

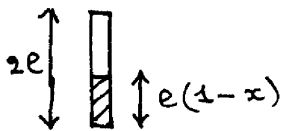
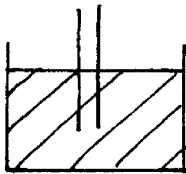
Les candidats sont priés de porter nettement en tête de leur copie : PREMIERE EPREUVE ou DEUXIEME EPREUVE.

Il est recommandé de lire en entier l'énoncé de l'épreuve choisie. Les trois parties sont indépendantes ; dans chaque partie certaines questions le sont également.

CHACQUE CANDIDAT DOIT CHOISIR UNE SEULE DES DEUX EPREUVES SUIVANTES :

PREMIERE EPREUVE

(portant sur le programme I, plus particulièrement destiné aux élèves des classes préparatoires à l'École Nationale Supérieure d'Arts et Métiers) .



I – Dans cette partie, on néglige les forces de capillarité. On admet les données suivantes :

pression extérieure $p_0 = 1,01 \cdot 10^5$ Pa

correspondant à une hauteur de mercure $h = 0,76$ m

masse volumique du mercure $\rho = 13\,600$ kg.m⁻³

accélération de la pesanteur $g = 9,8$ m.s⁻²

rapport des chaleurs spécifiques de l'air $\gamma = 1,4$

Un tube de section intérieure constante $S = 1,0 \cdot 10^{-4}$ m², de longueur $2l = 0,20$ m et de masse $m = 0,020$ kg est tenu vertical, moitié dans l'air, moitié dans du mercure. L'on pose sur son extrémité supérieure un couvercle étanche et l'on soulève le tube.

Lorsque celui-ci est complètement sorti du mercure, il en contient encore sur une hauteur $l(1 - x)$.

1°/ Ecrire deux relations indépendantes entre les données et la pression p_1 de l'air occupant la partie supérieure du tube ; on suppose que l'air emprisonné n'a pas eu le temps d'échanger de la chaleur.

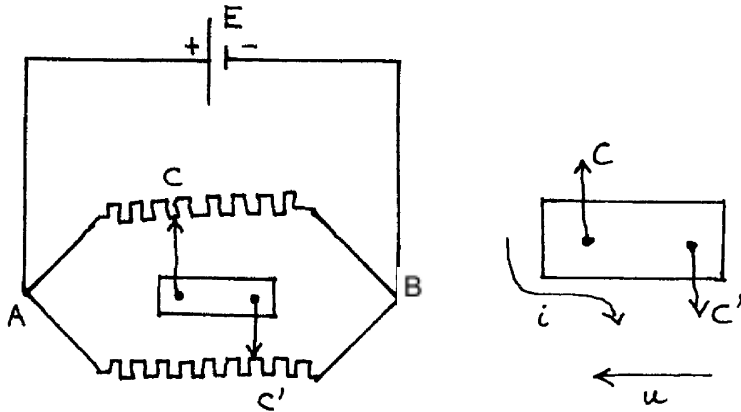
2°/ En déduire une relation entre l , h , γ et x . Supposant x petit, trouver une expression approximative de x en fonction de l , h et γ .

3°/ Calculer numériquement x .

4°/ Calculer numériquement la force qu'il faut exercer sur le tube pour le maintenir immobile.

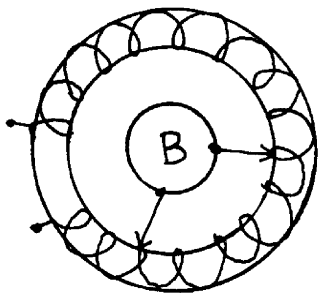
5°/ Le tube est maintenu immobile. Calculer la force qu'il faut exercer sur le couvercle pour le détacher, en admettant que le couvercle est en contact avec le tube sur une surface égale à $3 \cdot 10^{-5}$ m².

6°/ L'équilibre thermique se rétablit avec l'air extérieur. Le mercure monte-t-il (de quelle hauteur ?) ou quitte-t-il partiellement le tube (quelle est la masse perdue ?) ?

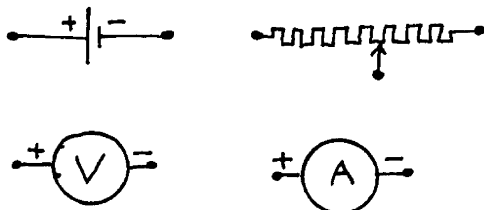


II-1°/ Deux résistances ACB et AC'B de résistances égales $R = 1 \text{ ohm}$ sont reliées en parallèle à un générateur de force électromotrice $E = 2 \text{ volts}$. Deux curseurs C et C' se déplacent le long des résistances de sorte que les résistances des branches AC et BC' restent égales ; soit R_x leur valeur. L'on branche successivement entre C et C' divers dipôles ; ils sont soumis à la tension $u = V_C - V_{C'}$ et parcourus par le courant i mesuré dans le sens CC' ; on appelle p la puissance consommée par le dipôle et P la puissance fournie par le générateur. Discuter et exprimer numériquement i , u , p , P en fonction de x dans les cas suivants :

- le dipôle est un court-circuit ;
- le dipôle est un redresseur parfait : il est équivalent à une résistance nulle si le courant circule dans le sens CC' et à une résistance infinie dans le cas contraire ;
- le dipôle est une diode semi-conductrice dont on schématise le fonctionnement de la façon suivante :
 ou bien $u < 1 \text{ volt}$ $i = 0$;
 ou bien $u = 1 \text{ volt}$ $i > 0$.



2°/ L'on dispose d'une batterie de force électromotrice E et d'un potentiomètre ; celui-ci comporte une résistance bobinée sur un tore et un bouton B mobile autour de l'axe du tore. L'on se propose de fixer au bouton deux curseurs, et de relier ces curseurs et la résistance bobinée aux deux bornes de la batterie et à deux bornes d'utilisation de sorte que lorsque l'on tourne le bouton la tension entre les bornes d'utilisation varie de $-E$ à $+E$. Comment faut-il s'y prendre ?



3°/ L'on désire contrôler qu'un générateur n'a pas de résistance interne, c'est-à-dire que la tension à ses bornes est indépendante du courant qu'elles débitent. L'on dispose, outre du générateur, d'un ampèremètre, d'un voltmètre, tous deux de types magnétoélectriques, et des rhéostats désirés (c'est-à-dire de résistances munies d'un curseur).

Dessiner le ou les montages utilisés en indiquant les signes des pôles de l'ampèremètre, du voltmètre et du générateur (pour ceux de ces appareils qui sont utilisés) et décrire la procédure de contrôle.

III

L'eau à la température θ possède les propriétés suivantes

chaleur massique pour $\theta > 0^\circ\text{C}$ $c = 1 \text{ cal g}^{-1} \text{ K}^{-1}$

chaleur massique pour $\theta < 0^\circ\text{C}$ $c' = 0,5 \text{ cal g}^{-1} \text{ K}^{-1}$

chaleur de fusion à 0°C $L = 80 \text{ cal g}^{-1}$

1°/ Un récipient incapable d'absorber ou de transmettre la chaleur contient une masse $m' = 96 \text{ g}$ de glace à 0°C . L'on y verse doucement une masse m d'eau à $\theta = 40^\circ\text{C}$. Discuter et exprimer numériquement la température θ_f et la proportion en masse d'eau liquide x_f dans le contenu du récipient à l'équilibre en fonction de m exprimé en grammes. Calculer m pour les cas particuliers :

a) $x_f = 0,5$ $\theta_f = 0^\circ\text{C}$

b) $x_f = 1$ $\theta_f = 0^\circ\text{C}$

c) $x_f = 1$ $\theta_f = 20^\circ\text{C}$

2°/ Un récipient semblable contient une masse $m' = 96 \text{ g}$ de glace à $\theta' = -10^\circ\text{C}$.

L'on y verse doucement une masse m d'eau à $\theta = 40^\circ\text{C}$. Discuter et exprimer numériquement la température θ_f et la proportion en masse d'eau liquide x_f dans le contenu du récipient à l'équilibre en fonction de m exprimé en grammes. Calculer m pour les cas particuliers suivants

a) $x_f = 0$ $\theta_f = -5^\circ\text{C}$

b) $x_f = 0$ $\theta_f = 0^\circ\text{C}$

c) $x_f = 0,5$ $\theta_f = 0^\circ\text{C}$

d) $x_f = 1$ $\theta_f = 0^\circ\text{C}$

e) $x_f = 1$ $\theta_f = 20^\circ\text{C}$

Tracer sommairement l'allure du graphe de θ_f en fonction de m .

DEUXIEME PREUVE

(portant sur le PROGRAMME II, plus particulièrement destiné aux élèves des classes préparatoires aux grandes écoles (Mathématiques Supérieures)).

1 – 1°/ Soit un repère cartésien Oxy . Une charge q se trouve au point de coordonnées $(a, 0)$, une charge $-q$ se trouve au point $(-a, 0)$. On étudie en un point M de coordonnées polaires (r, θ) ($r = OM$; $\theta = (Ox, OM)$) le potentiel V créé par ce doublet. Montrer que lorsque r tend vers l'infini, le potentiel est un infiniment petit et calculer sa partie principale.

2°/ Soit $\vec{p}$ un vecteur, $\vec{u}$ le vecteur unitaire radial de coordonnées cartésiennes $(\cos \theta, \sin \theta)$. Un dipôle situé en O et de moment $\vec{p}$ est l'être qui en un point arbitraire de coordonnées polaires (r, θ) crée le potentiel V :

$$V = \frac{\vec{p} \cdot \vec{u}}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

Quel est le dipôle qui ressemble au doublet de la question 1 ?

Quelle est la différence entre doublet et dipôle ?

3°/ Une droite Oy porte une densité linéaire de charge constante λ .

Calculer les coordonnées cartésiennes du champ électrique au point de coordonnées $(x, 0)$ en intégrant les champs électriques élémentaires créés par les éléments de charge λdy .

4°/ La droite Oy porte une densité linéaire de dipôle constante : chaque élément dy de la droite se comporte comme un dipôle de moment $\vec{P} dy$, $\vec{P}$ étant un vecteur constant. Calculer le potentiel au point $(x, 0)$ en intégrant les potentiels élémentaires dans les cas suivants

a) $\vec{P}$ est parallèle à Oz ;

b) $\vec{P}$ est parallèle à Oy ;

c) $\vec{P}$ est parallèle à Ox ;

d) $\vec{P}$ est d'orientation quelconque.

Les calculs des questions 3 et 4 se ressemblent-ils ?

5°/ Une distribution $\vec{p}(\vec{r}_i)$ de dipôle est la donnée en un certain nombre de points M_i ($\vec{OM}_i = \vec{r}_i$) des moments $\vec{p}$ qui s'y trouvent placés. Exprimer le potentiel que cette distribution crée au point O en fonction des champs électriques suivants :

$\vec{E}_1$ créé au point O par la distribution de charge $q_1(\vec{r}_i) = p_x(\vec{r}_i)$

$\vec{E}_2$ créé au point O par la distribution de charge $q_2(\vec{r}_i) = p_y(\vec{r}_i)$

$\vec{E}_3$ créé au point O par la distribution de charge $q_3(\vec{r}_i) = p_z(\vec{r}_i)$

II – On se propose de déterminer le point où "l'attraction de la Lune équilibre celle de la Terre". Dans toute la partie II la Terre et la Lune sont assimilées à des points matériels de masses M et M' et de distance D fixe :

$$M = 5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg}$$

$$M' = 7,34 \cdot 10^{22} \text{ kg}$$

$$D = 3,84 \cdot 10^8 \text{ m}$$

La constante de la gravitation est

$$G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$$

1°/ L'on admet qu'il existe un référentiel galiléen dans lequel la Terre et la Lune sont immobiles. Montrer qu'il n'existe qu'une seule position dans l'espace où un point matériel serait en équilibre. Si αD est la distance de cette position à la Lune, exprimer α en fonction de $\mu = M'/M$, puis calculer numériquement α .

2°/ L'on considère désormais qu'il existe un repère galiléen auquel est attaché un point O tel que les trajectoires de la Terre et la Lune soient des cercles coplanaires de centre O et de rayons a et a', la Terre, le point O et la Lune restant alignés à chaque instant.

a) Exprimer la vitesse angulaire de la Terre et de la Lune et les rayons a et a' en fonction de D, μ , M, G.

b) Un point matériel P de masse m situé sur la droite joignant O, la Terre et la Lune est en équilibre relatif par rapport à ces astres : sa trajectoire est donc un cercle de centre O et de rayon r. A quelle condition les mouvements de la Terre et de la Lune ne sont-ils pas sensiblement perturbés ?

c) Montrer qu'il existe trois positions d'équilibre relatif pour P sur la droite joignant la Terre et la Lune. Ecrire la relation entre G, M, M', a, a', D et r qui exprime l'équilibre relatif de P pour celle des trois positions qui est située entre la Terre et la Lune.

d) On pose $r = a' - \alpha D$. Montrer que :

$$\mu = \frac{\frac{1}{(1-\alpha)^2} - (1-\alpha)}{\frac{1}{\alpha^2} - \alpha}$$

si la relation de c) est satisfaite.

e) Montrer que si α est un infiniment petit, μ est un infiniment petit équivalent à $k\alpha^p$ (k et p constantes à déterminer).

f) Calculer numériquement α .

g) Vérifier la relation de d) sur des valeurs particulières de μ , α , ou bien montrer que cette relation est invariante dans une certaine transformation portant sur μ et α .

III

Les transformations envisagées dans la partie III font passer un système d'un état d'équilibre initial i à un état d'équilibre final f sous une pression extérieure constante p_e . La pression dans le système est aussi p_e pour les états i et f. On suppose en outre dans toute la partie III que le système ne reçoit pas d'autre travail que celui de la pression.

1°/ Soit $\Delta V = V_f - V_i$ la variation de volume du système et W le travail reçu montrer que : $W = - p_e \Delta V$

Pour raisonner, on peut supposer le système dans un cylindre et déplacer un piston.

2°/ Soit $\Delta H = H_f - H_i$ la variation de l'enthalpie du système et Q la chaleur reçue ; montrer que : $Q = \Delta H$

Mines de Douai 1975

3°/ Dans un lieu thermiquement isolé, plusieurs corps de températures différentes sont mis en contact ; on attend que l'équilibre thermique s'établisse. Montrer que la somme des enthalpies de ces corps a même valeur dans l'état initial et dans l'état final.

4°/ L'enthalpie massique h d'une substance homogène est le rapport de l'enthalpie H et de la masse m d'un échantillon de cette substance :

$$h = H/m$$

Dans un lieu thermiquement isolé l'on met en contact divers échantillons de la même substance à des températures différentes. Soit m_j la masse et h_j l'enthalpie massique du j ème échantillon. Au bout d'un

temps suffisamment long le lieu contient une phase homogène de masse $m = \sum_j m_j$ et d'enthalpie massique

h_f . Exprimer h_f en fonction des données.

5°/ L'eau à la température θ possède les propriétés suivantes

chaleur massique pour $\theta > 0^\circ\text{C}$ $c = 1 \text{ cal g}^{-1} \text{ K}^{-1}$

chaleur massique pour $\theta < 0^\circ\text{C}$ $c' = 0,5 \text{ cal g}^{-1} \text{ K}^{-1}$

chaleur de fusion à 0°C $L = 80 \text{ cal g}^{-1}$

On appelle x la proportion en masse d'eau liquide et $1 - x$ la proportion en masse de glace dans un échantillon d'eau à 0°C . Justifier les expressions suivantes de l'enthalpie massique de l'eau (en calories par gramme) en fonction de x et θ :

a) pour $\theta < 0^\circ\text{C}$ $h = -80 + 0,5 \theta$

b) pour $\theta = 0^\circ\text{C}$ $h = 80 (x - 1)$

c) pour $\theta > 0^\circ\text{C}$ $h = \theta$

6°/ Un lieu thermiquement isolé contient une masse $m' = 96 \text{ g}$ de glace à 0°C . L'on y verse doucement une masse m d'eau à $\theta = 40^\circ\text{C}$. Discuter et exprimer numériquement la température θ_f et la proportion d'eau liquide x_f dans l'état d'équilibre final en fonction de m exprime en grammes.

Calculer m dans les cas particuliers

a) $x_f = 0,5$ $\theta_f = 0^\circ\text{C}$

b) $x_f = 1$ $\theta_f = 0^\circ\text{C}$

c) $x_f = 1$ $\theta_f = 20^\circ\text{C}$

7°/ Un lieu thermiquement isolé contient une masse $m' = 96 \text{ g}$ de glace à $\theta' = -10^\circ\text{C}$ L'on y verse

doucement une masse m d'eau à $\theta = 40^\circ\text{C}$. Calculer la masse m pour qu'à l'équilibre la température θ_f et la proportion d'eau liquide x_f soient

a) $x_f = 0$ $\theta_f = -5^\circ\text{C}$

b) $x_f = 0$ $\theta_f = 0^\circ\text{C}$

c) $x_f = 0,5$ $\theta_f = 0^\circ\text{C}$

d) $x_f = 1$ $\theta_f = 0^\circ\text{C}$

e) $x_f = 1$ $\theta_f = 20^\circ\text{C}$

8°/ De l'eau liquide est refroidie jusqu'à la température -10°C sans solidification (surfusion). On admet que son enthalpie massique reste donnée par l'expression écrite dans la question 5 c). A -10°C la surfusion cesse en un temps très bref la température revient à 0°C tandis qu'il apparaît une proportion $y = 1 - x$ de glace. Expliquer pourquoi l'enthalpie massique ne varie pas lors de la cessation de la surfusion. Calculer y .

RAPPORT des CORRECTEURS

5.2.1. – OBSERVATIONS GENERALES

Les deux sujets sont assez longs mais comportent peu de questions très faciles ou très difficiles. Ceci explique l'étalement très important des notes,

Nous regrettons le manque de clarté de certaines copies, qui d'ailleurs obtiennent souvent de mauvaises notes,

5.2.2. – LE PREMIER SUJET (programme des classes préparatoires aux Arts)

Mines de Douai 1975

Ce sujet est assez concret, et les résultats obtenus appellent de nombreuses remarques "physiques", c'est-à-dire bien souvent de bon sens. Quelques copies ont de ce fait bénéficié de points supplémentaires mais il faut déplorer que trop de candidats paraissent dépourvus de bon sens, trouvant par exemple dans III 1 abc des résultats non croissants sans conclure à l'erreur.

L'introduction de grandeurs sans dimension, rapport de la grandeur étudiée à une grandeur caractéristique, a déconcerté ; beaucoup expriment x dans I en m ou en cm ; beaucoup confondent dans II le produit Rx et la notation R_x .

Trop de calculs numériques sont inachevés, le résultat final dépendant d'une grandeur numériquement déterminée mais figurant littéralement dans l'expression obtenue.

Linéariser une équation ne semble pas bien compris. Beaucoup de copies ne savent pas arrêter le développement de l'équation de I 2 au terme linéaire en x et $1/h$.

La partie II est la moins bien traitée. La plupart des copies chutent sur la signification de court-circuit ($u = 0$, i quelconque) et coupe-circuit ($i = 0$, u quelconque). Il y a peu de réponses concrètes (l'aiguille de voltmètre ne bouge pas quand ...) à II 3.

Peu de copies donnent dans III les expressions générales $\theta_f(m)$ et $x_f(m)$ avec leur limite de validité,

5.2.3. LE SECOND SUJET (programme de mathématiques supérieures)

Dans l'ensemble il a été moins bien traité que le premier sujet. Les grosses bêtises sont moins nombreuses, mais les copies brèves bien plus fréquentes.

Beaucoup de candidats recopient l'énoncé d'une question : travail inutile.

La partie I est la mieux traitée. Le correcteur est surpris de constater qu'il est très rare de voir noter les coordonnées cartésiennes de $\vec{W}$ par W_x, W_y, W_z . D'où des réponses confuses, au lieu de

$$E_y = E_z = 0 \quad V = E_{1x} + E_{2y} + E_{3z}$$

La partie II a arrêté les candidats, dont la majorité a placé O à l'extérieur de l'intervalle Terre, Lune. Peu de copies ont utilisé III 4 et 5 pour résoudre III 6 et 7. Ce sont en général celles qui les ont résolus juste.