

5. شفعية دالة :

نشاط 3 :

نعتبر الدالتين f و g المعرفتين على مجموعة D من \mathbb{R} بما يلي :
 $f: x \mapsto x^2 - 1$ و $g: x \mapsto x^3 - x$ والشكل المقابل يبين
 منحنى الدالتين الممثلين في معلم متعامد .



نعتبر D مجموعة من المجموعات التالية: \mathbb{R} ؛ $\{-\sqrt{3}; \sqrt{3}\}$ ؛ $[-1; 1]$ ؛ $]-\infty; -2[\cup]2; +\infty[$

(1) بين أنه إذا كان $x \in D$ فإن $-x \in D$ ما القول عن المجموعة D .

(2) قارن $f(x)$ و $f(-x)$ ثم $g(x)$ و $g(-x)$ وهذا من أجل $x \in D$.

(3) M و M' نقطتان من أحد المنحنيين فاصلتيهما x و $-x$ على

الترتيب حيث $x \in D$ ، بين أن النقطة M' صورة النقطة M بتناظر مطلوب عناصره في كل حالة من الحالتين.

(4) ما هي الخصية الهندسية التي يتميز بها كل منحن ؟

حل النشاط :

(1) بين أنه إذا كان $x \in D$ فإن $-x \in D$ ما القول عن المجموعة D .

● $D = \mathbb{R}$ لدينا من أجل كل عدد حقيقي x له معاكس وهو العدد الحقيقي $-x$ أو نقول أن العدد 0 يتوسط المجموعة \mathbb{R} .

$$D = \mathbb{R} - \{-\sqrt{3}; \sqrt{3}\}$$

● معناه $x \in \mathbb{R} - \{-\sqrt{3}; \sqrt{3}\}$ يكافئ $x \neq \sqrt{3}$ و $x \neq -\sqrt{3}$ معناه $-x \in D$ يكافئ $-x \neq \sqrt{3}$ و $-x \neq -\sqrt{3}$

$$D = [-1; 1]$$

● معناه $x \in [-1; 1]$ يكافئ أن $-1 \leq x \leq 1$ معناه أن $-x \in [-1; 1]$

$$D =]-\infty; -2[\cup]2; +\infty[$$

● معناه أن $x \in]-\infty; -2[\cup]2; +\infty[$ يكافئ $x \geq 2$ أو $x \leq -2$ ومعناه أن :

$$-x \in]-\infty; -2[\cup]2; +\infty[$$

في كل حالة نقول عن المجموعة D أنها متناظرة بالنسبة إلى العدد 0

(2) قارن $f(x)$ و $f(-x)$ ثم $g(x)$ و $g(-x)$ وهذا من أجل $x \in D$.

ليكن $x \in D$:

$$f(x) = x^2 - 1 \text{ معناه أن } f(-x) = (-x)^2 - 1 \text{ ويكافئ } f(-x) = x^2 - 1 \text{ معناه أن :}$$

$$f(-x) = f(x)$$

$$g(x) = x^3 - x \text{ معناه } g(-x) = -x^3 + x \text{ يكافئ } g(-x) = -(x^3 - x) \text{ ويعني أن}$$

$$g(-x) = -g(x)$$

(3) M و M' نقطتان من أحد المنحنيين فاصلتيهما x و $-x$ على الترتيب حيث $x \in D$ ، بين أن النقطة M'

صورة النقطة M بتناظر مطلوب عناصره في كل حالة من الحالتين.

- M و M' نقطتان من منحنى الدالة f إذن : $(M(x ; f(x))$ و $(M'(-x ; f(-x))$ بما أن :

$$f(-x) = f(x)$$

لنقطتين فاصلتين متعاكستين ونفس الترتيب إذن هما متناظرتان بالنسبة إلى محور الترتيب
 ومنه : النقطة M' صورة النقطة M بالتناظر المحوري بالنسبة إلى محور الترتيب

- M و M' نقطتان من منحنى الدالة f إذن : $(M(x ; g(x))$ و $(M'(-x ; g(-x))$ بما أن :

$$g(-x) = -g(x)$$

لنقطتين فاصلتين متعاكستين وترتيبين متعاكسين إذن هما متناظرتان بالنسبة إلى مبدأ المعلم.
 ومنه : النقطة M' صورة النقطة M بالتناظر المركزي مركزه مبدأ المعلم.

(4) ما هي الخصية الهندسية التي يتميز بها كل منحن ؟

منحنى الدالة f متناظر بالنسبة إلى محور الترتيب ومنحنى الدالة g متناظر بالنسبة إلى مبدأ المعلم.

تعريف : D مجموعة جزئية من \mathbb{R} ، f دالة معرفة على D .

- نقول عن الدالة f أنها **زوجية** إذا كانت المجموعة D متناظرة بالنسبة إلى 0
 وكان لكل x من D : $f(-x) = f(x)$

- نقول عن الدالة f أنها **فردية** إذا كانت المجموعة D متناظرة بالنسبة إلى 0
 وكان لكل x من D : $f(-x) = -f(x)$

ملاحظات :

- التمثيل البياني لدالة **زوجية** في مستو منسوب إلى معلم **متعامد** يكون متناظرا بالنسبة إلى **محور الترتيب** .
- التمثيل البياني لدالة **فردية** في مستو منسوب إلى معلم يكون متناظرا بالنسبة إلى **مبدأ المعلم** .

تمرين : 49 صفحة 78 أدرس شفعية الدوال الآتية المعرفة على \mathbb{R} :

$$f : x \mapsto x^2 - 1 \quad ; \quad g : x \mapsto x^2 + 3x \quad ; \quad h : x \mapsto \frac{x}{x^2 + 1} \quad ; \quad t : x \mapsto -x^3 + x$$

الحل :

كل الأعداد الحقيقية متناظرة بالنسبة إلى 0 .

$$f(-x) = (-x)^2 - 1 = x^2 - 1 = f(x) \quad \bullet$$

إذن الدالة f زوجية.

$$g(-x) = (-x)^2 + 3(-x) = x^2 - 3x \quad \bullet$$

ومنه : $g(-x) = g(x)$ و $g(-x) = -g(x)$

وبالتالي الدالة g ليست زوجة ولا فردية.

$$h(-x) = \frac{-x}{(-x)^2 + 1} = -\frac{x}{x^2 + 1} = -h(x) \quad \bullet$$

إذن الدالة h فردية.

$$t(-x) = -(-x)^3 + (-x) = x^3 - x = -(x^3 + x) = -t(x) \quad \bullet$$

إذن الدالة t فردية.

تمرين : 50 صفحة 78 أدرس شفعية الدوال الآتية المعرفة على \mathbb{R}^* :

$$f : x \mapsto -\frac{1}{x^2} \quad ; \quad g : x \mapsto x + \frac{1}{x} \quad ; \quad h : x \mapsto x + \frac{1}{x^2} \quad ; \quad t : x \mapsto x^2 + \frac{1}{x^2}$$

الحل :

كل عدد حقيقي غير معدوم له نظير بالنسبة إلى 0 .

$$f(-x) = -\frac{1}{(-x)^2} = -\frac{1}{x^2} = f(x) \quad \bullet$$

إذن الدالة f زوجية.

$$g(-x) = -x + \frac{1}{-x} = -(x + \frac{1}{x}) = -g(x) \quad \bullet$$

إذن الدالة g فردية.

ومنه : $h(-x) \neq -h(x)$ و $h(-x) \neq h(x)$ $h(-x) = -x + \frac{1}{(-x)^2} = -x + \frac{1}{x^2}$ ●
 إذن الدالة h ليست زوجية ولا فردية.

$t(-x) = (-x)^2 + \frac{1}{(-x)^2} = x^2 + \frac{1}{x^2} = t(x)$ ●
 إذن الدالة t زوجية.

تمرين : 51 صفحة 78

الشكل المقابل يمثل جزءا من المنحني الممثل لدالة f معرفة على \mathbb{R} .
 أكمل الرسم ، بفرض :
 ● الدالة f فردية .
 ● الدالة f زوجية .

الحل :

● الدالة f فردية .
 المنحني يكون متناظر بالنسبة إلى مبدأ المعلم .

● الدالة f زوجية .
 بما أن المعلم متعامد فإن المنحني يكون متناظر بالنسبة إلى محور الترتيب .

