

Soal Materi UTS

Stochastic Processes

Outline:

1. Introduction to Stochastic Processes
2. Monte Carlo Simulation
3. Markov Chain

Soal:

1. Di suatu labirin (maze) ada 3 alternatif jalan untuk keluar yaitu jalan A, B, dan C. Hasil catatan menunjukkan tikus percobaan yang mencoba lolos dari labirin tersebut, 30% menggunakan jalan A, 50% menggunakan jalan B, dan 20% menggunakan jalan C. Dan catatan juga menunjukan bahwa 80% tikus yang mencoba jalan A, 75% yang mencoba jalan B dan 92% yang mencoba jalan C, gagal keluar.
 - a. Berapa peluang seekor tikus akan lolos dari labirin
 - b. Berapa peluang seekor tikus yang lolos menggunakan jalan C.

Jawab:

1. Peluang lolos

- dari jalan A = 30% = 0.3
- dari jalan B = 50% = 0.5
- dari jalan C = 20% = 0.2

catatan:

- tikus gagal dari jalan A = 80% = 0.8
- B = 75% = 0.75
- C = 92% = 0.92

↓ maka

- tikus berhasil dari jalan A = 20% = 0.2
- B = 25% = 0.25
- C = 8% = 0.08

Diketahui:

- $P(X) = \text{tikus yg lolos}$
- $P(y_1) = \text{tikus lewat jalan A} = 0.3$
- $P(y_2) = B = 0.5$
- $P(y_3) = C = 0.2$
- $P(x|y_1) = \text{tikus yg lolos lewat A} = 0.2$
- $P(x|y_2) = B = 0.25$
- $P(x|y_3) = C = 0.08$

a) Peluang seekor tikus lolos dari labirin

$$P(X) = \sum_{i=1}^n P(x|y_i) \cdot P(y_i) = P(x|y_1) \cdot P(y_1) + P(x|y_2) \cdot P(y_2) + P(x|y_3) \cdot P(y_3)$$

$$= (0.2 \cdot 0.3) + (0.25 \cdot 0.5) + (0.08 \cdot 0.2)$$

$$= 0.06 + 0.125 + 0.016$$

$$= 0.201$$

b) Peluang seekor tikus lolos melalui jalan C

use bayes rule:

$$P(y_3|x) = \frac{P(x|y_3) \cdot P(y_3)}{P(X)}$$

$$= \frac{0.2 \cdot 0.08}{0.201}$$

$$= 0.0796$$

2. Kedatangan pelanggan ke sebuah toko mengikuti non-homogeneous Poisson process. Pada jam 10.00-12.00 siang, laju kedatangan pelanggan meningkat secara linear dari 2 sampai 4 orang per jam, dan kemudian lajunya konstan selama 2 jam berikutnya, dan dari jam 14.00 sampai jam 18.00 tidak ada pelanggan yang datang.
- Rumuskan model laju kedatangan pelanggan di supermarket tersebut
 - Tentukan peluang paling banyak ada 1 orang di toko tersebut antara jam 10:30 dan 11:30.

Jawab:



$$2. a) \lambda(t) = \begin{cases} t+2 & 0 \leq t \leq 2 \\ 4 & 2 \leq t \leq 4 \\ 0 & 4 \leq t \leq 8 \end{cases}$$

$$b) \text{jam } 10.00 \rightarrow t = 0$$

$$10.30 \rightarrow t = 1/2$$

$$11.30 \rightarrow t = 3/2$$

$$\lambda(t) = \int_{1/2}^{3/2} (t+2) dt$$

$$= \left[\frac{1}{2} t^2 + 2t \right]_{1/2}^{3/2}$$

$$= \left[\frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} \right)^2 + 2 \left(\frac{3}{2} \right) \right] - \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \right)^2 + 2 \left(\frac{1}{2} \right) \right]$$

$$= \left[\frac{9}{8} + 3 \right] - \left[\frac{1}{8} + 1 \right]$$

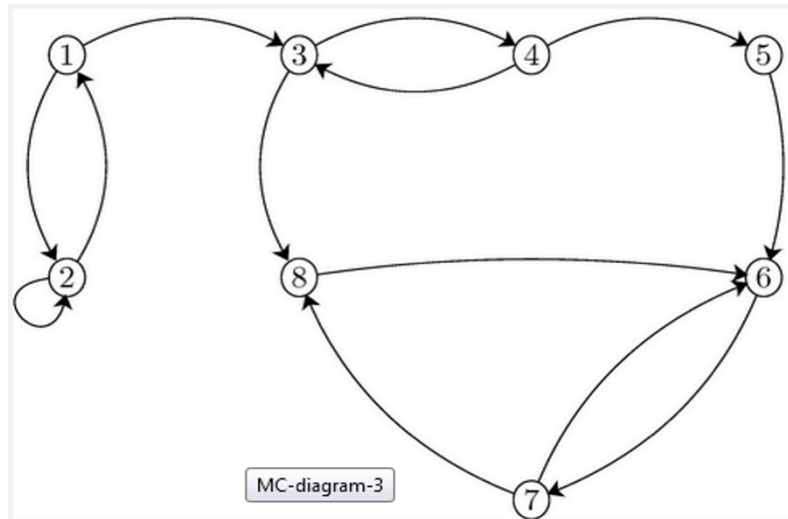
$$= \frac{33}{8} - \frac{9}{8} = 3$$

$$P(N(3/2) - N(1/2) \leq 1) = P(N(3/2) - N(1/2) = 0) + P(N(3/2) - N(1/2) = 1)$$

$$= \frac{3^0 \cdot e^{-3}}{0!} + \frac{3^1 \cdot e^{-3}}{1!}$$

$$= 0.0498 + 0.1494 = 0.1992$$

3. Consider the Markov chain shown in figure. It is assumed that when there is an arrow from state i to state j , then $p_{ij} > 0$. Find the equivalence classes for the Markov chain.



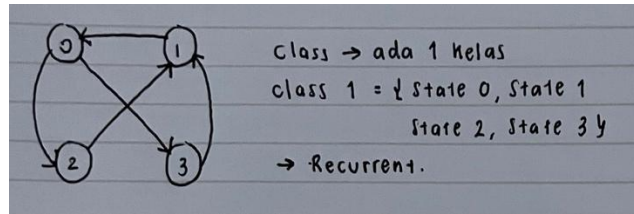
Jawab:

Terbagi menjadi 4 kelas

- Class 1 = {State 1, State 2}
 - Class 2 = {State 3, State 4}
 - Class 3 = {State 5}
 - Class 4 = {State 6, State 7, State 8}
4. Let the Markov chain consisting of the states 0, 1, 2, 3 have the transition probability matrix. Determine which states are transient and which are recurrent.

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Jawab:



5. Seseorang pecandu kopi selalu mengganti-ganti antar 2 merk kopi (misalnya A dan B) dari minggu ke minggu. Jika 2 minggu berturut-turut dia minum kopi A, maka peluang dia minum kopi B pada minggu ke 3 adalah 0.6. Jika minggu pertama dia minum kopi A dan minggu kedua dia minum kopi B maka pada minggu ke 3 dia minum kopi A dengan peluang 0.5. Jika minggu pertama dia minum kopi B dan minggu kedua dia minum kopi A maka pada minggu ke 3 dia minum kopi A lagi dengan peluang 0.2. Dan jika 2 minggu berturut-turut dia minum kopi B, maka peluang dia minum kopi B pada minggu ke 3 dengan peluang 0.3
- Tentukan matrix dan diagram peluang transisinya
 - Jika dia minum kopi A dalam 2 minggu berturut-turut, berapa peluang dia minum kopi A lagi pada minggu ke lima.

(Jawaban di halaman selanjutnya)

Jawab:

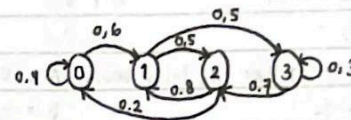
5. Diketahui

Week	1	2	3	=> state
A	A	B	$\rightarrow 0.6$	State 0 = AA
A	B	A	$\rightarrow 0.5$	State 1 = AB
B	A	A	$\rightarrow 0.2$	State 2 = BA
B	B	B	$\rightarrow 0.3$	State 3 = BB

a) Tentukan matrix dan diagram transisi

	AA	AB	BA	BB
AA	0.4	0.6	0	0
AB	0	0	0.5	0.5
BA	0.2	0.8	0	0
BB	0	0	0.7	0.3

minggu ke 1 & 2



b) jika dia minum Kopi A 2x berturut-turut, Berapa peluang dia minum Kopi lagi di minggu ke 5
diket:

$n = \text{minggu ke-5}$

$p^3 = \text{minggu 3, 4, dan 5}$

$$p^n = p^{n-1} \cdot p$$

$$p^3 = p^2 \cdot p = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0.2 & 0.8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.7 & 0.3 \end{bmatrix}^2 \cdot \begin{bmatrix} 0.4 & 0.6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0.2 & 0.8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.7 & 0.3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.16 & 0.24 & 0.3 & 0.3 \\ 0.1 & 0.4 & 0.35 & 0.15 \\ 0.08 & 0.12 & 0.4 & 0.4 \\ 0.14 & 0.56 & 0.21 & 0.09 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.4 & 0.6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0.2 & 0.8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.7 & 0.3 \end{bmatrix}$$

= AA AB BA BB

AA 0.124 0.336 0.33 0.21

AB 0.11 0.34 0.305 0.245

BA 0.112 0.368 0.34 0.18

BB 0.098 0.252 0.343 0.307

$$p = 0.124 + 0.33$$

$$= 0.454$$