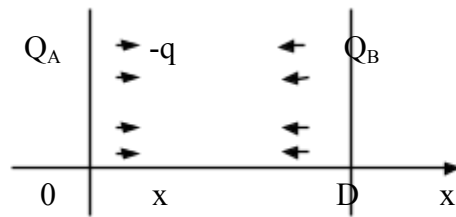


Questions préliminaires

1.



Le champ électrique est normal aux armatures et converge vers la charge négative.

Par influence, les charges sur les armatures sont positives sur les faces en regard de la charge négative.

Dans les armatures, le champ électrique est nul (conducteur en équilibre).

2. Le champ électrique est nul loin du système donc en utilisant le théorème de Gauss à une surface fermée englobant le système on obtient $Q_{\text{int}} = 0$ donc $-q + Q_A + Q_B = 0$

soit $Q_A + Q_B = q$ d'où $\beta = q/D$

3. $Q_A = (D-x) \beta$ d'où $dQ_A = -\beta dx$; $Q_B = x \beta$ d'où $dQ_B = \beta dx$.

Cela correspond au transfert de l'armature A vers l'armature B de $dq = \beta dx = q dx / D$

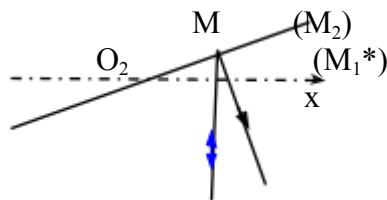
4. Il apparaît un courant d'intensité $I = dq/dt$ soit $I = q v_0 / D$ dirigé de A vers B.

La valeur de I est indépendante de la position x de la charge $-q$. Si d'autres charges sont présentes mais immobiles cela ne change pas la valeur de I qui est due au déplacement des charges.

5. Le raisonnement précédent s'applique en remplaçant q par Q. Si toutes les charges vont à la même vitesse alors $I = Q v / D$.

Partie I : Interféromètre de Michelson et détecteur de mouvement

I.A. Il s'agit du réglage équivalent en coin d'air de l'interféromètre : les franges d'interférences sont les franges d'égale épaisseur, rectilignes, parallèles à l'arête commune des miroirs M_2 et M_1^* , image de M_1 par la séparatrice. Elles sont localisées sur le miroir M_2 et la différence de marche sous incidence normale est $\delta(M) = 2 \alpha x(M)$, $x(M)$ étant la distance entre M et O_2 :



Calcul de l'interfrange :

Soit p l'ordre d'interférence en M : $p = \delta(M)/\lambda = 2 \alpha x(M) / \lambda$

Soit M' situé à un interfrange de M : on a $p' = p + 1 = \delta(M')/\lambda = 2 \alpha (x(M) + i) / \lambda$

d'où $i = \lambda / 2 \alpha$.

I.B. L'écran est conjugué avec le miroir M_2 par la lentille.

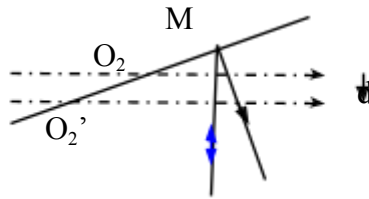
$$|\gamma| = \Omega C / \Omega O_2 = 1 \text{ et } 1/\overline{\Omega C} - 1/\overline{\Omega O_2} = 1/f'$$

$$\text{D'où } \Omega O_2 = \Omega C = 2 f' = 30 \text{ cm}$$

I.C. $\xi(M) = \xi_0 (1 + \cos 2\pi x/i)/2$

La frange brillante d'ordre 0 est située en $x = 0$ donc en C.

I.D. Si M_1 se déplace de d selon Ox , l'arête commune à M_2 et M_1^* se décale en O_2' :



La nouvelle différence de marche est $\delta'(M) = \delta(M) + 2d$: la nouvelle frange centrale se trouve dans les x négatifs : la figure se translate sur le miroir dans le sens des x négatifs donc sur l'écran dans le sens des x positifs. La frange en C devient sombre pour $d = d_{\min}$ tel que $2d_{\min} = \lambda/2$ ou $d_{\min} = \lambda/4$.

Pour $d = d_{\min}$, $\xi(M) = \xi_0 (1 - \cos 2\pi x/i)/2$

I.E. La frange devient sombre pour $d_{\min} = \lambda/4 = v t_1$ d'où $t_1 = \lambda/4v$

La frange redevient sombre quand $d = d_n = (2n+1)\lambda/4$ soit pour $t_n = (2n+1)\lambda/4v$ (n entier)

Les franges se déplacent sur l'écran selon Ox à la vitesse $v' = i/(\lambda/2v) = 2i v/\lambda = v/\alpha$

I.F. Pour observer N franges brillantes et N franges sombres, il faudrait commencer par une frange sombre puis finir par une frange claire (problème de la frange centrale ...) ou l'inverse soit $D = (N+1/2) i$ D'où $i = D / (N+1/2) = \lambda/2\alpha$ ou $\alpha = (N+1/2)\lambda/2D = 3,24 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$

I.G. $Q = \iint_S \rho(P) a dS = \iint_S -\eta a [\xi_0 (1 + \cos 2\pi x/i)/2] dx dz = -\eta \xi_0 a D^2/2$

Si on déplace le miroir de d , Q restera la même (même nombre de franges).

I.H. En utilisant le résultat des questions préliminaires, on a $I = -Q v' / D = -Q v / (D \alpha)$.

Ce courant circule de l'électrode 1 vers l'électrode 2.

A.N. $I = 9,8 \cdot 10^{-7} \text{ A}$

I.I. L'ampli Op est idéal et fonctionne en régime linéaire alors $V^+ = V^- = 0$ d'où $V_{s1} = -R_1 I$. L'impédance d'entrée de l'ampli Op étant infinie, le montage n'influe pas sur la valeur de I .

I.J. On souhaite une variation de V_s de 1 V d'où $R_1 = 10^6 \Omega$.

Base de temps : 0,01 s/div

V_{s1} est proportionnel à I donc à v avec $v = gt$. La pente de la droite $V_{s1}(t)$ permet d'atteindre la valeur de g .

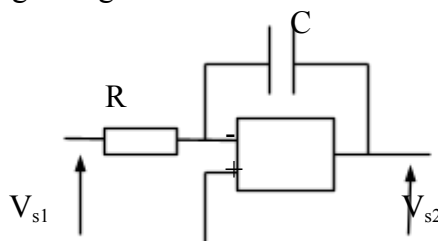
Partie II : Réalisation d'un sismographe

II.A. Equation différentielle régissant le mouvement de (M_1) en fonction du temps :

$$m \ddot{x} = -k x - f \dot{x}$$

II.B. Il faut un montage intégrateur :

Montage idéal :



On a alors $V_{s2} = -\frac{1}{RC} \int V_{s1} dt$.

Inconvénient du montage réel : les courants de polarisation chargent le condensateur , ce qui sature le montage. Pour éviter cet inconvénient, on place une résistance R' en parallèle sur C (montage pseudo intégrateur) et on travaille à $\omega > 10 (1/R'C)$

II.D. L'équation différentielle vérifiée par x devient : $\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$

D'après la courbe, le régime est pseudopériodique.

L'équation caractéristique est : $r^2 + 2\lambda r + \omega_0^2 = 0$ et $\Delta < 0$ ($\lambda < \omega_0$)

Les solutions sont : $r = -\lambda \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$

D'où $x(t) = e^{-\lambda t} (A \cos \Omega t + B \sin \Omega t)$ avec $\Omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$

A $t = 0$, $x = x_0$ et $\dot{x} = 0$ d'où $x(t) = x_0 e^{-\lambda t} (\cos \Omega t + (\lambda/\Omega) \sin \Omega t)$

II.E. $x_{\max}(0)/x_{\max}(2T) = 5/1,5 = e^{2T\lambda}$ et $T = (2,5/4) s = 0,625 s$

d'où $\lambda = 0,96 s^{-1}$ et $\omega_0 = 10,1 rad/s$

On en déduit : $f = 0,19 kg s^{-1}$ et $k = 10,2 N.m^{-1}$.

II.F. Le référentiel lié au sol est non galiléen : il faut rajouter la force d'inertie d'entraînement d'où la nouvelle équation : $m\ddot{x} = -kx - f\dot{x} - m\ddot{s}$

Soit : $\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = \omega_1^2 s_0 \cos \omega_1 t$

II.G. En utilisant la notation complexe : $\underline{Y} = \omega_1^2 / (\omega_0^2 - \omega_1^2 + 2i\lambda\omega_1)$

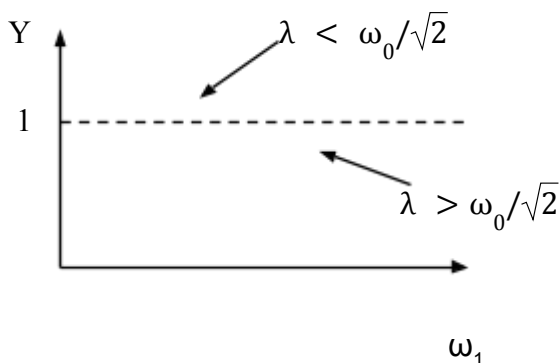
II.H. $Y = \omega_1^2 / \sqrt{(\omega_0^2 - \omega_1^2)^2 + 4\lambda^2 \omega_1^2}$

Quand $\omega_1 \rightarrow \infty$, $Y \rightarrow 1$

En utilisant z, $Y = 1/\sqrt{(z-1)^2 + 4\lambda^2 z/\omega_0^2} = 1/\sqrt{f(z)}$ avec $f(z) = (z-1)^2 + 4\lambda^2 z/\omega_0^2$

Y passe par un maximum si f est minimale. $f'(z) = 2(z-1) + 4\lambda^2/\omega_0^2$

$f'(z)$ peut s'annuler si $z = 1 - 2\lambda^2/\omega_0^2 > 0$ c'est-à-dire si $\lambda < \omega_0/\sqrt{2}$



II.I. La pulsation de coupure correspond à $Y(\omega_1) = 1 / \sqrt{2}$

D'où $f(z_c) = 2$ soit z_c solution positive de $z^2 + 2z(2\lambda^2/\omega_0^2 - 1) - 1 = 0$

$$z_c = - (2\lambda^2/\omega_0^2 - 1) + \sqrt{(2\lambda^2/\omega_0^2 - 1)^2 + 1} = \omega_0^2/\omega_c^2 \text{ d'où}$$

$$\omega_c = \omega_0 / (- (2\lambda^2/\omega_0^2 - 1) + \sqrt{(2\lambda^2/\omega_0^2 - 1)^2 + 1})^{1/2}$$

II.J. La bande passante la plus large s'obtient pour $\omega_0 > \lambda > \omega_0/\sqrt{2}$.

La fonction $z_c(u)$ est monotone décroissante donc z_c sera le plus grand pour u le plus petit soit pour $\lambda = \omega_0/\sqrt{2}$. On a alors $\omega_c = \omega_0/\sqrt{2} \simeq 0,7 \omega_0$

Partie III : Filtrage du signal

III.A. $\underline{H}(j\omega) = -1 / (1 + (a+1)/2jRC\omega + jRC\omega)$

III.B. $\underline{H}(j\omega) = A / (1 + jQ(\omega/\Omega - \Omega/\omega))$

avec $A = -1$; $Q = \sqrt{(a+1)/2}$; $\Omega = \sqrt{(a+1)/2} (1/RC)$

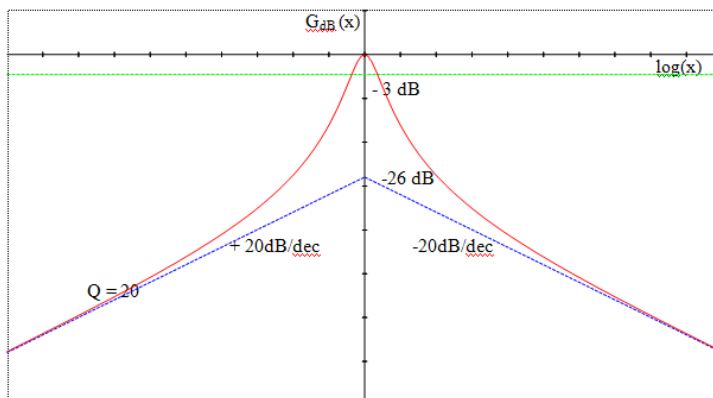
III.C. Il s'agit d'un filtre passe-bande.

$$G(x) = 1/\sqrt{1 + Q^2(x - 1/x)^2}$$

$x \ll 1$: $G(x) \sim x/Q$ soit $G_{dB} = 20 \log x - 20 \log Q = 20 \log x - 26$

$x \gg 1$: $G(x) \sim 1/Qx$ soit $G_{dB} = -20 \log x - 20 \log Q = -20 \log x - 26$

$x = 1$: $G(1) = 1$ soit $G_{dB} = 0$



La bande passante est $\Delta\omega = \Omega/Q$.

La bande passante est indépendante de a (Q augmente mais Ω également quand a augmente)

III.D. On veut isoler l'harmonique N donc $\Omega = N \omega_1$ et $\Delta\omega \ll \omega_1$.

$\Delta\omega \ll \omega_1$ ou $\Omega/Q \ll \omega_1$ donc $\omega_1 \gg 1/RC$

$\Omega = N \omega_1 = \sqrt{(a+1)/2} (1/RC)$: la pulsation est donc réglée par a .

III.E. $Q = 20$ donc $a = 799$; $\Omega/Q = 1/RC$ et $\Omega = 5 \omega_1$ d'où $R = 23,4 \text{ k}\Omega$

On vérifie $\omega_1 \gg 1/RC$: le filtre passe-bande est bien sélectif et sert d'analyseur du signal.