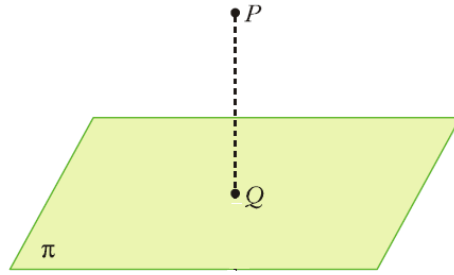


1.- Considera el plano π de ecuación $x + 2y + z = 1$.

(a) Halla el punto de π más próximo al punto $(3, 1, 2)$.

Resolución

El punto más próximo a $P(3, 1, 2)$ es el punto Q , proyección ortogonal de P sobre π .



- Hallamos la recta r pasando por P ortogonal a π :

$$\vec{d}_r = \vec{n}_\pi = (1, 2, 1); P(3, 1, 2) \in r \Rightarrow r: \begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = 1 + 2\lambda \\ z = 2 + \lambda \end{cases}$$

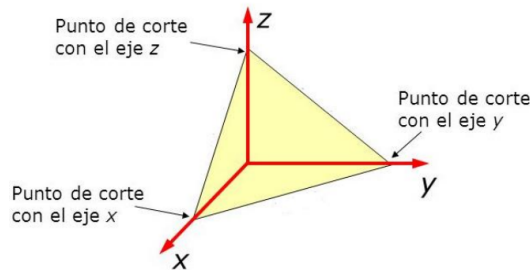
- Calculamos el punto de corte, Q , entre r y π resolviendo el sistema formado por las ecuaciones paramétricas de r y la ecuación de π : $3 + \lambda + 2(1 + 2\lambda) + (2 + \lambda) = 1 \Rightarrow 6\lambda + 7 = 1 \Rightarrow \lambda = -1$.

Luego, $\{x = 3 - 1, y = 1 + 2(-1), z = 2 - 1\} \Rightarrow \{x = 2, y = -1, z = 1\}$. Por tanto, $Q(2, -1, 1)$

(b) Determina la ecuación de un plano paralelo a π que forme con los ejes de coordenadas un triángulo de área $\sqrt{6}$.

Resolución

Los planos paralelos a π son de la forma $\pi_m: x + 2y + z = m$, con $m \in \mathbb{R}$.



Sea ABC el triángulo que se menciona:

Punto de corte de π_m con el eje X : $\{x + 2y + z = m, y = 0, z = 0\} \Rightarrow x + 2 \cdot 0 + 0 = m \Rightarrow x = m$, de donde $A(m, 0, 0)$

Punto de corte de π_m con el eje Y : $\{x + 2y + z = m, x = 0, z = 0\} \Rightarrow 0 + 2y + 0 = m \Rightarrow y = \frac{m}{2}$, de donde $B(0, \frac{m}{2}, 0)$

Punto de corte de π_m con el eje Z : $\{x + 2y + z = m, x = 0, y = 0\} \Rightarrow 0 + 2 \cdot 0 + z = m \Rightarrow z = m$, de donde $C(0, 0, m)$

$$A(\text{triángulo}) = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}| \quad ; \quad \vec{AB} = (-m, \frac{m}{2}, 0) \quad , \quad \vec{AC} = (-m, 0, m)$$

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -m & \frac{m}{2} & 0 \\ -m & 0 & m \end{vmatrix} = (\frac{m^2}{2}, m^2, -\frac{m^2}{2})$$

$$\sqrt{6} = \frac{1}{2} \cdot \frac{m^2}{2} |(1, 2, 1)| = \frac{m^2}{4} \sqrt{6} \Rightarrow m^2 = 4 \Rightarrow m = \pm 2$$

Hay 2 planos: $\pi_1: x + 2y + z = 2$ y $\pi_2: x + 2y + z = -2$

2.- Sea r la recta que pasa por los puntos $A(1, 1, 0)$ y $B(3, -1, 1)$ y s la recta dada por $\begin{cases} x + 2y = -1 \\ y + z = -1 \end{cases}$

a) Halla la ecuación general del plano que pasa por el origen de coordenadas y es paralelo a las rectas dadas.

Resolución

$A(1, 1, 0) \in r$ y $\vec{d}_r = \vec{AB} = (2, -2, 1)$ es un vector director de r

Para hallar un punto de s hacemos $y = 0$, de donde $\begin{cases} x + 2 \cdot 0 = -1 \\ 0 + z = -1 \end{cases}$. Obtenemos $C(-1, 0, -1) \in s$

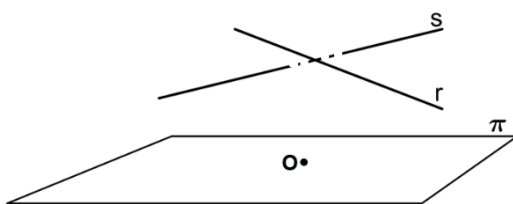
Un vector director de s se obtiene como producto vectorial de los vectores normales de los planos que definen a la recta s

$$\vec{d}_s = (1, 2, 0) \times (0, 1, 1) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (2, -1, 1)$$

$$\vec{d}_r // \vec{d}_s ;$$

$$\det \det (\vec{AC}, \vec{d}_r, \vec{d}_s) = \det \det \begin{pmatrix} -3 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} = 6 + 4 + 4 - 8 - 3 - 4 = -1 \neq 0$$

$\Rightarrow r$ y s se cruzan.



Sea π el plano que buscamos:

Como los vectores $\vec{d}_r$ y $\vec{d}_s$ son vectores directores de π , un vector normal de π es

$$\vec{n} = \vec{d}_r \times \vec{d}_s = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (-1, 0, 2)$$

Y como π pasa por $O(0, 0, 0)$, entonces $\pi: -1(x - 0) + 0(y - 0) + 2(z - 0) = 0 \Rightarrow \pi: -x + 2z = 0$

b) Halla unas ecuaciones paramétricas del plano que pasa por B y es perpendicular a s .

Resolución

Al ser el plano π' que buscamos perpendicular a la recta s , un vector normal de π' es

$$\vec{n}_{\pi'} = \vec{d}_s = (2, -1, 1)$$

Como π' pasa por $B(3, -1, 1)$, entonces $\pi': 2(x - 3) - 1(y + 1) + 1(z - 1) = 0 \Rightarrow \pi': 2x - y + z - 8 = 0$

Para obtener unas ecuaciones paramétricas podemos resolver la ecuación $2x - y + z - 8 = 0$

Llamamos $x = \lambda$, $y = \mu$. Despejando, $z = 8 - 2x + z = 8 - 2\lambda + \mu$. Luego,

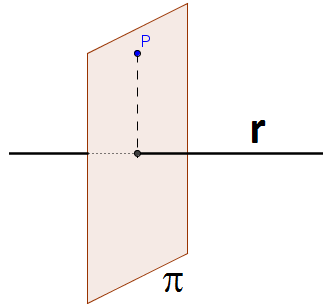
$\pi': \{x = \lambda, y = \mu, z = 8 - 2\lambda + \mu, \text{ con } \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$

3.- (prueba ordinaria) Considera el punto $P(1, 0, 5)$ y la recta "r" dada por $\{y + 2z = 0, x = 1\}$

(a) Determina la ecuación del plano que pasa por P y es perpendicular a "r".

Resolución

Observamos que $P \notin r$ porque no cumple sus ecuaciones: $\{0 + 2 \cdot 5 \neq 0, 1 = 1\}$



Un vector director de r se obtiene como producto vectorial de los vectores normales de los planos que definen a la recta s: $\vec{d} = (0, 1, 2) \times (1, 0, 0) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (0, 2, -1)$

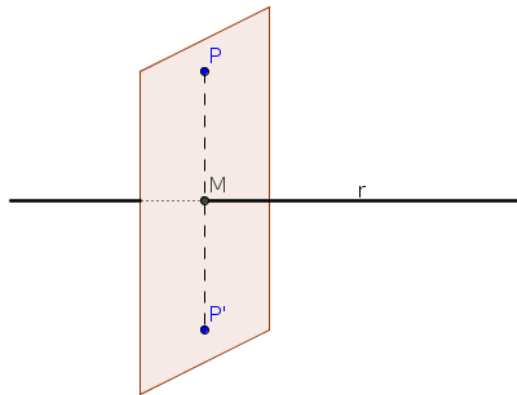
Al ser el plano π que buscamos perpendicular a la recta r, un vector normal de π es

$$\vec{n} = \vec{d} = (0, 2, -1)$$

Como π pasa por $P(1, 0, 5)$, entonces $\pi: 0(x - 1) + 2(y - 0) - 1(z - 5) = 0 \Rightarrow \pi: 2y - z + 5 = 0$

(b) Calcula la distancia de P a la recta "r" y el punto simétrico de P respecto a "r".

Resolución



El punto simétrico de $P(1, 0, 5)$ respecto de la recta r sería el punto $P'(a, b, c)$ del dibujo.

- Hallamos M, punto de corte de r y π , resolviendo el sistema formado por las ecuaciones de ambos: $\{y + 2z = 0, x = 1, 2y - z + 5 = 0\} \Rightarrow \{y + 2z = 0, 4y - 2z + 10 = 0\}$.

Sumando, $5y + 10 = 0, y = -2$; $-2 + 2z = 0, z = 1$. Luego, $M(1, -2, 1)$

- Por último, hallamos el simétrico $P'(a, b, c)$ que se pide usando que M es el punto medio del segmento PP' : $\{\frac{a+1}{2} = 1 \Rightarrow a = 1, \frac{b+0}{2} = -2 \Rightarrow b = -4, \frac{c+5}{2} = 1 \Rightarrow c = -3\}$. Por tanto, el simétrico es $P'(1, -4, -3)$

Observa que $d(P, r) = |\vec{MP}| = |(0, 2, 4)| = \sqrt{0^2 + 2^2 + 4^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5} \cong 4,47 \text{ u}$

4.- (prueba ordinaria) Considera las rectas "r" y "s" dadas por: $r: \{x = 1 + 2\lambda, y = 1 - \lambda, z = 1\}$
 $s: \{x + 2y = -1, z = -1\}$

(a) Comprueba que ambas rectas son coplanarias y halla la ecuación del plano que las contiene.

Resolución

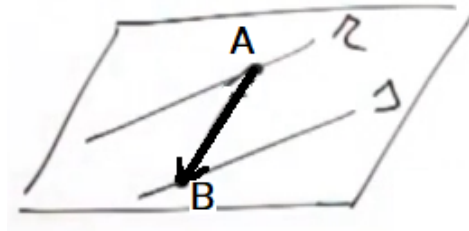
La recta r pasa por $A(1, 1, 1)$ y un vector director es $\vec{d}_r = (2, -1, 0)$

$s: \{x + 2y = -1, z = -1\}$. Hacemos $y = 0$, de donde $x = -1$. Luego, $B(-1, 0, -1) \in s$

Un vector director de s se obtiene como producto vectorial de los vectores normales de los planos que

definen a la recta s : $\vec{d}_s = (1, 2, 0) \times (0, 0, 1) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (2, -1, 0)$

Como $\vec{d}_r = \vec{d}_s = (2, -1, 0) // \vec{AB} = (-2, -1, -2)$, r y s son paralelas y, por tanto, coplanarias.



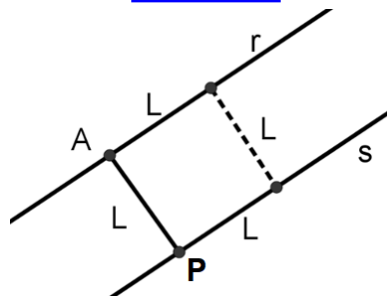
Como los vectores $\vec{d}_r$ y $\vec{AB}$ son vectores directores del plano que se pide, π , un vector normal de π es

$$\vec{n} = \vec{d}_r \times \vec{AB} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & -2 \end{vmatrix} = (2, 4, -4) // (1, 2, -2)$$

Y como π pasa por $A(1, 1, 1)$ de r , entonces $\pi: 1(x - 1) + 2(y - 1) - 2(z - 1) = 0 \Rightarrow \pi: x + 2y - 2z - 1 = 0$

(b) Sabiendo que dos de los lados de un cuadrado están en las rectas " r " y " s ", calcula su área.

Resolución



Como $B(-1, 0, -1) \in s$ y $\vec{d}_s = (2, -1, 0)$. Entonces al ser $P \in s$ es de la forma $P(-1 + 2k, -k, -1)$.

Sabemos que $A(1, 1, 1)$. Observando el dibujo $\vec{PA} = (2 - 2k, 1 + k, 2) \perp \vec{d}_r = (2, -1, 0)$

Luego, $\vec{PA} \cdot \vec{d}_r = 0$. Operando, $4 - 4k - 1 - k = 0, k = \frac{3}{5}$ y

$$P\left(-1 + 2\frac{3}{5}, -\frac{3}{5}, -1\right) \Rightarrow P\left(\frac{1}{5}, -\frac{3}{5}, -1\right)$$

El lado del cuadrado $L = |\vec{PA}| = \left| \left(\frac{4}{5}, \frac{8}{5}, 2 \right) \right| = \frac{2}{5} \sqrt{2^2 + 4^2 + 5^2} = \frac{2}{5} \sqrt{45} = \sqrt{\frac{4}{25} 45} = \sqrt{\frac{36}{5}}$

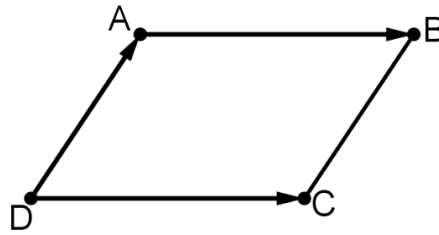
Por tanto, el área del cuadrado es $A(\text{cuadrado}) = L^2 = \left(\sqrt{\frac{36}{5}} \right)^2 = \frac{36}{5} = 7,2 \text{ u}^2$

5.- Considera un paralelogramo de vértices consecutivos A, B, C y D siendo $A(1, 0, -1)$, $B(3, 2, 1)$

y $C(-7, 1, 5)$.

(a) Determina las coordenadas del punto D.

Resolución



Sea $D(x, y, z)$ el cuarto vértice. Entonces, $\vec{AB} = \vec{DC} \Rightarrow (2, 2, 2) = (-7 - x, 1 - y, 5 - z)$

Luego, $2 = -7 - x$; $x = -9$; $2 = 1 - y$; $y = -1$; $2 = 5 - z$; $z = 3$. Por tanto, $D(-9, -1, 3)$

(b) Calcula el área del paralelogramo.

Resolución

$$\vec{AD} = (-10, -1, 4); A(\text{paralelogramo}) = \left| \vec{AB} \times \vec{AD} \right|;$$

$$\vec{AB} \times \vec{AD} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 2 & 2 \\ -10 & -1 & 4 \end{vmatrix} = (10, -28, 18)$$

$$A(\text{paralelogramo}) = \sqrt{10^2 + (-28)^2 + 18^2} = \sqrt{1208} \cong 34,76 \text{ u}^2$$

(c) Halla la ecuación general del plano que contiene al paralelogramo.

Resolución

Como los vectores $\vec{AB}$ y $\vec{AD}$ son vectores directores del plano que se pide, π , un vector normal de π es

$$\vec{n} = \vec{AB} \times \vec{AD} = (10, -28, 18) // (5, -14, 9)$$

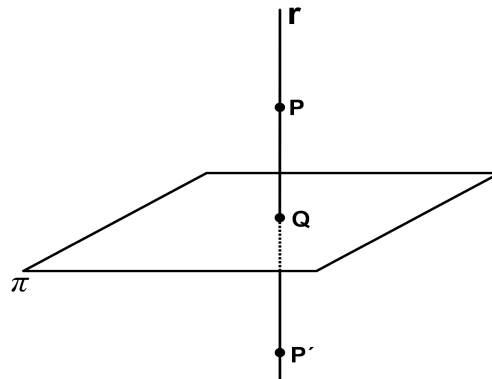
Y como π pasa por $A(1, 0, -1)$ entonces $\pi: 5(x - 1) - 14(y - 0) + 9(z + 1) = 0 \Rightarrow \pi: 5x - 14y + 9z + 4 = 0$

6.- Considera el punto $P(1, 0, -1)$ y el plano π de ecuación $2x - y + z + 1 = 0$.

(a) Halla el simétrico del punto P respecto al plano π .

Resolución

Como las coordenadas de P no cumplen la ecuación del plano π , pues $2 \cdot 1 - 0 - 1 + 1 = 2 \neq 0$, el punto P no pertenece al plano π :



- Hallamos la recta r que pasa por P y es ortogonal a π :

Un vector director de r es el vector normal del plano, $\vec{d} = \vec{n} = (2, -1, 1)$. Luego,

$$r: \begin{cases} x = 1 + 2k \\ y = -k \\ z = -1 + k \end{cases}$$

- Hallamos el punto de corte, Q, entre el plano $\pi: 3x + 2y + z = 5$ y la recta resolviendo el sistema de ecuaciones:

Sustituyendo en la ecuación del plano se tiene $2(1 + 2k) + k - 1 + k + 1 = 0 \Rightarrow 6k = -2$; $k = \frac{-1}{3}$

Luego, $\{x = 1 + 2\frac{-1}{3} = \frac{1}{3} \ y = \frac{1}{3} \ z = -1 + \frac{-1}{3} = \frac{-4}{3}\}$. El punto de corte es $Q(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{-4}{3})$

- Por último, hallamos el simétrico $P'(a, b, c)$ de P usando que Q es el punto medio del segmento PP' :

$$\{\frac{a+1}{2} = \frac{1}{3} \Rightarrow 3a + 3 = 2 \Rightarrow a = \frac{-1}{3} \ \frac{b+0}{2} = \frac{1}{3} \Rightarrow 3b = 2 \Rightarrow b = \frac{2}{3} \ \frac{c-1}{2} = \frac{-4}{3} \Rightarrow 3c - 3 = -8 \Rightarrow c = \frac{-5}{3}\}$$

El punto simétrico que se pide es $P'(\frac{-1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{-5}{3})$

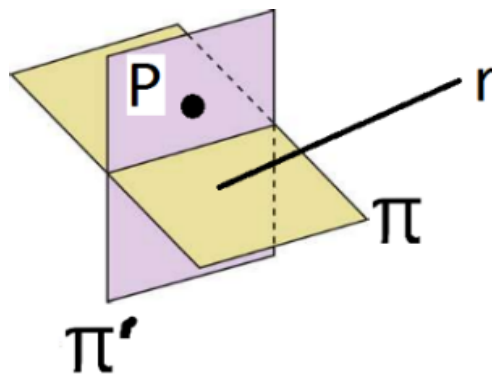
(b) Determina la ecuación del plano que contiene al punto P, es perpendicular al plano π y es paralelo a la recta dada por $\{x - 2y = 1 \ z = 3\}$.

Resolución

Sea π' el plano que buscamos y

$$r: \{x - 2y = 1 \ z = 3\}, \vec{d}_r = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-2, -1, 0) // (2, 1, 0)$$

Como $\vec{d}_r$ ni es paralelo ni perpendicular a $\vec{n}_\pi = (2, -1, 1) \Rightarrow r$ y π son secantes (no perpendiculares)



$$\{\pi' \perp \pi \Rightarrow \vec{n}_{\pi'} \perp \vec{n}_\pi \ \pi' // r \Rightarrow \vec{n}_{\pi'} \perp \vec{d}_r\}. \text{ Tomamos } \vec{n}_{\pi'} = \vec{n}_\pi \times \vec{d}_r = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} & 2 & -1 & 1 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1, 2, 4)$$

Y como π pasa por $P(1, 0, -1)$ entonces $\pi: -1(x - 1) - 2(y - 0) + 4(z + 1) = 0 \Rightarrow \pi: -x + 2y + 4z + 5 = 0$

7.- Sea "r" la recta dada por $\{x + z = 1 \ y = -1\}$ y sea "s" la recta definida por $\{x = 2 + \lambda \ y = 2 \ z = 2 + 2\lambda\}$

a) Comprueba que las rectas r y s se cruzan y halla la ecuación de la recta que corta perpendicularmente a r y a s.

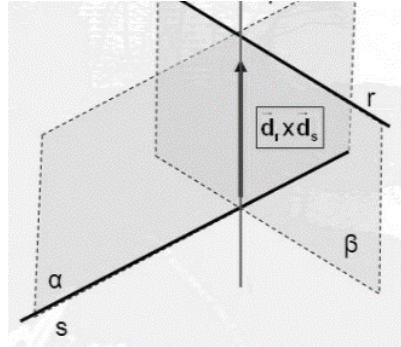
Resolución

La recta r está dada como intersección de dos planos. Luego, su vector director se puede obtener como el producto vectorial de los vectores normales de los planos:

$\vec{d}_r = (1, 0, 1) \times (0, 1, 0) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1, 0, 1)$; En r , para $z = 0$, $x = 1$. Luego, $A(1, -1, 0) \in r$

La recta s pasa por $B(2, 2, 2)$ y tiene vector director $\vec{d}_s = (1, 0, 2)$

Como $\det(\vec{d}_r, \vec{d}_s, \vec{AB}) = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$, los vectores $\vec{d}_r$, $\vec{d}_s$ y $\vec{AB}$ son linealmente independientes. Luego, r y s se cruzan



Sea t la recta que se pide. Como la recta t debe ser perpendicular a r y a s , tendrá de vector director

$$\vec{d}_t = \vec{d}_r \times \vec{d}_s = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} & -1 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = (0, 3, 0) // (0, 1, 0)$$

Hallamos el plano, α , perpendicular a r y que contiene a s : Al tener como vectores directores $\vec{d}_s$ y $\vec{d}_t$, un vector normal de α es $\vec{n}_\alpha = \vec{d}_s \times \vec{d}_t = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-2, 0, 1)$

Y como α pasa por $B(2, 2, 2)$, entonces $\alpha: -2(x - 2) + 0(y - 2) + 1(z - 2) = 0 \Rightarrow \alpha: -2x + z + 2 = 0$

Hallamos el plano, β , perpendicular a s y que contiene a r :

Al tener β como vectores directores $\vec{d}_r$ y $\vec{d}_t$, un vector normal de β es

$$\vec{n}_\beta = \vec{d}_r \times \vec{d}_t = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1, 0, -1) // (1, 0, 1)$$

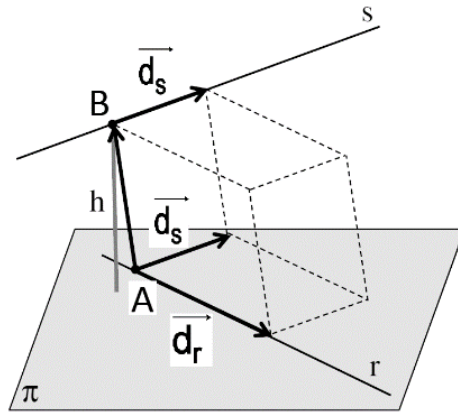
Y como β pasa por $A(1, -1, 0)$, entonces $\beta: 1(x - 1) + 0(y + 1) + 1(z - 0) = 0 \Rightarrow \beta: x + z - 1 = 0$

La recta que corta perpendicularmente a r y a s es $t = \alpha \cap \beta$, o sea $t: \begin{cases} -2x + z + 2 = 0 \\ x + z - 1 = 0 \end{cases}$

b) Calcula la distancia entre r y s .

Resolución

Podemos hallarla usando la fórmula de la altura del paralelepípedo,



$$V_{\text{paralel}} = A_{\text{base}} \cdot h \Rightarrow h = d(r, s) = \frac{V_{\text{paralel}}}{A_{\text{base}}} = \frac{|\det(\vec{d}_r, \vec{d}_s, \vec{AB})|}{|\vec{d}_r \times \vec{d}_s|}$$

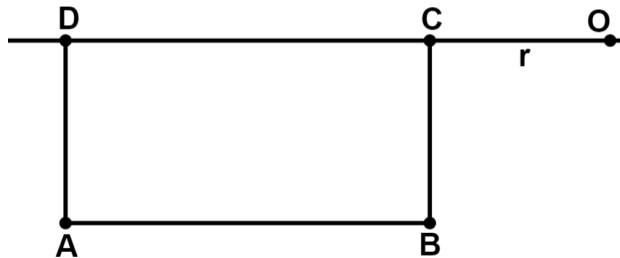
$$\det(\vec{d}_r, \vec{d}_s, \vec{AB}) = |-1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 2 \ 1 \ 3 \ 2| = 9 ; \quad \vec{d}_r \times \vec{d}_s = (0, 3, 0) \Rightarrow$$

$$d(r, s) = \frac{|9|}{\sqrt{0^2 + 3^2 + 0^2}} = \frac{9}{3} = 3 \text{ u}$$

8.- Considera un rectángulo de vértices consecutivos A, B, C y D siendo A(1, 1, 0) y B(2, 2, 1). Sabiendo que la recta r que contiene a los puntos C y D pasa por el origen de coordenadas se pide:

a) Halla unas ecuaciones paramétricas de r.

Resolución



La recta r pasa por O(0, 0, 0) y tiene vector director $\vec{d}_r = \vec{AB} = (1, 1, 1)$. Luego, $\{x = k, y = k, z = k\}$, con $k \in \mathbb{R}$.

b) Calcula el área del triángulo ABC.

c) Determina las coordenadas del punto D.

Resolución

Al ser C, D $\in r \Rightarrow C(c, c, c)$ y D(d, d, d)

$$\text{Como } \vec{BC} \perp \vec{AB} \Rightarrow (-2, -2, -1) \cdot (1, 1, 1) = 0 \Rightarrow -2 + -2 + -1 = 0 \Rightarrow = \frac{5}{3} \Rightarrow C\left(\frac{5}{3}, \frac{5}{3}, \frac{5}{3}\right)$$

Como

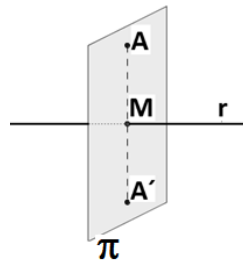
$$\vec{AD} \perp \vec{AB} \Rightarrow (d-1, d-1, d-0) \cdot (1, 1, 1) = 0 \Rightarrow d-1 + d-1 + d = 0 \Rightarrow d = \frac{2}{3} \Rightarrow D\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

$$A(\text{trián.}) = \frac{1}{2} A(\text{rect.}) = \frac{1}{2} |\vec{AB}| \cdot |\vec{BC}| = \frac{1}{2} |(1, 1, 1)| \cdot \left| \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) \right| = \frac{1}{2} \sqrt{3} \frac{1}{3} \sqrt{6} = \frac{\sqrt{18}}{6} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cong 0,71$$

9.- (prueba extraordinaria) Considera el punto $A(1, -1, 1)$ y la recta "r" dada por $\{x = 1 + 2\lambda, y = 1 - \lambda, z = 1\}$

(a) Calcula las coordenadas del punto simétrico de A respecto a "r".

Resolución



El punto simétrico de A respecto de la recta r sería el punto $A'(a, b, c)$ del dibujo. Vamos a hallarlo:

- Hallamos el plano π que pasa por A y es ortogonal a la recta r:

Un vector normal $\vec{n}$ del plano es el vector director de r: $\vec{n} = \vec{d} = (2, -1, 0)$

Y como π pasa por A entonces $\pi: 2(x - 1) - 1(y + 1) + 0(z - 1) = 0$, de donde $\pi: 2x - y - 3 = 0$

- Hallamos M, punto de corte de r y π , resolviendo el sistema formado por las ecuaciones de ambos:

Sustituyendo en la ecuación del plano se tiene $2(1 + 2\lambda) - 1(1 - \lambda) - 3 = 0 \Rightarrow 5\lambda - 2 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{2}{5}$

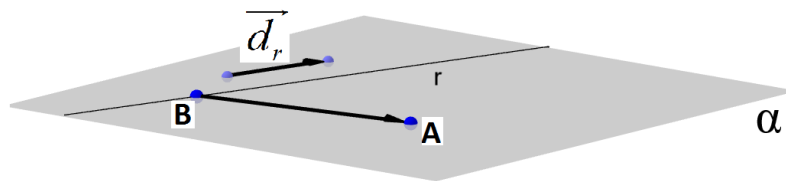
Luego, $\{x = 1 + 2\frac{2}{5}, y = 1 - \frac{2}{5}, z = 1\}$. El punto de corte es $M(\frac{9}{5}, \frac{3}{5}, 1)$

- Hallamos el simétrico $A'(a, b, c)$ de $A(1, -1, 1)$ usando que M es el punto medio del segmento AA' :

$\{\frac{a+1}{2} = \frac{9}{5} \Rightarrow 5a + 5 = 18 \Rightarrow a = \frac{13}{5}, \frac{b-1}{2} = \frac{3}{5} \Rightarrow 5b - 5 = 6 \Rightarrow b = \frac{11}{5}, \frac{c+1}{2} = 1 \Rightarrow c + 1 = 2 \Rightarrow c = 1\}$
 El punto simétrico que se pide es $A'(\frac{13}{5}, \frac{11}{5}, 1)$

(b) Determina la ecuación del plano que contiene a "r" y pasa por A.

Resolución



Observa que como $r: \{x = 1 + 2\lambda, y = 1 - \lambda, z = 1\}$ entonces $B(1, 1, 1) \in r$ y $\vec{d}_r = (2, -1, 0)$ es vector director de r.

Como los vectores $\vec{d}_r$ y $\vec{BA} = (0, -2, 0)$ son vectores directores de α , un vector normal de α es

$$\vec{n} = \vec{d}_r \times \vec{BA} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, -4) // (0, 0, 1)$$

Y como α pasa por $B(1, 1, 1)$, entonces $\alpha: 0(x - 1) + 0(y - 1) + 1(z - 1) = 0 \Rightarrow \alpha: z = 1$

10.- (prueba extraordinaria) Calcula la distancia entre las rectas dadas por las siguientes ecuaciones $x = y = z$ y $\{x = 1 + \mu, y = 3 + \mu, z = -\mu\}$

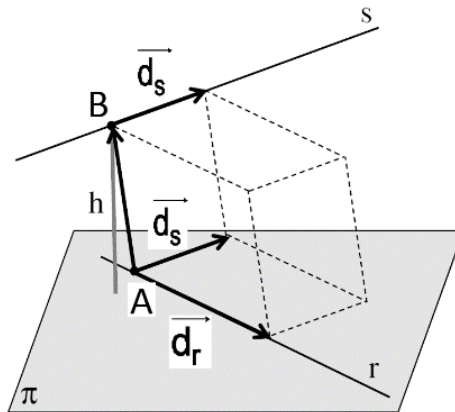
Resolución

La recta r pasa por $A(0, 0, 0)$ y tiene vector director $\vec{d}_r = (1, 1, 1)$

La recta s pasa por $B(1, 3, 0)$ y tiene vector director $\vec{d}_s = (1, 1, -1)$

Como $\det(\vec{d}_r, \vec{d}_s, \vec{AB}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 3 - 1 - 1 + 3 = 4 \neq 0$, los vectores $\vec{d}_r$, $\vec{d}_s$ y $\vec{AB}$ son linealmente independientes. Luego, r y s se cruzan.

Para hallar la distancia entre ambas podemos usar la fórmula de la altura del paralelepípedo,



$$V_{\text{paralel}} = A_{\text{base}} \cdot h \rightarrow h = d(r, s) = \frac{V_{\text{paralel}}}{A_{\text{base}}} = \frac{|\det(\vec{d}_r, \vec{d}_s, \vec{AB})|}{|\vec{d}_r \times \vec{d}_s|}$$

$$\vec{d}_r \times \vec{d}_s = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (-2, 2, 0); \quad d(r, s) = \frac{|4|}{\sqrt{(-2)^2 + 2^2 + 0^2}} = \frac{4}{\sqrt{8}} = \frac{4}{2\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \cong 1,41 \text{ u}$$

11.- Determina el punto de la recta $r: \frac{x-1}{2} = y + 1 = \frac{z}{3}$ que equidista de los planos

$$\pi: x + y + z + 3 = 0 \quad \text{y} \quad \pi': \{x = -3 + \lambda y = -\lambda + \mu z = -6 - \mu$$

Resolución

Un punto genérico de la recta es $P(x, y, z) = P(1 + 2\lambda, -1 + \lambda, 3\lambda)$

Ponemos π' en forma implícita: $A(-3, 0, -6) \in \pi'$; $\vec{u} = (1, -1, 0)$ y $\vec{v} = (0, 1, -1)$ son paralelos a π'

$$\vec{n}_{\pi'} = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (1, 1, 1) \Rightarrow \pi': 1(+3) + 1(-0) + 1(+6) = 0 \Rightarrow \pi': + + + 9$$

$$(\pi) = (\pi') \Rightarrow \frac{|++3|}{\sqrt{3}} = \frac{|+++9|}{\sqrt{3}} \Rightarrow \{+ + + 3 = + + + 9 \rightarrow 3 = 9 \text{ (imposible)} \quad \text{ó} + + +$$

$$2x + 2y + 2z + 12 = 0 \Rightarrow x + y + z + 6 = 0. \text{ Sustituyendo, } 1 + 2\lambda - 1 + \lambda + 3\lambda + 6 = 0 \Rightarrow \lambda = -1$$

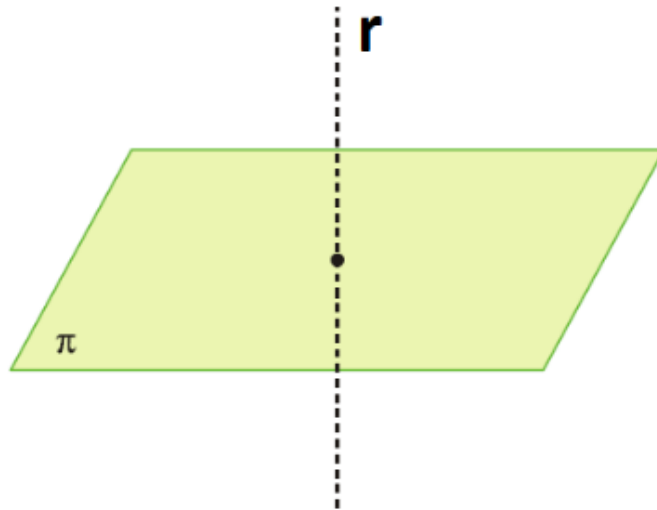
Por tanto, el punto que buscamos es $P(1+2(-1), -1-1, 3(-1)) \Rightarrow P(-1, -2, -3)$

12.- Considera el plano π de ecuación $6x - my + 2z = 1$ y la recta r dada por $\frac{x-1}{-3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+2}{-1}$

a) Calcula m en el caso en que la recta r es perpendicular al plano π .

Resolución

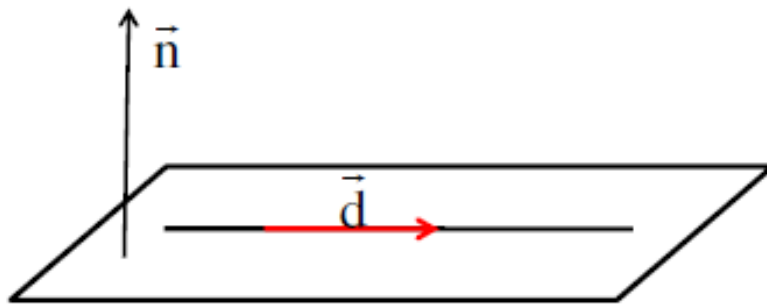
$$\vec{d}_r = (-3, 2, -1); \quad \vec{n}_{\pi} = (6, -m, 2)$$



$$r \perp \pi \Leftrightarrow \vec{d}_r \perp \vec{n}_\pi \Leftrightarrow \frac{-3}{6} = \frac{2}{-m} = \frac{-1}{2} \Leftrightarrow m = 4$$

b) ¿Existe algún valor de m para el que la recta r esté contenida en el plano π?

Resolución



$$\text{Si } r \subset \pi \Rightarrow \vec{d}_r \perp \vec{n}_\pi \Rightarrow \vec{d}_r \cdot \vec{n}_\pi = 0 \Rightarrow -3 \cdot 6 + 2(-m) + (-1)2 = 0 \Rightarrow m = -10$$

Pero para $m = -10$, $\pi: 6x + 10y + 2z = 1$; $A(1, -1, -2) \in r$ pero $A \notin \pi$, pues no cumple la ecuación

de π : $6 \cdot 1 + 10(-1) + 2(-2) = -8 \neq 1$.

Por tanto, para $m = -10$, $r \not\subset \pi$. Luego, no existe ningún valor de m para el cual r esté contenida en π