

MECANIQUE

Remarque : contrairement à l'énoncé nous utiliserons les notations condensées $\dot{\theta}, \ddot{\theta}$...

1.1. on obtient $l/L = \sqrt{2/3}$

1.2. $E_c = \frac{1}{2} I_O \dot{\theta}^2 = \frac{3}{4} m l^2 \dot{\theta}^2$ $E_p = -mgl \cos \theta$ à une constante près

1.3. $E_c + E_p = \text{cste}$ constitue déjà une équation différentielle pour $\theta(t)$; puis $\frac{3}{2} \ddot{\theta} + g \sin \theta = 0$

1.4. $\ddot{\theta} + \omega_1^2 \theta = 0$ qui a pour solution $\theta(t) = \theta_0 \cos \omega_1 t$ avec $\omega_1 = \sqrt{\frac{2g}{3l}} = \sqrt{3} \approx 1,7 \text{ rad.s}^{-1}$

2.1. X représente l'allongement du ressort par rapport au repos, on a donc $E_r = \frac{1}{2} K X^2$

2.2. $E = \frac{1}{2} K X^2 + \frac{1}{2} M \dot{X}^2 = \text{cste}$ $X + \omega^2 \dot{X} = 0$ 2.3. $X(t) = X_0 \cos \omega t$ en posant $\omega = \sqrt{\frac{K}{M}}$

3.1. $\vec{\Gamma}_O = \ddot{X} \vec{e}_x$ est l'accélération de la plateforme dans le référentiel du laboratoire

$\frac{d^2 \vec{OG}}{dt^2} = -\dot{\theta}^2 \vec{e}_r + \ddot{\theta} \vec{e}_\theta$ est l'accélération de G dans le référentiel lié à la plateforme

par composition des accélérations $\vec{\Gamma}_G = (\ddot{X} - \dot{\theta}^2 \sin \theta + \ddot{\theta} \cos \theta) \vec{e}_x + (\dot{\theta}^2 \cos \theta + \ddot{\theta} \sin \theta) \vec{e}_y$

3.2. $R + mg = \vec{\Gamma}_G$ donne $N = m(\dot{\theta}^2 \cos \theta + \ddot{\theta} \sin \theta + g)$ et $T = m(\ddot{X} - \dot{\theta}^2 \sin \theta + \ddot{\theta} \cos \theta)$

3.3. $\vec{\sigma}_G = \vec{\sigma}^* = I_G \ddot{\theta} \vec{e}_z$

3.4. pour la barre, seule $\vec{R}$ a un moment en G ; on obtient par le TMC :

$$I_G \ddot{\theta} = -Tl \cos \theta - Nl \sin \theta$$

3.5. après simplification $I_G \ddot{\theta} = -ml \cos \theta \ddot{X} - ml^2 \ddot{\theta} - mgl \sin \theta$ puis $\frac{3}{2} \ddot{\theta} = -\cos \theta \ddot{X} - g \sin \theta$

3.6. $\alpha = 2/3$ 3.7. $M \ddot{X} = -KX - T = -KX - m(\ddot{X} - \dot{\theta}^2 \sin \theta + \ddot{\theta} \cos \theta)$

3.8. en négligeant le terme en $\dot{\theta}^2$ et en posant $\omega_2 = \sqrt{\frac{K}{M+m}}$ et $\beta = \frac{m}{M+m}$

3.9. $\omega_2 = 2 \text{ rad.s}^{-1}$ $\alpha\beta = \frac{1}{2}$

3.10. en posant $X/l = u$ le système s'écrit $\begin{cases} \ddot{\theta} + \omega_1^2 \theta = -\ddot{u} \\ \ddot{u} + \omega_2^2 u = -\beta \ddot{\theta} \end{cases}$; on remarque que les valeurs numériques pour ω_1 et ω_2 sont bien celles calculées plus haut ; en substituant les solutions

proposées on obtient
$$\begin{cases} (-\Omega^2 + \omega_1^2)A = \alpha\Omega^2 B \\ (-\Omega^2 + \omega_2^2)B = \beta\Omega^2 A \end{cases}$$
 puis par nullité du déterminant ou par simple substitution la condition nécessaire $(\omega_1^2 - \Omega^2)(\omega_2^2 - \Omega^2) = \alpha\beta\Omega^4$ que l'on vérifie numériquement.

3.11. On vérifie facilement que les conditions initiales sont respectées. Il est plus fastidieux de prouver par substitution directe que c'est bien une solution. Si l'on a quelques connaissances sur les systèmes linéaires on peut se contenter de vérifier les rapports A/B pour chacun des deux termes (ou modes) propres.

THERMODYNAMIQUE

1.1.1. $j = -\lambda \text{ grad } T$ en W.m^{-2}

1.1.2. $\Phi(r) = P_t$ est indépendant de r (j est à flux conservatif)

1.1.3. $\Phi(r) = -\lambda \frac{dT}{dr} 2\pi r L = P_t$

1.1.4. $\frac{dT}{dr} = -\frac{P_t}{2\pi\lambda L} \frac{1}{r}$ d'où $T_{\text{int}} - T_{\text{ext}} = \frac{P_t}{2\pi\lambda L} \ln \frac{r_{\text{ext}}}{r_{\text{int}}}$ et donc $R_{\text{cond}} = \frac{1}{2\pi\lambda L} \ln \frac{r_{\text{ext}}}{r_{\text{int}}}$

1.1.5. après DL $R_{\text{cond}} \approx \frac{e}{\lambda S}$ (formule connue) avec $S = 2\pi r_{\text{int}} L$

1.2.1. $\Phi_e = \sigma T_{\text{ext}}^4 2\pi r_{\text{ext}} L$

1.2.2. $\Phi_{\text{net}} = \sigma (T_{\text{ext}}^4 - T_{\text{mur}}^4) 2\pi r_{\text{ext}} L$

1.2.3. $T_{\text{ext}}^4 - T_{\text{mur}}^4 \approx 4T_{\text{mur}}^3 (T_{\text{ext}} - T_{\text{mur}})$ d'où l'on déduit $R_{\text{rad}} = \frac{1}{8\pi\sigma T_{\text{mur}}^3 r_{\text{ext}} L}$

1.3.1. $T_{\text{mur}} < T_{\text{ext}} < T_{\text{int}}$ car transferts vers les T décroissantes

1.3.2.(a) les deux résistances sont en série, elles s'ajoutent :

$$T_{\text{int}} - T_{\text{mur}} = R_{\text{totale}} P_t = (R_{\text{cond}} + R_{\text{rad}}) P_t \quad \text{d'où} \quad T_{\text{int}} = T_{\text{mur}} + \frac{P_t}{2\pi L} \left(\frac{1}{\lambda} \ln \frac{r_{\text{ext}}}{r_{\text{int}}} + \frac{1}{4\sigma T_{\text{mur}}^3 r_{\text{ext}}} \right)$$

1.3.2.(b) $\frac{\partial}{\partial r_{\text{ext}}} T_{\text{int}} = 0$ donne $r_{\text{ext}} = \frac{\lambda}{4\sigma T_{\text{mur}}^3}$; comme bien sûr on a $r_{\text{int}} < r_{\text{ext}}$, le

minimum n'existe que si r_{int} est plus petit que cette valeur ; donc à la fois $r_{\text{int,max}} = r_{\text{crit}} = \frac{\lambda}{4\sigma T_{\text{mur}}^3}$

(vérification d'homogénéité conseillée...) ; quand $r_{\text{ext}} \rightarrow 0$ la résistance radiative tend vers l'infini ; quand $r_{\text{ext}} \rightarrow \infty$ la résistance de conduction de même, d'où l'existence d'un minimum.

$$r_{\text{int,max}} = r_{\text{crit}} \approx 8,2 \text{ cm} > r_{\text{int}}$$

$$R_{\text{cond}} \approx 0,39 \text{ K.W}^{-1} \quad R_{\text{rad}} \approx 0,80 \text{ K.W}^{-1}$$

1.3.2.(c) $T_{\text{int}} \approx 336 \text{ K} \quad T_{\text{ext}} \approx 312 \text{ K}$

1.3.2.(d)i.

$$T_{\text{int}} = \frac{P_t}{2\pi\lambda L} \ln \frac{r_{\text{ext}}}{r_{\text{int}}} + \sqrt[4]{\frac{P_t}{\sigma 2\pi r_{\text{ext}} L} + T_{\text{mur}}^4}$$

1.3.2.(d)ii. Par DL de la racine quatrième si $\frac{P_t}{T_{mur}^4} \approx \sigma 2\pi r_{ext} L$

1.3.2.(d)iii. On retrouve la condition $P_t = \Phi_{net} \approx \phi_a$ soit aussi $\Phi_e \approx \Phi_a$ ou $T_{ext} \approx T_{mur} \dots$

1.4.1. $\frac{dU}{dt} = -\Phi_{net}$ 1.4.2. d'après la définition de C_v : $\frac{dU}{dt} = C_v \frac{dT_s(t)}{dt}$

1.4.3. $\frac{1}{R_{rad}}(T_s - T_{mur}) = -C_v \frac{dT_s(t)}{dt}$

1.4.4. $T_s(t) = T_{mur} + (T_0 - T_{mur}) \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$ avec $\tau = R_{rad} C_v \approx 650 \text{ s}$ après avoir recalculé, pour $r_{ext} \approx 0,05 \text{ cm}$, la valeur $R_{rad} \approx 1,30 \text{ K.W}^{-1}$

2.1.1. nous noterons $\pi r_{int}^2 = s$ la section du cylindre, qui apparaît constamment dans la suite ;

$x_{G,A} = x_{G,0} - \frac{s}{k_1} p_A$ et symétriquement $x_{D,A} = x_{D,0} + \frac{s}{k_1} p_A$

2.1.2. $V_A = s(x_{D,A} - x_{G,A}) = s\left(L + 2\frac{s}{k_1} p_A\right) \approx 5,61 \text{ L}$ 2.1.3. $T_A = \frac{p_A V_A}{n_g R} \approx 337,5 \text{ K}$

2.1.4.(a) (énoncé plutôt confus ici, car α intervient dans les réponses)

$V_B = \alpha V_A \approx 7,3 \text{ L}$ et $V_B = s(x_{D,B} - x_{G,B})$ et toujours (par symétrie) $x_{D,B} + x_{G,B} = x_{D,0} + x_{G,0}$

d'où
$$\begin{cases} x_{D,B} = \frac{1}{2}\left(x_{D,0} + x_{G,0} + \frac{\alpha V_A}{s}\right) \\ x_{G,B} = \frac{1}{2}\left(x_{D,0} + x_{G,0} - \frac{\alpha V_A}{s}\right) \end{cases}$$

2.1.4.(b) de la même manière qu'en 2.1.1. : $p_B = \frac{k_1}{s}(x_{D,B} - x_{D,0})$ qui donne après calcul :

$p_B = \frac{(\alpha - 1)k_1 L}{2s} + \alpha p_A \approx 1,68 \cdot 10^4 \text{ Pa}$ 2.1.4.(c) $T_B = \frac{p_B V_B}{n_g R} \approx 738 \text{ K}$

2.1.4.(d) remarque : « travail échangé » ne définit pas clairement la convention de signe...

le travail reçu par le gaz est égal à la diminution de l'énergie potentielle élastique des deux ressorts (elles-mêmes égales par symétrie), donc

$W_{A \rightarrow B} = -2 \times \frac{1}{2} k_1 \left[(x_{D,B} - x_{D,0})^2 - (x_{D,A} - x_{D,0})^2 \right]$ qui donne $W_{A \rightarrow B} = -\frac{s^2}{k_1} (p_B^2 - p_A^2) \approx -22,5 \text{ J}$

2.1.4.(e) $Q_1 = \Delta U - W = n_g \frac{R}{\gamma - 1} (T_B - T_A) - W \approx 189 \text{ J}$

2.1.4.(f) $\Delta S_{AB} = n_g R \left(\frac{\gamma}{\gamma - 1} \ln \frac{T_B}{T_A} - \ln \frac{p_B}{p_A} \right) \approx 0,37 \text{ J.K}^{-1}$

2.2.1. les relations sont $x_{G,C} = x_{G,0} - \frac{s}{2k_1} p_C$, $x_{D,C} = x_{D,0} + \frac{s}{k_1} p_C$ et $V_C = s(x_{D,C} - x_{G,C})$

$V_C = s(x_{D,0} - x_{G,0}) + \frac{3}{2} \frac{s^2}{k_1} p_C$ s'écrit $\beta p_C + V_0$ pourvu que $V_0 = sL$ et $\beta = \frac{3}{2} \frac{s^2}{k_1}$

2.2.2.
$$\Delta U_{BC} = \frac{n_g R}{\gamma - 1} (T_C - T_B) = \frac{p_C V_C - n_g R T_B}{\gamma - 1} = \frac{p_C (\beta p_C + V_0) - n_g R T_B}{\gamma - 1}$$

2.2.3.
$$W_{B \rightarrow C} = \frac{1}{2} (2k_1) \left[(x_{G,B} - x_{G,0})^2 - (x_{G,C} - x_{G,0})^2 \right] + \frac{1}{2} k_1 \left[(x_{D,B} - x_{D,0})^2 - (x_{D,C} - x_{D,0})^2 \right]$$

qui devient :
$$W_{B \rightarrow C} = \frac{s^2}{k_1} \left(\frac{3}{2} p_B^2 - \frac{3}{4} p_C^2 \right)$$

2.2.4. $\Delta U = W$
$$a = \frac{3}{4} \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \frac{s^2}{k_1} \quad b = \frac{sL}{\gamma - 1} \quad c = -\frac{n_g R T_B}{\gamma - 1} - \frac{3}{2} \frac{s^2}{k_1} p_B^2 \quad (\text{et alors ?})$$