

Тема уроку: Формули суми (різниці) однойменних тригонометричних функцій.

Перетворення добутку тригонометричних функцій у суму.

Мета уроку: Вивчення формул суми і різниці однойменних тригонометричних функцій і формул перетворення добутку тригонометричних функцій у суму. Формування умінь учнів застосовувати вивчені формули для спрощення виразів та обчислень.

I. Перевірка домашнього завдання.

2. Розв'язування вправ. Спростіть вирази:

а) $tg(\pi + \alpha) \cdot tg\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) - \sin(\pi + \alpha) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right);$

б) $ctg(\pi - \alpha) \cdot ctg\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) - tg(2\pi + \alpha) \cdot ctg\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right);$

в) $\frac{\cos^2\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)}{tg^2(\alpha - 2\pi)} + \frac{\cos^2(\pi - \alpha)}{tg^2\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right)};$

г) $1 - \frac{tg\left(\alpha + \frac{3\pi}{2}\right)}{ctg(\pi - \alpha)} + \frac{\sin(\pi + \alpha)}{\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)}.$

Відповідь: а) $\cos^2 \alpha$; б) $\cos^2 \alpha$; в) 1; г) $tg \alpha$.

II. Повідомлення теми і завдань уроку.

III. Сприймання і усвідомлення нового матеріалу.

Демонструється таблиця 7.

Таблиця 7

Формули перетворення суми у добуток

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}; \quad \cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2};$$

$$\sin x \pm \sin y = 2 \sin \frac{x \pm y}{2} \cos \frac{x \mp y}{2}; \quad tgx \pm tgy = \frac{\sin(x \pm y)}{\cos x \cdot \cos y}.$$

добутку у суму

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2} (\cos(x-y) + \cos(x+y));$$

$$\sin x \sin y = \frac{1}{2} (\cos(x-y) - \cos(x+y));$$

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2} (\sin(x+y) + \sin(x-y)).$$

Пояснення вчителя

1. Виведемо формулу перетворення суми синусів в добуток.

Позначимо $\frac{x+y}{2} = \alpha$, $\frac{x-y}{2} = \beta$, тоді $\alpha + \beta = x$, $\alpha - \beta = y$, і тому
 1) $\sin x + \sin y = \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta + \sin \alpha \cdot \cos \beta -$
 $-\cos \alpha \cdot \sin \beta = 2 \sin \alpha \cdot \cos \beta = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$. Отже, сума синусів
 дорівнює подвоєному добутку синуса півсуми на косинус піврізниці.

Для суми косинусів маємо:
 2) $\cos x + \cos y = \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta + \cos \alpha \cos \beta +$
 $+\sin \alpha \sin \beta = 2 \cos \alpha \cos \beta = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$. Отже, сума косинусів
 дорівнює подвоєному добутку косинуса півсуми на косинус піврізниці.

Для різниці косинусів маємо:
 3) $\cos x - \cos y = \cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta - \cos \alpha \cos \beta -$
 $-\sin \alpha \sin \beta = -2 \sin \alpha \sin \beta = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$. Отже, різниця косинусів
 дорівнює числу, протилежному подвоєному добутку синуса півсуми на синус
 піврізниці.

4) $\sin x - \sin y = \sin x + \sin(-y) = 2 \sin \frac{x-y}{2} \cos \frac{x+y}{2}$. Отже, різниця синусів
 дорівнює подвоєному добутку синуса піврізниці на косинус півсуми.

2. Для одержання формул перетворення добутку у суму випишемо підряд
 чотири формули:

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y; \quad (1)$$

$$\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y; \quad (2)$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y; \quad (3)$$

$$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y. \quad (4)$$

Віднявши почленно із рівності (4) рівність (3), одержимо:

$$\cos(x-y) - \cos(x+y) = 2 \sin x \sin y$$

або

$$\sin x \sin y = \frac{1}{2} (\cos(x-y) - \cos(x+y))$$

*Добуток синусів двох чисел дорівнює піврізниці косинуса різниці і косинуса
 суми цих чисел.*

Додавши почленно рівності (4) і (3), маємо:

$$\cos(x-y) + \cos(x+y) = 2 \cos x \cos y$$

або

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2} (\cos(x-y) + \cos(x+y))$$

Добуток косинусів двох чисел дорівнює півсумі косинуса різниці і косинуса суми цих чисел.

Додавши почленно рівності (1) і (2), одержимо

$$\sin(x-y) + \sin(x+y) = 2 \sin x \cos y$$

або

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2} (\sin(x-y) + \sin(x+y))$$

Добуток синуса одного числа на косинус другого числа дорівнює півсумі синуса різниці і синуса суми цих чисел.

Виконання вправ

1. Спростіть вирази:

а) $\cos\left(\frac{\pi}{4} - \beta\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4} + \beta\right)$; б) $\cos^2\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) - \cos^2\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)$.

в) $\sin \alpha \cdot \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right)$; г) $\sin\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right)$.

Відповідь: а) $\sqrt{2} \sin \beta$; б) $\sin 2\alpha$; в) $-\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right)$; г) $\sqrt{3} \cos \alpha$.

2. Обчисліть:

а) $\cos 22^\circ - \cos 38^\circ$; б) $\sin 5^\circ + \sin 55^\circ$.

Відповідь: а) $\sin 8^\circ$; б) $\cos 25^\circ$.

3. Перетворіть в добуток:

а) $\cos 2\alpha + \cos 14\alpha + \cos 6\alpha + \cos 10\alpha$;

б) $\sin 4\beta + \sin 10\beta + \sin 22\beta + \sin 16\beta$.

Відповідь: а) $4 \cos 2\alpha \cos 4\alpha \cos 8\alpha$; б) $4 \cos 3\beta \cos 6\beta \sin 13\beta$.

4. Доведіть тотожність:

а) $\frac{\sin 2\alpha + \sin 5\alpha - \sin 3\alpha}{\cos \alpha + 1 - 2 \sin^2 2\alpha} = 2 \sin \alpha$; б) $\frac{\sin \alpha + \sin 3\alpha + \sin 5\alpha + \sin 7\alpha}{\cos \alpha - \cos 3\alpha + \cos 5\alpha - \cos 7\alpha} = \operatorname{ctg} \alpha$.

IV. Підведення підсумків уроку.