

COMPOSITION DE PHYSIQUE COMMUNE

ENTPE 1996

Temps accordé: 4 heures

L'épreuve comporte deux problèmes indépendants.

Dans ce problème, on étudiera divers aspects du comportement d'une bobine, ou d'un système de bobines identiques.

On rappelle que $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H.m}^{-1}$.

I ETUDE MAGNETOSTATIQUE D'UNE BOBINE

I-1 Magnétostatique et régimes quasi-stationnaires.

Quelles sont les lois qui régissent le champ magnétique dans l'approximation des états quasi-stationnaires ? On pourra écrire ces lois sous leur forme intégrale ou bien sous leur forme locale. Quelle condition doivent remplir les courants qui produisent ce champ ?

Dans un conducteur ohmique, montrer qu'à l'échelle macroscopique, la densité de charge volumique tend très rapidement vers 0, avec un temps (dit temps de relaxation) caractéristique que l'on calculera pour le cuivre. On

donne la conductivité du cuivre: $\sigma = 6 \cdot 10^7 \text{ S.m}^{-1}$.

Que pouvez-vous en déduire sur la validité des équations de la magnétostatique ? Montrer en particulier que, dans l'équation de Maxwell-Ampère, le courant de déplacement est négligeable dans un bon conducteur, pour des fréquences usuelles.

I-2 Champ magnétique créé par une bobine.

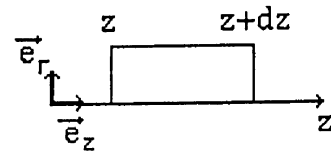
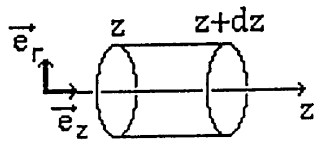
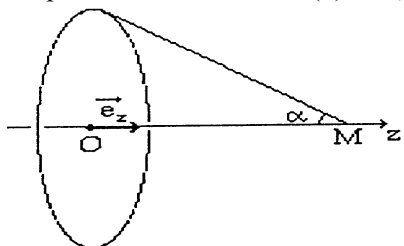
On considérera qu'une bobine est formée de N spires circulaires très proches les unes des autres.

I-2-1 Champ sur l'axe.

On donne une spire circulaire de rayon R , de centre O , d'axe Oz . Cette spire est parcourue par un courant électrique d'intensité I constante. Montrer par des arguments de symétrie que, sur l'axe, le vecteur champ magnétique $\mathbf{B}$ est porté par l'axe et prend donc la forme $B(z)\mathbf{e}_z$. Calculer le champ magnétique créé en un point M de l'axe, tel que $OM = z$.

On donnera le résultat en fonction de α , puis de z . Tracer le graphe représentant les variations de la fonction $B(z)$.

On posera dans la suite: $B(0) = B_0$; $B(z) = B_0 \cdot F(z/R)$.



I-2-2 Champ au voisinage de l'axe.

On s'intéresse maintenant au champ magnétique au voisinage de l'axe. On calcule donc le champ en un point P défini par ses coordonnées cylindriques (r, θ, z) .

I-2.2.a. Montrer par des arguments de symétrie très précis, qu'en P , $\mathbf{B}$ n'a pas de composante orthoradiale B_θ .

Montrer également que le module de $\mathbf{B}$ ne dépend que de r et de z .

I-2.2.b. Quelles sont les équations locales satisfaites par le champ magnétostatique ? Montrer qu'on peut considérer qu'au voisinage de l'axe, le flux de $\mathbf{B}$ et sa circulation sont conservatifs.

I-2.2.c. Calculer le flux de $\mathbf{B}$ à travers une surface fermée cylindrique d'axe Oz de rayon r faible, dont les bases sont dans des plans de cotes z et $z+dz$ (Voir figure ci-dessus). En déduire que

I-2.2.d. De même, calculer la circulation de $\mathbf{B}$ le long d'un rectangle de hauteur dz et de largeur r (voir figure ci-dessus).

En déduire que

I-2.2.e. Calculer explicitement $B_z(r, z)$ à cette approximation.

Application:

On se place au voisinage du centre O d'une spire de rayon R. De combien peut-on s'écarter dans le plan de la spire pour que la composante axiale du champ magnétique diffère du champ B_0 au centre de moins de 1% ?

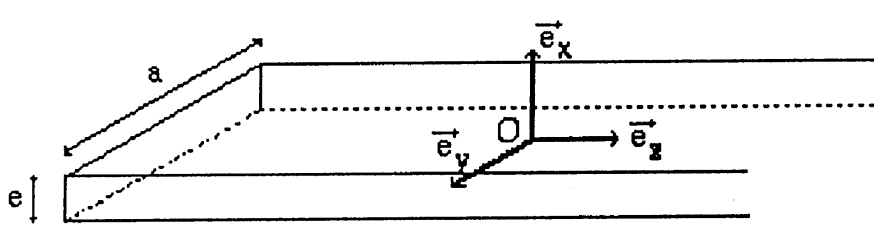
II ETUDE DE LA RESISTANCE DE LA BOBINE.

II-1. Résistance statique.

La bobine comporte 100 spires de rayon moyen 7cm faites d'un fil de cuivre de 0,5 mm de rayon. La conductivité du cuivre est $\sigma = 6.10^7 \text{ S.m}^{-1}$. Calculer la résistance totale de la bobine.

II-2. Résistance en haute fréquence: Effet de peau ou effet Kelvin.

La bobine est maintenant alimentée en courant alternatif sinusoïdal de pulsation ω . La répartition du courant dans un fil à section cylindrique donne lieu à des développements de calculs compliqués. On utilisera donc le modèle suivant, dans lequel le fil a la forme d'un ruban. On pourra ainsi dégager des ordres de grandeur valables. On considère un fil conducteur ayant la forme d'un ruban plat rectiligne à section rectangulaire d'épaisseur e et de largeur a , tel que représenté sur le schéma ci-dessous.



On prendra $e \ll a$. Soient Oz l'axe parallèle à la longueur du ruban passant par le centre de sa section, Ox normal au ruban et Oy dans le plan du ruban. Pour simplifier, on supposera qu'à l'intérieur du ruban, on peut négliger les effets de bord, c'est à dire que le vecteur densité de courant $\mathbf{j}$ est en tout point parallèle à Oz et que son module ne dépend ni de y, ni de z. Le conducteur suit la loi d'Ohm et sa conductivité est σ .

II-2.1. Écrire, en utilisant la notation complexe, les trois équations qui lient les trois vecteurs $\mathbf{E}$, champ électrique, $\mathbf{B}$, champ magnétique et $\mathbf{j}$ dans le ruban, en régime quasi-stationnaire. En déduire que le vecteur $\mathbf{j}$ satisfait à une équation différentielle qui peut s'écrire: où K est complexe.

II-2.2. Résoudre cette équation pour le ruban. On fera apparaître une longueur caractéristique δ , que l'on exprimera à l'aide des données. Donner les valeurs numériques de δ pour le cuivre pour des fréquences égales à 50Hz, 5000Hz, 500kHz et 50MHz.

II-2.3 On écrira que le fil est traversé par un courant d'intensité totale I. Calculer les amplitudes réelles $j(x)$ et $E(x)$ des vecteurs $\mathbf{j}$ et $\mathbf{E}$.

Plusieurs modes de calcul sont possibles, pour l'un d'eux on donne les formules:

où l'on rappelle que les fonctions $\cosh z$ et $\sinh z$ de la variable complexe z , sont définies de la même façon que pour une variable réelle, et que toutes les expressions analytiques des identités, des dérivées, des primitives sont semblables, que z soit complexe ou réel.

II-2.4 En utilisant la puissance dissipée par effet Joule, calculer la résistance du fil par unité de longueur. Que devient ce résultat en régime continu ?

III CIRCUIT RESONNANT.

III-1. Équation différentielle.

On réalise un circuit en plaçant en série une bobine d'inductance L et de résistance R, avec un condensateur de capacité C ainsi qu'une résistance pure R'. On branche l'ensemble sur un générateur de tension de f.é.m. $e(t)$. Établir les équations différentielles associées au circuit, en utilisant comme variable la charge du condensateur, puis l'intensité. Quel est le bilan énergétique que l'on peut en tirer ? Identifier et interpréter chaque terme.

III-2. Réponse fréquentielle du circuit. Facteur de qualité.

On suppose que le générateur de tension délivre une tension sinusoïdale de pulsation ω et de valeur efficace E_0 . On pose :

III-2.1. Définir le facteur de qualité Q du circuit. Peut-on en donner une définition énergétique ! Écrire les équations différentielles associées au circuit en utilisant les paramètres ω_0 et Q . Définir les expressions résonance d'intensité, résonance de charge. Indiquer leurs différences.

III-2.2. On mesure aux bornes de la résistance R' la tension V_R . Donner l'expression du rapport

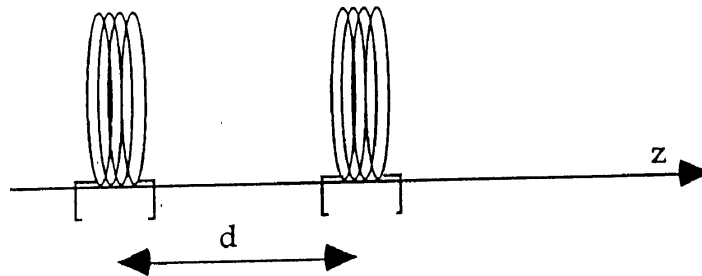
Tracer le diagramme de Bode en amplitude défini par: $G_{dB} = 20 \log |H|$ en fonction de $\log \omega$.

Comment se déforme ce diagramme en fonction des seules variations de Q ? Tracer le diagramme de phase.

III- 2.3. Expliquer les méthodes permettant d'obtenir expérimentalement ces diagrammes de Bode.

IV COUPLAGE DE DEUX CIRCUITS.

On se propose maintenant d'ajouter un second circuit résonnant identique au premier, en le plaçant de façon que les deux bobinages soient coaxiaux, avec le même sens d'enroulement, la distance entre leurs centres étant repérée le long de l'axe commun Oz par la longueur d .

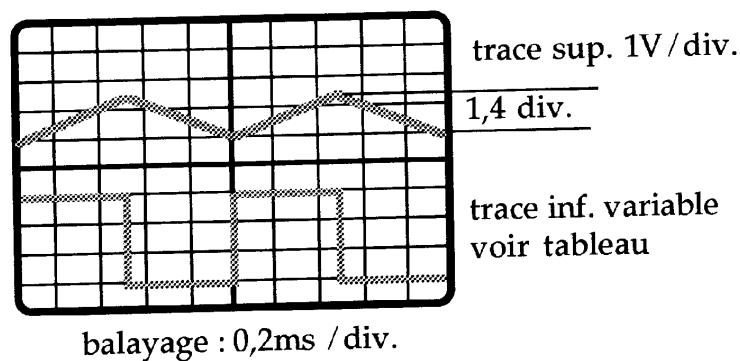


IV-1. On évalue au préalable le couplage magnétique entre les deux bobines.

IV-1.1 Étude expérimentale.

Après avoir débranché les condensateurs, on se propose de mesurer le couplage entre les deux bobines en envoyant dans l'une d'elles, dite la première, une tension triangulaire et en comparant à l'oscilloscope cette tension avec la tension induite dans l'autre, celle-ci étant en circuit ouvert. Faire le schéma de ce montage.

On a branché en série entre le générateur de fonction et la première bobine une résistance de 100Ω . On négligera les résistances des bobines. Les traces observées à l'oscilloscope ont l'allure suivante:



En faisant varier la distance d entre les bobines, on observe pour l'amplitude crête à crête A du signal induit mesurée en divisions de l'écran les valeurs suivantes:

Calibre	0.01 V/div			5 mV/div			2 mV/div		1mV/div
d(cm)	4	5	6	7	8	10	12	16	20
A	4.3	3.3	2.6	4.3	3.4	2.3	4	2.1	2.4

Calculer en mH l'inductance mutuelle M des deux bobines et tracer le graphe $M(d)$.

IV-1.2. Calcul approché de l'inductance mutuelle de deux bobines coaxiales.

IV-1.2.a. On considère deux bobines identiques, de rayon R , formées de N spires, placées perpendiculairement à leur axe commun à une distance d l'une de l'autre. En utilisant le résultat obtenu à la question I-2.2.d évaluer le coefficient d'inductance mutuelle M des deux bobines.

IV-1.2.b. On prend des bobines de 100 spires de rayon $R = 7\text{cm}$, placées, jusqu'à la fin du problème, à 20 cm l'une de l'autre. Calculer numériquement leur coefficient M d'inductance mutuelle. Comparer à la valeur expérimentale.

IV-2. Étude de deux systèmes identiques couplés.

IV-2.1 On constitue un système de deux oscillateurs couplés identiques en refermant chacune des bobines sur une capacité de $4,7\text{ nF}$ et en les disposant en regard l'une de l'autre comme précédemment. Sans se soucier pour l'instant de la façon dont les bobines sont excitées, et en négligeant leurs résistances, écrire le système d'équations différentielles couplées auquel obéit le système.

Donner l'expression littérale des fréquences propres, définies comme celles conduisant à des solutions purement sinusoïdales.

Représenter graphiquement la variation de ces fréquences propres en fonction du paramètre de couplage k , défini par le rapport $k = M/L$ de l'inductance mutuelle des deux bobines et de l'inductance propre de chacune des bobines.

Donner l'expression des solutions correspondant à chacune de ces fréquences propres, appelées modes propres.

Exprimer la solution la plus générale du système en fonction de ces modes propres et, pour chacun de ceux-ci, représenter sur un même graphique la tension en fonction du temps aux bornes des deux bobines lorsqu'un seul des modes propres est excité.

IV- 2.2. On tient compte maintenant de la résistance des bobines en introduisant dans les équations la valeur de la résistance telle que déterminée dans la première partie. Donner l'expression de la réponse du système lorsqu'on applique aux bornes d'un des circuits, l'autre étant fermé et les deux condensateurs étant déchargés, un échelon de tension à l'instant $t = 0$. Calculer l'expression de la tension mesurée aux bornes de chacune des deux bobines. Tracer l'allure de la tension mesurée aux bornes du circuit auquel on n'a pas appliqué la tension échelon, dans le cas d'un couplage assez faible ($M/L = 0,1$).

FIN