الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التربية الوطنية
مديرية التربية لولاية تمنراست- ثانوية الشيخ أمود
الموسم الدراسي : 2022-2021
شعـــــــبة : الثالثة رياضيات
المـــــــــــــدة : ساعتان

الفرض المحروس الثاني في مادة الرياضيات

التمرين الأول (10 نقاط) :

I. g دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}$: $g(x)=(1-x)e^{x}-1$

1. ادرس تغيرات الدالة g على المجال $\mathbb{R}$ ثم شكل جدول تغيراتها .

2. أستنتج إشارة $g(x)$ على المجال $\mathbb{R}$.

II. f دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}$ بـــ $f(x)=(2-x)e^{x}-x$ و (C) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

حيث $\left\|\vec{i}\right\|=1cm$

1. أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

2. بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن $f'(x)=g(x)$ ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f على $\mathbb{R}$.

3. بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حل وحيداً α حيث $\frac{3}{2}<\alpha<2$.

4. بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=-x$ مستقيم مقارب للمنحنى (C) بجهة $-\infty$.

5. أدرس وضعية (C) بالنسبة للمستقيم (Δ) .

6. اثبت أن النقطة $B(0;2)$ هي نقطة انعطاف للمنحنى (C) .

7. أنشئ المنحنى (C) و المستقيم (Δ) .

8. أحسب $A(\alpha)$ مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C) و المستقيمات التي معادلاتها $x=0$ و $x=\alpha$ و $y=0$.

التمرين الثاني (10 نقاط) :

(u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ $u_0=1$ و من أجل كل عدد طبيعي n فإن

$$u_{n+1}=\frac{1}{3}u_n+n-2$$

1. أحسب الحدود u_1 و u_2 و u_3

2. أ- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي $n\geq 4$ فإن $u_n\geq 0$

ب- أستنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي $n\geq 5$ فإن $u_n\geq n-3$

ج-استنتج نهاية المتتالية (u_n)

3. (v_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ $v_n=-2u_n+3n-\frac{21}{2}$:

1-بين أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها q و حدها الأول v_0

2-أكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة n

3-أستنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n=\frac{25}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^n+\frac{3}{2}n-\frac{21}{4}$

4-أحسب المجموع S_n حيث $S_n=u_0+u_1+u_2+...+u_n$

الفرض المحروس الثاني في مادة الرياضيات

التمرين الأول (10 نقاط) :

I. g دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}$: $g(x)=(1-x)e^x-1$

1. دراسة تغيرات الدالة g على المجال $\mathbb{R}$:

النهايات : $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=-1$ لأن $\lim\limits_{x\to-\infty}(1-x)e^x=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}-xe^x=-\infty$

..... $2\times(0,25)$

المشتقة : $g'(x)=(1-x)e^x-e^x=-xe^x$ إشارتها من إشارة $-x$

..... $(0,5)$

و منه الدالة g متزايدة على المجال $]-\infty;0]$ و متناقصة على المجال $[0;+\infty[$

..... $(0,5)$

جدول تغيراتها :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g(x)$	-1	↗	0	↘	$-\infty$

.....

(1) ...

2. استنتاج إشارة $g(x)$ على المجال 📷 من جدول تغيرات الدالة g نلاحظ أن لها قيمة حدية كبرى هي 0

و منه إشارة $g(x)$ سالبة .

.....

(0,5) .....

II. f دالة عددية معرفة على 📷 بـــ $f(x)=(2-x)e^x-x$ و (C) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

حيث $\left\|\vec{i}\right\|=1cm$

1. حساب : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x.\left[\left(\frac{2}{x}-1\right)e^x-1\right]=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(-x)=+\infty$.

$2\times(0,5)$ .....

2. إثبات أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن $f'(x)=g(x)$: أي أن $f'(x)=(2-x)e^x-e^x-1$

$f'(x)=(1-x)e^x-1=g(x)$

.....

(0,5) .....

استنتاج اتجاه تغير الدالة f على 📷 : الدالة f متناقصة على

📷..... (0,5)

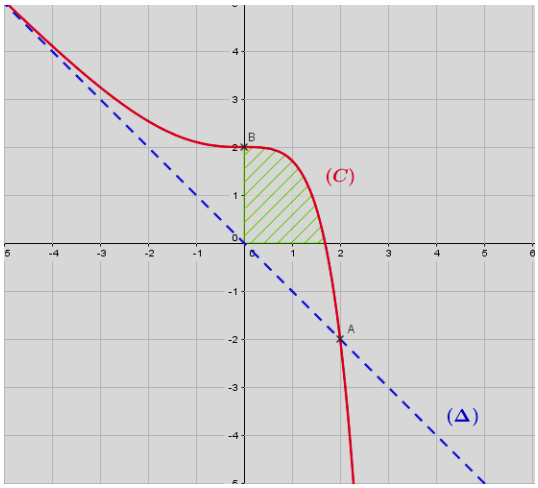
3. إثبات أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حل وحيداً α حيث $\frac{3}{2}<\alpha<2$: بما أن $f(2)=-2$ و $f\left(\frac{3}{2}\right)=0,74$ و f مستمرة و متناقصة تماماً على $\left[\frac{3}{2};2\right]$ فحسب مبرهنة القيم المتوسطة للمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد α حيث $\frac{3}{2}<\alpha<2$ ..... (1)

4. إثبات أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=-x$ مستقيم مقارب للمنحنى (C) بجهة $-\infty$. $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)+x]=\lim\limits_{x\to-\infty}(2-x).e^x=0$ و منه محققة لأن $\lim\limits_{x\to-\infty}(2-x).e^x=0$ باستخدام التزايد المقارن ..... (0,5)

5. دراسة وضعية (C) بالنسبة للمستقيم (Δ) : $[f(x)+x]=(2-x).e^x$ إشارتها من إشارة $(2-x)$ ..... (1)

x	$-\infty$		2		$+\infty$
إشارة $f(x)+x$		$+$	0	$-$	
الوضعية	(C) يقع فوق (Δ)		(C) و (Δ) يتقاطعان		(C) يقع تحت (Δ)

6. إثبات أن النقطة $B(0;2)$ هي نقطة انعطاف للمنحنى (C) : $f'(x)=g(x)$ و منه $f''(x)=g'(x)=-xe^x$ تنعدم عند 0 و تغير إشارتها عند 0 و منه $B(0;2)$ نقطة انعطاف .



..... (0,5)

7. أنشاء المنحنى (C) و المستقيم (Δ) : ..... (1)

8. حساب $A(\alpha)$ مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C) و المستقيمات التي معادلاتها $x=0$ و $x=\alpha$ و $y=0$:

$$A(\alpha)=\int_0^{\alpha}\left[(2-x)e^x-x\right]dx=(2-x)e^x\Big]_0^{\alpha}+\int_0^{\alpha}e^x.dx-\frac{1}{2}x^2\Big]_0^{\alpha}=(2-\alpha)e^{\alpha}-2+e^{\alpha}-1-\frac{\alpha^2}{2}$$

و منه

$$A(\alpha)=\left[(3-\alpha)e^{\alpha}-3-\frac{\alpha^2}{2}\right]u.a$$

.....

(1)

التمرين الثاني (10 نقاط) :

(u_n) متتالية عددية معرفة على ◉ بـ $u_0=1$ و من أجل كل عدد طبيعي n فإن

$$u_{n+1}=\frac{1}{3}u_n+n-2$$

1. حساب الحدود u_1 و u_2 و u_3 :

.....

$3\times(0,75)$ ...

$$u_{0+1}=\frac{1}{3}u_0+0-2=\frac{1}{3}-2 \quad \text{أي} \quad u_1=-\frac{5}{3}$$

$$u_{1+1}=\frac{1}{3}u_1+1-2=-\frac{5}{9}-1 \quad \text{أي} \quad u_2=-\frac{14}{9}$$

$$u_{2+1}=\frac{1}{3}u_2+2-2=-\frac{14}{27} \quad \text{أي} \quad u_3=-\frac{14}{27}$$

2. أ- إثبات أنه من أجل كل عدد طبيعي $n\geq 4$ فإن $u_n\geq 0$:

$$u_{3+1}=\frac{1}{3}u_3+3-2=-\frac{14}{81}+1 \quad \text{أي}$$

$$u_4=\frac{47}{81}$$ و منه $u_4\geq 0$ محققة

.....

(0,5) .....

نفرض أن لما $n \geq 4$ فإن $u_n \geq 0$ و لنبرهن أن $u_{n+1} \geq 0$

$u_n \geq 0$ يعني أن $\frac{1}{3}u_n \geq 0$ بإضافة $n-2$ عدد موجب نجد $\frac{1}{3}u_n + n - 2 \geq n - 2$ أي أن $u_{n+1} \geq 0$

و منه من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 4$ فإن $u_n \geq 0$

(1) .....

ب- استنتاج أنه من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 5$ فإن $u_n \geq n - 3$:

من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 4$ فإن $u_n \geq 0$ يعني أن $\frac{1}{3}u_n + n - 2 \geq n - 2$ أي أن $u_{n+1} \geq n - 2$

من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 5$ فإن $u_n \geq n - 3$

(0,75) .....

ج-استنتاج نهاية المتتالية (u_n) : $\lim(n-3) = +\infty$ و من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 5$ فإن $u_n \geq n - 3$

و منه $\lim u_n = +\infty$

.....

(1) .....

3. (v_n) متتالية عددية معرفة على ◉ بـ $v_n = -2u_n + 3n - \frac{21}{2}$:

1- إثبات أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها q و حدها الأول v_0 :

$v_{n+1} = -2u_{n+1} + 3(n+1) - \frac{21}{2} = -\frac{2}{3}u_n - 2n + 4 + 3n + 3 - \frac{21}{2}$ أي

$v_{n+1} = -\frac{2}{3}u_n + n - \frac{7}{2} = \frac{1}{3}\left(-2u_n + 3n - \frac{21}{2}\right)$ أي أن $v_{n+1} = \frac{1}{3}v_n$ و منه (v_n) متتالية هندسية..... (1)

أساسها $q=\frac{1}{3}$ و حدها الأول $v_0=-2u_0-\frac{21}{2}=-\frac{25}{2}$

..... $2\times(0,5)$

2-كتابة عبارة الحد العام v_n بدلالة n : $v_n=-\frac{25}{2}\times\left(\frac{1}{3}\right)^n$

..... $(0,75)$

3-استنتاج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n=\frac{25}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^n+\frac{3}{2}n-\frac{21}{4}$ لدينا

$v_n=-2u_n+3n-\frac{21}{2}$ يعني أن $u_n=-\frac{1}{2}v_n+\frac{3}{2}n-\frac{21}{4}$ و منه $u_n=\frac{25}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^n+\frac{3}{2}n-\frac{21}{4}$

..... $(0,75)$

4-حساب المجموع S_n حيث $S_n=u_0+u_1+u_2+...+u_n$

$u_n=\frac{25}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^n+\frac{3}{2}n-\frac{21}{4}$ مجموع متتاليتين حسابية $\frac{3}{2}n-\frac{21}{4}$ و متتالية هندسية $\frac{25}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^n$ و منه $S_n=\sum_{k=0}^{k=n}\left[\frac{25}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^k+\frac{3}{2}k-\frac{21}{4}\right]$ أي أن

$$S_n=\frac{25}{4}\left[\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{3}}\right]+\frac{n+1}{2}\left(-\frac{21}{4}+\frac{3}{2}n-\frac{21}{4}\right)$$

أي

$$S_n=\frac{75}{8}\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right]+\left(\frac{n+1}{2}\right).\left(-\frac{21}{2}+\frac{3}{2}n\right)$$

..... (1)