cos \theta + 2c_2)R + c_2 R^2 \\ = 1 + \cos^2 \theta.$$

On en déduit $c_1 = 0$; $c_0 - c_2(R +) = 1$; $3c_2(R +) = 1$.

Donc : $c_2 =$ et $c_0 =$.

Quatrième partie

4-1) Et remettez-moi donc une bonne louche de calculs .

$$F_n(r, \theta, \phi) = (A_n r^n + B_n) [(a_{n,k} \cos(k\phi) + b_{n,k} \sin(k\phi)) G_{n,k}(\cos(\theta))]$$

• premier calcul :

$$\left[r^2 (A_n r^n + B_n) \right] = n(n+1)(A_n r^n + B_n), \text{ donc :}$$

$$(*) \quad \left[r^2 \right] = n(n+1) F_n.$$

• deuxième calcul :

$$\left[\sin(\theta) \right] = \left[-\sin^2(\theta) G_{n,k}'(\cos(\theta)) \right] \\ = \sin^2(\theta) G_{n,k}''(\cos(\theta)) - 2 \cos(\theta) G_{n,k}'(\cos(\theta)).$$

Or $G_{n,k}$ est solution de l'équation $(E_{n,k})$, donc :

$$\left[\sin(\theta) \right] = -(n(n+1) -) G_{n,k}(\cos(\theta)), \text{ donc :}$$

$$(**) \quad \left[\sin(\theta) \right] = -n(n+1) F_n$$

$$+ (A_n r^n + B_n) [(a_{n,k} \cos(k\phi) + b_{n,k} \sin(k\phi)) G_{n,k}(\cos(\theta))].$$

• troisième calcul :

$$= (a_{n,k} \cos(k\phi) + b_{n,k} \sin(k\phi)), \text{ donc :}$$

$$(***) \quad = -(A_n r^n + B_n) [(a_{n,k} \cos(k\phi) + b_{n,k} \sin(k\phi)) G_{n,k}(\cos(\theta))].$$

En additionnant(*), (**) et (***), on obtient :

$$\left[r^2 \right] + \left[\sin(\theta) \right] + = 0.$$

4-2) De la question1-1), on déduit : $G_{3,1}(\cos(\theta)) + G_{1,1}(\cos(\theta)) = \cos^2(\theta) \sin(\theta)$.

$$\text{Donc : } \cos^2(\theta) \sin(\theta) \sin(\phi +) = \left(\sin(\phi) + \cos(\phi) \right) G_{3,1}(\cos(\theta))$$

$$+ \left(\sin(\phi) + \cos(\phi) \right) G_{1,1}(\cos(\theta))$$

On en déduit que la fonction F définie par :

$$F(r, \theta, \phi) = r^3 \left(\sin(\phi) + \cos(\phi) \right) G_{3,1}(\cos(\theta)) + r \left(\sin(\phi) + \cos(\phi) \right) G_{1,1}(\cos(\theta))$$

est solution du problème posé.