

Цель занятия:

Деятельностная:

– создать условия для усвоения умения определять и изображать перпендикулярные прямые и плоскости в пространстве; применять теоретические знания о перпендикулярности при решении геометрических задач.

Содержательная:

- сформировать целостное представление о перпендикулярности как одном из важнейших свойств взаимного расположения геометрических объектов в пространстве;
- расширить знания обучающихся о свойствах перпендикулярности прямых, прямых и плоскостей, плоскостей;
- развить умения определять различные виды расстояний в пространстве (от точки до плоскости, между прямой и плоскостью, между параллельными плоскостями);
- сформировать навыки применения теоретических знаний при решении практических задач на построение и вычисление.

План занятия:

1. Перпендикулярные прямые
2. Перпендикулярность прямой и плоскости
3. Перпендикуляр и наклонная
4. Расстояния в пространстве

Ход занятия

1. Перпендикулярные прямые

Перпендикулярные прямые

Определение. Две прямые называются перпендикулярными, если угол между ними равен 90° .

Обозначение. $a \perp b$.

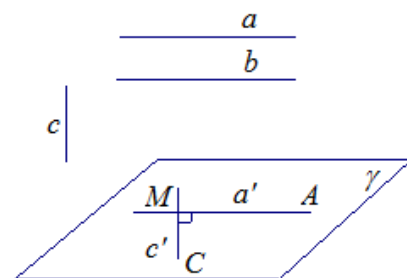
Лемма. Если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна к третьей прямой, то и другая прямая перпендикулярна к этой прямой.

□ Пусть даны две параллельные прямые a и b , и прямая c , причем $a \perp c$. Нужно доказать, что $b \perp c$.

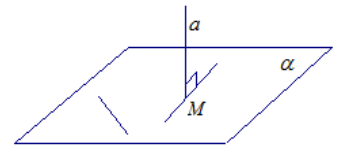
Возьмем произвольную точку M . Через точку M проведем прямую a' , параллельную прямой a и прямую c' , параллельную прямой c . Тогда угол AMC равен 90° .

Прямая b параллельна прямой a по условию, прямая a' параллельна прямой a по построению. Значит, прямые a' и b параллельны.

Имеем, прямые a' и b параллельны, прямые c и c' параллельны по построению. Значит, угол между прямыми b и c – это угол между прямыми a' и c' , то есть угол AMC , равный 90° . Значит, прямые b и c перпендикулярны. ■



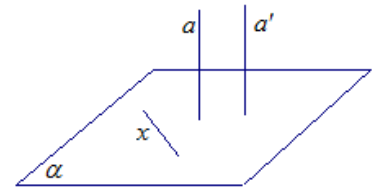
Определение. Прямая называется перпендикулярной к плоскости, если она перпендикулярна к любой прямой, лежащей в этой плоскости. Обозначение. $a \perp \alpha$.



Теорема. Если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна к плоскости, то и другая прямая перпендикулярна к этой плоскости.

□ Пусть прямая a параллельна прямой a_1 . Прямая a перпендикулярна плоскости α . Докажем, что и прямая a_1 перпендикулярна плоскости α .

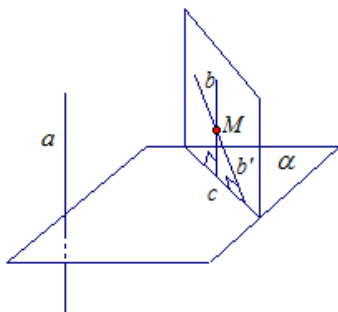
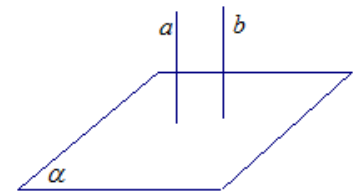
Прямая a перпендикулярна плоскости α . Значит, она перпендикулярна любой прямой, лежащей в этой плоскости. Прямая x лежит в плоскости α , значит, $a \perp x$.



Прямая a перпендикулярна прямой x , а прямая a_1 параллельна прямой a . Значит, прямая a_1 перпендикулярна прямой x по лемме. Прямую x мы выбирали произвольно. Значит, прямая a_1 перпендикулярна любой прямой в плоскости α , то есть прямая x перпендикулярна плоскости α , что и требовалось доказать. ■

Обратная теорема. Если две прямые перпендикулярны к плоскости, то они параллельны.

□ Пусть прямая a перпендикулярна плоскости α и прямая b перпендикулярна плоскости α . Докажем, что прямая a параллельна прямой b .



Предположим, что прямая b не параллельна прямой a . Через точку M прямой b проведем прямую b' , параллельно прямой a .

Прямые b' и a параллельны, прямая a перпендикулярна плоскости α . По теореме, прямая b' также перпендикулярна плоскости α .

Прямые b и b' пересекаются, а значит через них проходит некоторая плоскость. Пусть эта плоскость пересекает плоскость α по прямой c . Тогда прямая b' перпендикулярна прямой c , так как прямая c лежит в плоскости α , а прямая b' ей перпендикулярна.

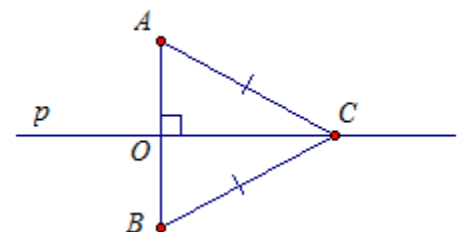
Но тогда в плоскости, определенной пересекающимися прямыми b и b' через точку M проходят два перпендикуляра b и b' к прямой c . Получаем противоречие. Значит, прямая b параллельна прямой a , что и требовалось доказать. ■

2. Перпендикулярность прямой и плоскости

Признак перпендикулярности прямой и плоскости

Если прямая перпендикулярна к двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости, то она перпендикулярна к этой плоскости.

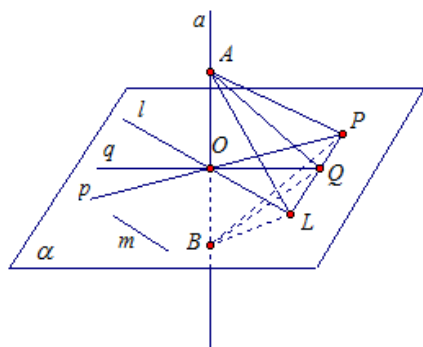
□ Пусть нам дана плоскость α . В этой плоскости лежат две пересекающиеся прямые p и q . Прямая a перпендикулярна прямой p и прямой q . Нам нужно доказать, что прямая a перпендикулярна плоскости α , то есть, что прямая a перпендикулярна любой прямой, лежащей в плоскости α .



Напоминание.

Для доказательства нам нужно вспомнить свойства серединного перпендикуляра к отрезку. Серединный перпендикуляр p к отрезку AB – это геометрическое место точек, равноудаленных от концов отрезка. То есть, если точка C лежит на серединном перпендикуляре p , то $AC = BC$.

Пусть точка O – точка пересечения прямой a и плоскости α . Без ограничения общности, будем считать, что прямые p и q пересекаются в точке O . Нам нужно доказать перпендикулярность прямой a к произвольной прямой m из плоскости α .



Проведем через точку O прямую l , параллельно прямой m . На прямой a отложим отрезки OA и OB , причем $OA = OB$, то есть точка O – середина отрезка AB . Проведем прямую PL , $P \in p$, $Q \in q$, $L \in l$.

Прямая p перпендикулярна прямой a (из условия), $p \cap a = O$, $AO = OB$ (по построению). Значит, p – серединный перпендикуляр к отрезку AB . Точка P лежит на прямой p . Значит, $PA = PB$.

Прямая q перпендикулярна прямой a (из условия), $q \cap a = O$, $AO = OB$ (по построению). Значит, q – серединный перпендикуляр к отрезку AB . Точка Q лежит на прямой q . Значит, $QA = QB$.

Треугольники APQ и BPQ равны по трем сторонам ($PA = PB$, $QA = QB$, PQ – общая сторона). Значит, углы APQ и BPQ равны.

Треугольники APL и BPL равны по углу и двум прилежащим сторонам ($\angle APL = \angle BPL$, $PA = PB$, PL – общая сторона). Из равенства треугольников получаем, что $AL = BL$.

Рассмотрим треугольник ABL . Он равнобедренный, так как $AL = BL$. В равнобедренном треугольнике медиана LO является и высотой, то есть прямая LO перпендикулярна AB .

Мы получили, что прямая a перпендикулярна прямой l , а значит, и прямой m . ■

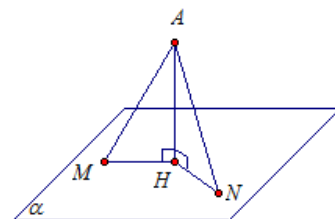
3. Перпендикуляр и наклонная

Рассмотрим плоскость α . Точка A лежит вне плоскости α . Отрезок $АН$ перпендикулярен плоскости α .

Отрезок $АН$ – перпендикуляр, проведенный из точки A к плоскости α . Точка H – основание перпендикуляра.

Отрезок $АМ$ – наклонная, M – основание наклонной.

Отрезок $MН$ называется проекцией наклонной $АМ$ на плоскость α .



Свойство 1. Длина перпендикуляра меньше, чем длина наклонной. То есть, $АН < АМ$.

Расстоянием от точки A до плоскости α называют длину перпендикуляра $АН$. Обозначение: $\rho(A; \alpha) = АН$. Точка H – проекция точки A на плоскость α .

Свойство 2. $AM = AN \Leftrightarrow MH = NH$

То есть, если из точки A проведены равные наклонные, $АМ = АN$, то их проекции равны: $MН = НN$. Если проекции равны $MН = НN$, то равны и наклонные: $АМ = АN$.

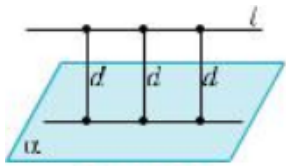
4. Расстояния в пространстве



Расстоянием от точки до плоскости называется длина перпендикуляра, опущенного из данной точки на эту плоскость. Если фигуры пересекаются, то будем считать, что расстояние между ними равно нулю.

Теорема 1 (о расстоянии от точки до плоскости).

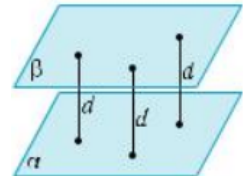
Расстояние от точки до плоскости равно длине перпендикуляра, проведенного из данной точки на данную плоскость.



Теорема 2 (о расстоянии между прямой и плоскостью). Расстояние между прямой и параллельной ей плоскостью равно длине перпендикуляра, проведенного из произвольной точки прямой к данной плоскости.

Теорема 3 (о расстоянии между параллельными плоскостями).

Расстояние между параллельными плоскостями равно длине перпендикуляра, проведенного из произвольной точки одной плоскости ко второй плоскости.



Задачи с решением

Задача 1. Точки A , M , O лежат на прямой, перпендикулярной к плоскости α , а точки O , B , C и D лежат в плоскости α (рис. 3). Какие из следующих углов являются прямыми: $\angle AOB$, $\angle MOC$, $\angle DAM$, $\angle DOA$, $\angle BMO$?

Решение

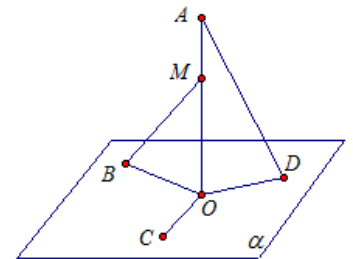
Рассмотрим угол $\angle AOB$. Прямая AO перпендикулярна плоскости α , а значит, прямая AO перпендикулярна любой прямой, лежащей в плоскости α , в том числе прямой BO . Значит, $\angle AOB = 90^\circ$.

Рассмотрим угол $\angle MOC$. Прямая AO перпендикулярна прямой OC , значит, $\angle MOC = 90^\circ$.

Рассмотрим угол $\angle DAM$. Прямая AO перпендикулярна прямой OD , значит, $\angle DOA = 90^\circ$. Рассмотрим треугольник DAO . В треугольнике может быть только один прямой угол. Значит, угол DAM – не является прямым.

Рассмотрим угол $\angle BMO$. Это угол в прямоугольном треугольнике BMO , он не может быть прямым, так как угол MOB – прямой.

Ответ: $\angle AOB = \angle MOC = \angle DOA = 90^\circ$.



Задача 2. В треугольнике ABC дано: $\angle C = 90^\circ$, $AC = 6$ см, $BC = 8$ см, CM – медиана. Через вершину C проведена прямая CK , перпендикулярная к плоскости треугольника ABC , причем $CK = 12$ см. Найдите KM .

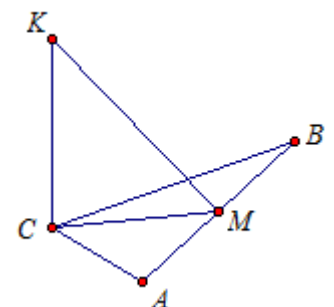
Решение:

Найдем длину AB по теореме Пифагора:

$$AB = \sqrt{CB^2 + AC^2} = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$$

По свойству прямоугольного треугольника середина гипотенузы M равноудалена от вершин треугольника. То есть $CM = AM = BM$,

$$CM = \frac{1}{2} AB = 5 \text{ (см)}.$$



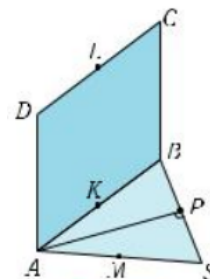
Рассмотрим треугольник КСМ. Прямая КС перпендикулярна плоскости АВС, а значит, КС перпендикулярна СМ. Значит, треугольник КСМ – прямоугольный. Найдем гипотенузу КМ из теоремы Пифагора:

$$KM = \sqrt{KC^2 + CM^2} = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13 \text{ (см)}.$$

Ответ: 13 см.

Задача 3. Плоскости правильного треугольника АВС и квадрата ABCD со стороной а перпендикулярны, точки L, K, М являются серединами соответственно сторон DC, АВ, AS. Найти расстояние от точки А до прямой BS.

Расстояние от точки А до прямой BS равно длине перпендикуляра, проведенного из точки А к прямой BS в плоскости ABS. Поскольку треугольник ABS — правильный, то таким перпендикуляром будет медиана AP этого треугольника. Её длина равна $\sqrt{3}a/2$.



(!) Домашнее задание (!)

1. Ответьте на контрольные вопросы (письменно):

- 1.1. Приведите определение прямой, перпендикулярной плоскости.
- 1.2. Сформулируйте признак перпендикулярности прямой и плоскости.
- 1.3. Приведите формулировку расстояния от точки до плоскости.
- 1.4. Приведите формулировку расстояния между прямой и плоскостью.
- 1.5. Приведите формулировку расстояния между параллельными плоскостями.

2. Решите предложенные задания (письменно):

Задание 1. Если прямая перпендикулярна к плоскости, то она перпендикулярна лежащим в этой плоскости двум сторонам треугольника, так ли это:

- а) да; б) нет; в) зависит от условия задачи.

Задание 2. Если прямая перпендикулярна двум прямым, лежащим в плоскости, то она перпендикулярна к данной плоскости, так ли это:

- а) да; б) зависит от условия задачи; в) нет.

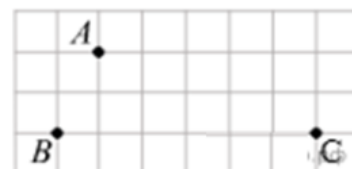
Задание 3. Могут ли быть перпендикулярны к плоскости две стороны треугольника одновременно:

- а) да; б) в редких случаях; в) нет

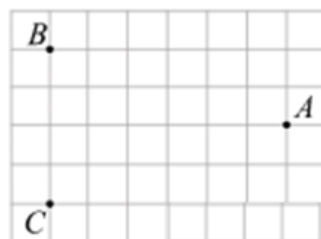
Задание 4. В прямоугольном параллелепипеде все шесть граней — произвольные параллелограммы, так ли это:

- а) да; б) нет; в) отчасти

Задание 5. На клетчатой бумаге с размером клетки 1см×1см отмечены точки А, В и С. Найдите расстояние от точки А до прямой ВС. Ответ выразите в сантиметрах.



Задание 6. На клетчатой бумаге с размером клетки 1см×1см отмечены точки А, В и С. Найдите расстояние от точки А до середины отрезка ВС. Ответ выразите в сантиметрах.



Отчетность

Работы принимаются до 18 ноября 2025 г.

Задания выполняются от руки на тетрадных листах в клетку. Каждый лист на полях подписываете: Фамилия Имя, группа, дата (в формате ДД.ММ.ГГГГ). По выполнению фотографии каждого листа (в правильном порядке и вертикальной ориентации – без перевернутых страниц) высылаете на проверку преподавателю.

Выполненное задание домашней работы вы присылаете на @mail:

pushistav@mail.ru

В теме письма указываем:

ОД.07 Математика 11.11.25 (Фамилия Имя, группа)

К примеру:

ОД.07 Математика 11.11.25 (Иванов Иван, БУ и ТД 1/1-9/25)

Обязательно проверьте, что Вы состоите в чате: <https://t.me/+RX9Nb2N84woxOTdi>



С уважением!

Преподаватель математики ШТЭК ДОННУЭТ

Бережная Валерия Александровна

Основная литература: Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Геометрия. 10-11 классы : учеб. для общеобразоват. организаций : базовый и углубл. уровни / [Л. С. Атанасян и др.]. – 10-е изд., стер. – Москва : Просвещение, 2022. – 287 с.