

Physique PC1 – ENS de Paris – Session 2009

(durée : 6 heures)

1 Deux illustrations des principes de Boltzmann

1.1 Le facteur de Boltzmann

Q1. La condition d'équilibre d'un petit volume $d\tau$ à l'altitude z dans le champ de pesanteur uniforme donne : $-\partial P/\partial z = \rho g$.

Q2. La loi des G.P. : $P(z) = \rho(z)RT(z)/M$

Q3. Par intégration : $P(z) = P_0 \exp(-Mgz/RT)$

Q4. Avec la loi des G.P. : $n(z) = N_A P(z)/RT$ soit $E_p(z) = mgz$

Q5. La hauteur caractéristique est définie par l'égalité entre l'énergie potentielle et $k_B T$ soit $mgH = k_B T$ ou $MgH = RT$ ce qui donne $H = 8.5$ km. Alors $n(z) = n_0 \exp(-z/H)$.

Q6. L'hypothèse isotherme est très grossière pour l'atmosphère terrestre.

1.2 L'interprétation microscopique de l'entropie

Q.7 Il y a 2^N états distincts. Les états minimisant l'énergie sont les deux états $\sigma_i = 1 \ \forall i$ et $\sigma_i = -1 \ \forall i$; l'énergie minimum est $E_{\min} = -JN/2$.

Q.8 $m(C) \in [-1, +1]$ et $E(C) = (-J/2N) \sum_i \sigma_i^2 (Nm(C)) = -JNm^2(C)/2$.

Q9. En notant n_+ et n_- les nombres de particules ayant les valeurs $+1$ et -1 on écrit $mN = N - 2n_-$ et de même $mN = -N + 2n_+$ soit $n_- = N(1-m)/2$ et $n_+ = N(1+m)/2$.
Et $\Omega_m^N = N! / (n_-! n_+!)$, combinaison de $n_+ + n_- = N$ termes de même n_+, n_- .

Q10. Avec le développement de Stirling : $\ln(\Omega_m^N) = N \ln N - n_+ \ln n_+ - n_- \ln n_- = -N(1+m)/2 \ln(1+m)/2 - N(1-m)/2 \ln(1-m)/2$

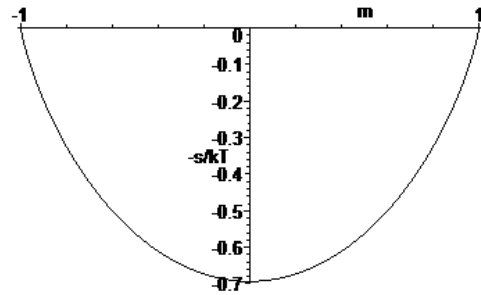
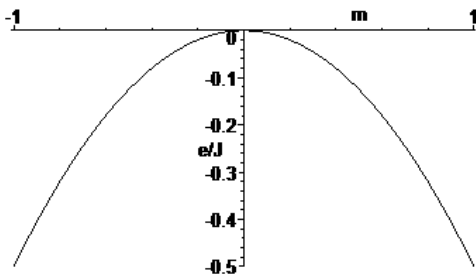
Q11. L'énergie libre est le bon potentiel thermodynamique à Température constante et $F^* = U - TS$ soit ici $U = E(C)$ et $S = k_B \ln \Omega$ d'après la loi de Boltzmann, avec les résultats précédents on obtient bien la relation fournie par l'énoncé pour $f^* = F^*/N$.

Q12. Il faut minimiser $f^*(m)$ à T donnée.

Q13.

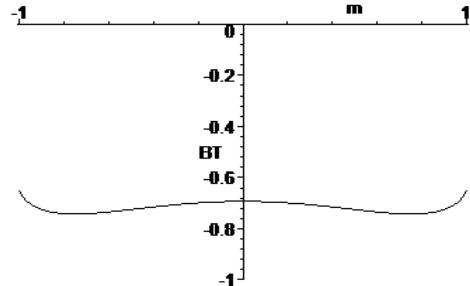
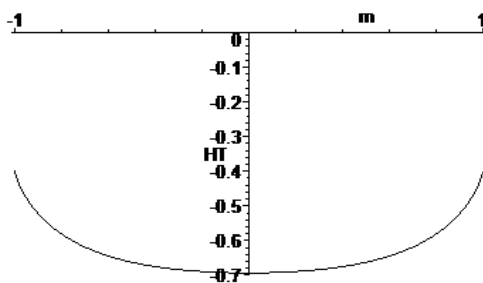
$e(m) \in [-J/2, 0]$, dérivées $= \pm J$ en ± 1

$-Ts(m) \in [-k_B T \ln 2, 0]$ et dérivées $\pm \infty$ en ± 1



Q14. L'énergie e est minimum en $m = \pm 1$ (comme déjà vu) alors que le second terme entropique est minimum en 0. Le terme entropique doit dominer à Haute Température puisqu'il est proportionnel à T et inversement à Basse Température.

Q15. Les extremums locaux doivent donner les valeurs de m en fonction de T . On voit deux cas possibles pour $f^*(m)$ suivant les valeurs de T :



Q16. La frontière est donnée en écrivant que la dérivée seconde de f^* est nulle en $m = 0$ pour $T = T_c$, ceci aboutit à : $k_B T_c = J$ soit $T_c = J/k_B$.

Q17. Pour obtenir les minimums locaux de f^* on dérive f^* par rapport à m : $0 = -Jm + (k_B T/2) \ln(1+m)/(1-m)$ soit $\frac{1}{2} \ln(1+m)/(1-m) = Jm/k_B T$, or $\frac{1}{2} \ln(1+m)/(1-m) = \text{Arctanh}(m)$ et on ne garde que les solutions différentes de 0.

Q18. Pour $T > T_c$, le minimum de f^* est en $m = 0$, pas d'aimantation alors qu'elle est possible en $m \neq 0$ pour $T < T_c$.

2 Mesure acoustique de R

2.1 Vitesse des ondes sonores dans un gaz parfait

Q19. Dans le second membre de l'équation d'Euler on néglige $\rho_0 g$ devant $\text{grad } P \sim P/l$, ce qui est habituel pour les gaz la longueur caractéristique l étant très inférieure au H de la question Q5.

Q20. On ne garde que les termes du premier ordre, approximation acoustique c'est-à-dire $v \ll c_a$ et $\rho_1 \ll \rho_0$.

Q21. En négligeant le terme $\mathbf{v} \cdot \text{grad } \rho \sim v \rho_1/l \ll \rho_0 v/l \sim \rho_0 \text{div } \mathbf{v}$ on obtient l'équation (2)

Q22. $\chi_s = + (1/\rho_0)(\partial p_1/\partial P_1) \rightarrow \partial P_1/\partial t = -(1/\chi_s) \operatorname{div} \mathbf{v}$.

Q23. Classique car $\operatorname{div}(\operatorname{grad} \dots) = \Delta \dots$ et $c_a^2 = 1/\rho_0 \chi_s$.

Q24. La différentielle de l'entropie d'un G.P. est $dS = C_V dT/T + PdV/T$ et $dS = 0$ pour une isentropique entraîne $PdV = -C_V dT$ en ajoutant l'équation des G.P. : $dT = (PdV + VdP)/R$ on aboutit à $PdV/(R + C_V) + C_V VdP = 0$ et la relation de Mayer donne $C_P PdV + C_V VdP = 0$ soit $PV^{C_P/C_V} = \text{Cte}$.

puis
$$\chi_s = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_s = -\frac{1}{V} \left(-\frac{1}{\gamma} \frac{V}{P} \right) = \frac{1}{\gamma P}$$

Q25. L'argon, gaz rare, est un « bon » gaz parfait du fait de son inertie chimique. Gaz monoatomique donc $\gamma = 5/3$.

Q26. $c_a = 318.6 \text{ ms}^{-1}$.

2.2 Résonances acoustiques dans une cavité sphérique

Q27.
$$\Delta P_1(r, t) = \frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} (r P_1(r, t)) = \frac{1}{r} \frac{d^2 \Psi}{dr^2} = \frac{1}{c_a^2} \frac{1}{r} \frac{d^2 \psi}{dt^2} \quad \text{d'où} \quad \frac{d^2 \Psi}{dr^2} = \frac{1}{c_a^2} \frac{d^2 \psi}{dt^2}$$
. Bien sûr en $r = 0$, $\psi(0, t) = 0$ car $P_1(0, t)$ doit être définie.

Q28. L'équation en $\underline{\psi}(r)$ est une équation harmonique dont la solution peut s'écrire : $\underline{\psi}(r) = A \sin(kr + B)$ et la condition au limite en $r = 0$ donne $B = 0$, d'où l'expression de l'énoncé pour $P_1(t, r)$.

$$v(r, t) = -i \frac{A}{\rho_0 c_a} \left(\frac{\cos kr}{r} - \frac{\sin kr}{kr^2} \right) e^{-i\omega t} \quad \text{sur } \mathbf{u}_r.$$

Q29. A partir de l'équation (1) de l'énoncé :

Q30. $v(a, t) = 0$ car la vitesse est uniquement radiale.

Q31. $v(a, t) = 0$ implique $\tan ka = ka$ soit $k_p = \omega_p/c_a = z_p/a$ où les z_p sont solutions de $\tan z = z$.

Q32. Interprétation graphique classique avec l'intersection de la courbe $\tan z$ et de la première bissectrice. A part la première racine qu'on trouve numériquement $z_1 = 4.49$, les autres racines sont proches des asymptotes de la courbe $\tan z$ soit $z_p \cong (2p + 1) \pi/2$; en posant $z_p = (2p + 1) \pi/2 + \varepsilon_p$ le développement limité donne $\varepsilon_p = -1/p\pi + \dots$ pour $p > 1$.

Q33. Avec $a = 8.95 \text{ cm}$ on obtient $v_1 = 2544 \text{ Hz}$. (précision de la mesure du volume ?)

2.3 Le problème de la mesure du volume de la cavité

Q34. Par analyse dimensionnelle $v_p \cong p c/a$ soit $v_1 \cong 3.35 \cdot 10^9 \text{ Hz} = 3.35 \text{ GHz}$, domaine des micro ondes. Si on est intéressé uniquement par c_a , le rapport des fréquences de même mode dans les deux domaines acoustique et électromagnétique donne le rapport c_a/c .

Q35. Voir cours ...

Q36. Voir cours avec $c^2 = 1/\mu_0 \varepsilon_0$.

Q37. Au voisinage d'un métal parfaitement conducteur dans lequel le champ électro-magnétique est nul on doit avoir $E_{//} = 0$ par continuité donc ici : $E_\theta(a, t) = 0$ et $E_\phi(a, t)$

= 0. Pour le champ B c'est la composante normale qui doit être nulle par continuité : $B_r(a, t) = 0$.

Q38. Si l'on cherchait une solution en $E_r(r, t)$, le théorème de Gauss donnerait par intégration sur une sphère de rayon r , un champ nul puisqu'il n'y a aucune charge dans la cavité.

Q39. Cours classique avec l'éventuel piège ici de la définition en $e^{-i\omega t}$ et on aboutit à : $\Delta \underline{E}(\underline{x}) = -\omega^2/c^2 \underline{E}(\underline{x})$, de même pour $\underline{B}(\underline{x})$.

Q40. L'opérateur Laplacien n'étant pas fourni il faut revenir à l'opérateur **rot(rot ...)** et en utilisant le formulaire du début de l'énoncé on retombe bien sur l'équation affichée avec $k = \omega/c$ comme attendu.

Q41. $\underline{E}(a) = 0$ comme prévu en Q.37 pour une composante selon ϕ . Avec $i\omega \underline{B}(\underline{x}) = \text{rot } \underline{E}$ on obtient bien une composante radiale de $\underline{B}(a)$ nulle et une composante sur $\underline{u}_\theta$ non nulle justifiée par des courants surfaciques dans le conducteur.

Q42. Par substitution on obtient :
$$f''(z) + \frac{f'(z)}{z} + \left(1 - \frac{2}{z^2}\right)f(z) = 0$$

Q42. Par substitution on obtient :

Q43. $f(ka) = 0$ implique encore $\tan ka = ka$, donc les mêmes solution z_p .

Q44. $v_1 = cz_1/a = 2.395 \text{ GHz}$.

Q45. c est remplacé par $c/\sqrt{\epsilon_r}$.

2.4 Prise en compte de l'élasticité de la cavité acoustique

Q46. $d^2x/dt^2 + \omega_c^2 x = P_1(t)/\mu$ avec $\omega_c^2 = \kappa/\mu S$

Q47. Avec une excitation $P_1(t)$ harmonique à la fréquence ω : $(\omega_c^2 - \omega^2)\underline{x} = \underline{P}_1/\mu$ et $\underline{v} = -i\omega \underline{x}$

alors :
$$Y(\omega) = \frac{\underline{v}}{\underline{P}_1} = \frac{i\omega}{(\omega_c^2 - \omega^2)\mu}$$

Q48. La condition aux limites de la question 29 est modifiée : $v_r(a, t) = Y(\omega) P_1(t)$ soit :

$$v(a, t) = -i \frac{A}{\rho_0 c_a} \left(\frac{\cos ka}{a} - \frac{\sin ka}{ka^2} \right) e^{-i\omega t} = Y(\omega) \times A \frac{\sin ka}{a} e^{-i\omega t}$$
 soit :

$$\left[\frac{1}{\tan ka} - \frac{1}{ka} \right] = \frac{\rho_0 c_a}{\mu} \frac{\omega}{\omega_c^2 (1 - (\omega^2 / \omega_c^2))}$$

Q49. On pose $\omega \equiv \omega'_p$ et $ka \equiv \omega'_p a / c_a$ puis $\omega'_p = \omega_p + \Delta$ et on développe la tangente puis au premier ordre en Δ/ω_p le premier et le second membre de l'équation. En utilisant l'égalité $\tan(\omega_p a / c_a) = \omega_p a / c_a$ il restera l'expression de l'énoncé avec $A = (\rho_0 c_a^2) / (a \mu \omega_c^2)$

Q50. Avec $p = 5$, $\omega_5 \approx (11\pi/2) c_a/a = 61.5 \cdot 10^3 \text{ rad.s}^{-1}$ et $(\omega_5/\omega_c) = 61.5 \cdot 10^3 / 85.3 \cdot 10^3 = 0.72$, alors $\Delta_p/\omega_p = -2.1 \cdot 10^{-6}$, la correction est faible comme attendue mais de l'ordre de la précision relative atteinte dans l'expérience (bas de page 6).

Q51. Il faudra écarter les valeurs de p telles que ω_p s'approche trop près de ω_c car dans ce cas l'admittance ne serait pas un infiniment petit permettant le développement. On remarque que $\omega_7/\omega_c = 1.008$, on pourra donc éliminer $p = 6, 7$ et 8 .

Q52. Parallèlement à la prise en compte de l'élasticité des parois pour les ondes acoustiques il faudrait revenir pour les résonances électromagnétiques sur l'hypothèse du conducteur parfait.

3 Mesure optique de R

3.1 Distribution des vitesses dans un gaz parfait

Q53. Calcul classique : $\delta^2 N = nv_0 \delta t \delta S / 6$

Q54. $\delta \mathbf{p} = 2mv_0 \mathbf{u}_x$, $\mathbf{u}_x$ étant le vecteur normal à la paroi.

Q55. Pendant δt pour les $\delta^2 N$ chocs, la paroi subit : $\delta \mathbf{F} = \delta^2 N (-\delta \mathbf{p}) / \delta t = - (1/3) nmv_0^2 \delta S \mathbf{u}_x$.
Donc une pression extérieure pour la paroi de $P = nmv_0^2 / 3$.

Q56. Avec l'équation des G.P. : $P = nN_A k_B T$ on identifie v_0 .

Q57. L'énergie de l'atome est l'énergie cinétique $E = \frac{1}{2} mv^2$ qu'on décompose selon les trois

axes : $dP = A e^{-\frac{mv_x^2}{2kT}} d^3x d^3v = A e^{-\frac{mv_x^2}{2kT}} dv_x e^{-\frac{mv_y^2}{2kT}} dv_y e^{-\frac{mv_z^2}{2kT}} dv_z d^3x$. La fonction $g(v) = e^{-\beta v^2}$ avec $\beta = m/2k_B T$.

$$A = \frac{1}{\iiint_{v_x, v_y, v_z} dP * V} = \frac{1}{\left(\int_{-\infty}^{+\infty} g(v) dv \right)^3 * V}$$

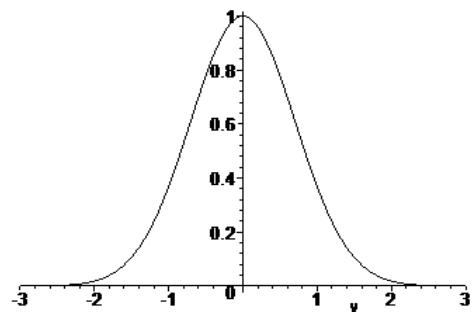
Q58. On détermine la constante A :
de l'enceinte contenant les atomes. Alors :

$$\langle v^2 \rangle = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} v_x^2 g(v_x) dv_x \left(\int_{-\infty}^{+\infty} g(v) dv \right)^2 + \int_{-\infty}^{+\infty} v_y^2 g(v_y) dv_y \left(\int_{-\infty}^{+\infty} g(v) dv \right)^2 + \int_{-\infty}^{+\infty} v_z^2 g(v_z) dv_z \left(\int_{-\infty}^{+\infty} g(v) dv \right)^2}{\left(\int_{-\infty}^{+\infty} g(v) dv \right)^3}$$

soit $\langle v^2 \rangle = 3/2\beta$.

Q59. La mi-largeur à $1/e$ est définie par v_t et $\exp(-\beta(v_t)^2) = 1/e$ ce qui donne $v_t = (1/\beta)^{1/2} = (2k_B T/m)^{1/2}$ ou $(2RT/M)^{1/2}$. Numériquement : $v_t = 517 \text{ ms}^{-1}$.

Q60. Le gaz parfait est défini pour les basses pressions où la grande distance relative entre atomes rend négligeable les interactions de Van der Waals, et le grand libre parcours moyen rend les collisions entre atomes très rares.



3.2 Elargissement Doppler des raies d'absorption moléculaires

Q61. $\omega_{\text{obs}} = \omega (1 - \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} / c) = \omega (1 - v_n / c)$ mais ceci n'est pas une question de cours du programme !

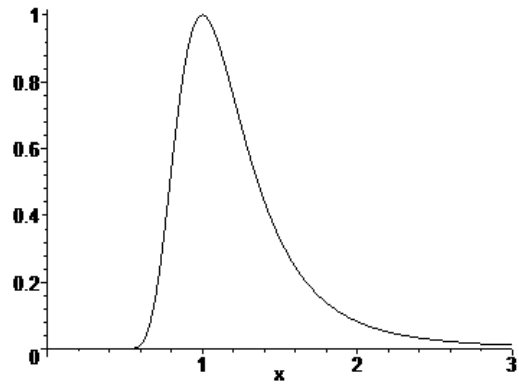
Q62. Variation sonore dans l'approche des automobiles et redshift en astrophysique.

$$\alpha(\omega) \propto n g(v_n) dv_n = n e^{-\beta \frac{(\omega_{\text{obs}} - \omega)^2 c^2}{\omega^2}} d\left(\frac{(\omega_{\text{obs}} - \omega)c}{\omega}\right) = \frac{n e^{-\beta \frac{(\omega_{\text{obs}} - \omega)^2 c^2}{\omega^2}}}{\omega} d\omega_{\text{obs}}$$

Q63. pour $\omega_{\text{obs}} = \omega_a$ et ω fixée dans l'élément différentiel. On identifie $u = c (\beta)^{1/2} = c/v_t$ et $\varpi = \omega_a$.

Q64. Voir le graphe ci-contre, $x = \omega/\omega_a$, où u a été pris égal à 10 alors qu'il est de l'ordre de $5.8 \cdot 10^5$! Le maximum de 1 est obtenu pour $\omega = \omega_a$ comme attendu. Les valeurs $\omega_{\pm}$ sont solutions de l'égalité :

$$\frac{\omega_a - \omega}{\omega} = \pm \frac{1}{u} \quad \text{soit} \quad \omega_{\pm} = \frac{\omega_a}{1 \pm \frac{1}{u}}$$



Q65. $u = c/v_t \cong 6 \cdot 10^5$ et $\Delta\omega = \omega_a v_t/c \ll \omega_a$ donc le terme « d'amplitude » en $1/\omega$ peut être considéré comme constant et égal à $1/\omega_a$ dans tout le domaine de la largeur à $1/e$.

Q66. $\left(\frac{\Delta\omega}{\omega_a}\right)^2 = \frac{v_t^2}{c^2} = \frac{2RT}{Mc^2}$ ce qui est le résultat proposé.

Q67. Si P décroît, alors n décroît et $\alpha(\omega)$ décroît aussi, donc $\tau(\omega)$ est croissant : les courbes 1 à 5 sont dans l'ordre des P croissantes.

Q68. Au maximum d'absorption pour la pression P_3 on mesure $\tau_m = 0.3$ et $\nu_a = 28953.694$ GHz. On en déduit $\tau_m = \exp(-\text{Cte } P_3 L)$, si $\alpha(\omega_{\pm}) = 1/e$, $\tau(\omega_{\pm}) = \exp(-\text{Cte } P_3 L/e) = (\tau_m)^{1/e} = 0.642$ que graphiquement on fait correspondre à $\nu_{\pm}$, l'écart à ν_a est mesuré au double décimètre puis converti en fréquence et $\Delta\nu = 52$ MHz.

$$R = \frac{1710^{-3}(310^8)^2}{2 \cdot 273.15} \left(\frac{59.910^6}{28953.69410^9} \right)^2 = 8.3187$$

Q69. Application numérique : mais le nombre de chiffres significatifs fiables est inférieur à celui de la donnée du début du problème et devrait s'arrêter à 8.32 ! La mesure est assez décevante ... ce n'est pas de la métrologie.

Q70. Causes d'élargissement : élargissement naturel ou intrinsèque, indépendant des conditions du gaz (mécanique quantique) et élargissement collisionnel en tenant compte des collisions entre atomes du gaz, donc sensible à la densité de particules c'est à dire à la pression.
