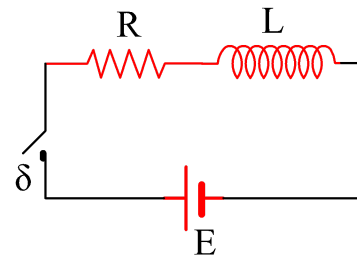


Όταν μεγιστοποιείται η ισχύς στο πηνίο

Το κύκλωμα του σχήματος περιλαμβάνει ιδανική πηγή με ΗΕΔ $E = 100V$, ιδανικό πηνίο με συντελεστή αυτεπαγωγής $L = 0,1H$ και αντίσταση $R = 10\Omega$, συνδεδεμένα σε σειρά. Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ κλείνουμε το διακόπτη δ .



- α) Κάποια χρονική στιγμή t_1 , ο ρυθμός αποθήκευσης ενέργειας στο μαγνητικό πεδίο του πηνίου γίνεται μέγιστος. Ποιος είναι ο μέγιστος ρυθμός αποθήκευσης ενέργειας στο μαγνητικό πεδίο του πηνίου και ποια είναι η ένταση του ρεύματος εκείνη τη στιγμή;
- β) Ποια θα είναι η τελική-σταθεροποιημένη τιμή της έντασης του ρεύματος; Να κάνετε ένα ποιοτικό διάγραμμα $i \rightarrow t$.
- γ) Να κάνετε τη γραφική παράσταση του ρυθμού μεταβολής της έντασης του ρεύματος σε συνάρτηση με την ένταση του ρεύματος. Ποια είναι η μέγιστη τιμή του και πότε την παίρνει;
- δ) Τη χρονική στιγμή t_1 , βρείτε τους ρυθμούς μεταφοράς ενέργειας από τα δίπολα του κυκλώματος στο ηλεκτρικό ρεύμα και την ενέργεια που έχει αποθηκευτεί στο πηνίο.
- ε) Τι ποσοστό της τελικής ενέργειας του μαγνητικού πεδίου, έχει αποθηκευτεί τη χρονική στιγμή t_1 ;
- στ) **Για καθηγητές.** Γράψτε τις χρονικές εξισώσεις και κάνετε τις αντίστοιχες γραφικές παραστάσεις:
- στ₁) της έντασης του ρεύματος
- στ₂) της ΗΕΔ αυτεπαγωγής
- στ₃) της ισχύος στο πηνίο
- στ₄) της ενέργειας του μαγνητικού πεδίου

Απάντηση

α) Αν εφαρμόσουμε την ΑΔΕ στο κύκλωμα έχουμε

$$|P_E| = |P_R| + |P_L| \Leftrightarrow E \cdot i = i^2 \cdot R + |P_L| \Leftrightarrow R \cdot i^2 - E \cdot i + |P_L| = 0$$

Έχουμε μια δευτεροβάθμια εξίσωση, με πραγματικές ρίζες, άρα απαιτείται

$$\Delta \geq 0 \Leftrightarrow E^2 - 4 \cdot R \cdot |P_L| \geq 0 \Leftrightarrow 4 \cdot R \cdot |P_L| \leq E^2 \Leftrightarrow |P_L| \leq \frac{E^2}{4R} \Leftrightarrow |P_{L,max}| = \frac{E^2}{4R}$$

$$\text{Με αντικατάσταση προκύπτει } |P_{L,max}| = \frac{10^4}{4 \cdot 10} = 250 J/s$$

$$\text{Η δευτεροβάθμια έχει τότε διπλή ρίζα } i_1 = -\frac{-E}{2R} = \frac{E}{2R} = \frac{100}{20} = 5 A$$

Ο λόγος που χρησιμοποιήσαμε απόλυτες τιμές, θα φανεί στο ερώτημα (δ).

2ος τρόπος

Κάθε στιγμή η ισχύς στο πηνίο είναι $P_L = E_{av\tau} \cdot i$ και ο 2ος κανόνας Kirchhoff δίνει

$$E - i \cdot R - |E_{av\tau}| = 0 \Leftrightarrow i = \frac{E - |E_{av\tau}|}{R} \quad \text{Άρα} \quad P_L = \frac{|E_{av\tau}|(E - |E_{av\tau}|)}{R}$$

Επειδή $|E_{av\tau}| + (E - |E_{av\tau}|) = E = \text{σταθ.}$ το γινόμενο $|E_{av\tau}|(E - |E_{av\tau}|) = \max$ όταν

$$|E_{av\tau}| = E - |E_{av\tau}| \Leftrightarrow |E_{av\tau}| = \frac{E}{2}$$

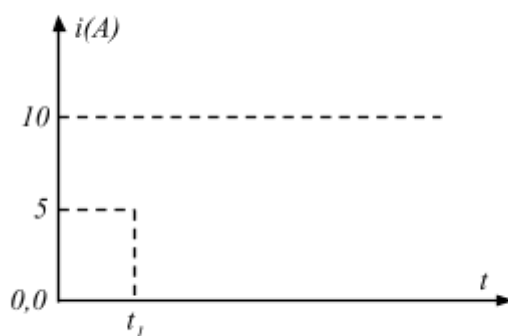
Τότε $i = \frac{E - E/2}{R} = \frac{E}{2R}$ και η αντίστοιχη μέγιστη ισχύς είναι

$$P_L = \frac{E}{2} \cdot \frac{E}{2R} = \frac{E^2}{4R}$$

β) Το ρεύμα σταθεροποιείται στο κύκλωμα όταν παύει το φαινόμενο της αυτεπαγωγής και η αντίστοιχη ΗΕΔ αυτεπαγωγής στο πηνίο μηδενίζεται. Τότε η μόνη ΗΕΔ στο κύκλωμα είναι της πηγής και από το νόμο Ohm σε κλειστό κύκλωμα έχουμε:

$$i_f = \frac{E}{R} = \frac{100}{10} = 10 \text{ A}$$

Η ένταση του ρεύματος τη χρονική στιγμή t_0^+ , δηλαδή αμέσως μετά το κλείσιμο του διακόπτη είναι ακόμα μηδενική, αφού το πηνίο σύμφωνα με τον κανόνα του Lenz, αναπτύσσει ΗΕΔ αυτεπαγωγής, που εμποδίζει στιγμιαία την αύξηση της έντασης του ρεύματος. Η γραφική παράσταση είναι:

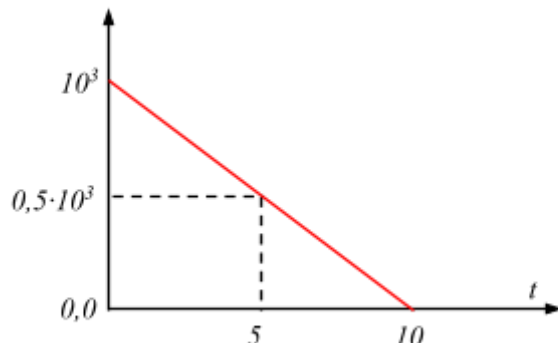


γ) Σε μια τυχαία χρονική στιγμή ο 2ος Κανόνας του Kirchhoff στο κύκλωμα δίνει

$$E - i \cdot R - L \cdot \frac{di}{dt} = 0 \Leftrightarrow L \cdot \frac{di}{dt} = E - i \cdot R \Leftrightarrow \frac{di}{dt} = \frac{E - i \cdot R}{L}$$

Με αντικατάσταση παίρνουμε $\frac{di}{dt} = \frac{100 - i \cdot 10}{0,1} \Leftrightarrow \frac{di}{dt} = -10^2 \cdot i + 10^3$ (S.I.)

Η αντίστοιχη γραφική παράσταση είναι:



Προφανώς ο ρυθμός μεταβολής της έντασης του ρεύματος είναι μέγιστος τη χρονική στιγμή

t_0^+ , δηλαδή αμέσως μετά το κλείσιμο του διακόπτη: $\left. \frac{di}{dt} \right|_{max} = 10^3 \frac{A}{s}$, οπότε και η αντίστοιχη ΗΕΔ αυτεπαγωγής θα είναι απολύτως μέγιστη, με αλγεβρική τιμή

$$E_{αυτ} = -L \cdot \left. \frac{di}{dt} \right|_{max} = -0,1 \cdot 10^3 = -100V$$

Παρατηρούμε μάλιστα ότι τη χρονική στιγμή t_l , που μεγιστοποιείται η ισχύς στο πηνίο, ο ρυθμός μεταβολής της έντασης του ρεύματος δεν είναι μέγιστος αλλά έχει μειωθεί στο μισό της μέγιστης τιμής του.

δ)

- Ρυθμός μεταφοράς ενέργειας από την πηγή στο ηλεκτρικό ρεύμα:

$$\frac{dW_E}{dt} = P_E = +E \cdot i_l = +100 \cdot 5 = 500J / s$$

- Ρυθμός μεταφοράς ενέργειας από τον αντιστάτη στο ηλεκτρικό ρεύμα:

$$\frac{dW_R}{dt} = P_R = -i_l^2 \cdot R = -5^2 \cdot 10 = -250J / s$$

Το (-) οφείλεται στο ότι ο αντιστάτης ως δίπολο αφαιρεί ενέργεια από το ηλεκτρικό ρεύμα με ρυθμό $250J / s$, μετατρέποντας την σε θερμική.

- Ρυθμός μεταφοράς ενέργειας από το πηνίο στο ηλεκτρικό ρεύμα:

$$\frac{dW_L}{dt} = P_L = -250J / s$$

Τον υπολογίσαμε στο (α) ερώτημα

Το (-) οφείλεται στο ότι το πηνίο ως δίπολο αφαιρεί ενέργεια από το ηλεκτρικό ρεύμα με ρυθμό $250J / s$, μετατρέποντας την σε ενέργεια μαγνητικού πεδίου.

ε) Ενέργεια μαγνητικού πεδίου του πηνίου την t_l :

$$U_{L,l} = \frac{1}{2} Li_l^2 = \frac{1}{2} \cdot 0,1 \cdot 5^2 = 1,25 J$$

Όταν σταθεροποιηθεί το ρεύμα :

$$U_{L,f} = \frac{1}{2} Li_f^2 = \frac{1}{2} \cdot 0,1 \cdot 10^2 = 5 J$$

Ποσοστό

$$\pi = \frac{U_{L,l}}{U_{L,f}} \cdot 100 = \frac{1,25}{5} \cdot 100 = 25\%$$

στ) Για καθηγίες

στ₁) Από τη λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$-L \cdot \frac{di}{dt} - i \cdot R + E = 0 \Leftrightarrow \frac{di}{dt} + \frac{R}{L} i - \frac{E}{L} = 0$$

προκύπτει:

$$i = \frac{E}{R} \cdot (1 - e^{-\frac{R}{L}t}) \Leftrightarrow i = 0,1 \cdot (1 - e^{-100t}) \quad (\text{S.I.})$$

στ₂)

$$E_{avt} = -E + iR \Leftrightarrow E_{avt} = -E + \frac{E}{R} \cdot (1 - e^{-\frac{R}{L}t}) \cdot R \Leftrightarrow$$

$$E_{avt} = -E + E - E \cdot e^{-\frac{R}{L}t} \Leftrightarrow E_{avt} = -E \cdot e^{-\frac{R}{L}t} \Leftrightarrow$$

$$E_{avt} = -100 \cdot e^{-100t} \quad (\text{S.I.})$$

στ₃) Η ισχύς του πηγίου

$$P_L = E_{avt} \cdot i \Leftrightarrow P_L = -E \cdot e^{-\frac{R}{L}t} \cdot \frac{E}{R} \cdot (1 - e^{-\frac{R}{L}t}) \Leftrightarrow$$

$$P_L = -\frac{E^2}{R} \cdot e^{-\frac{R}{L}t} \cdot (1 - e^{-\frac{R}{L}t}) \Leftrightarrow$$

$$P_L = -1000 \cdot e^{-100t} \cdot (1 - e^{-100t}) \quad (\text{S.I.})$$

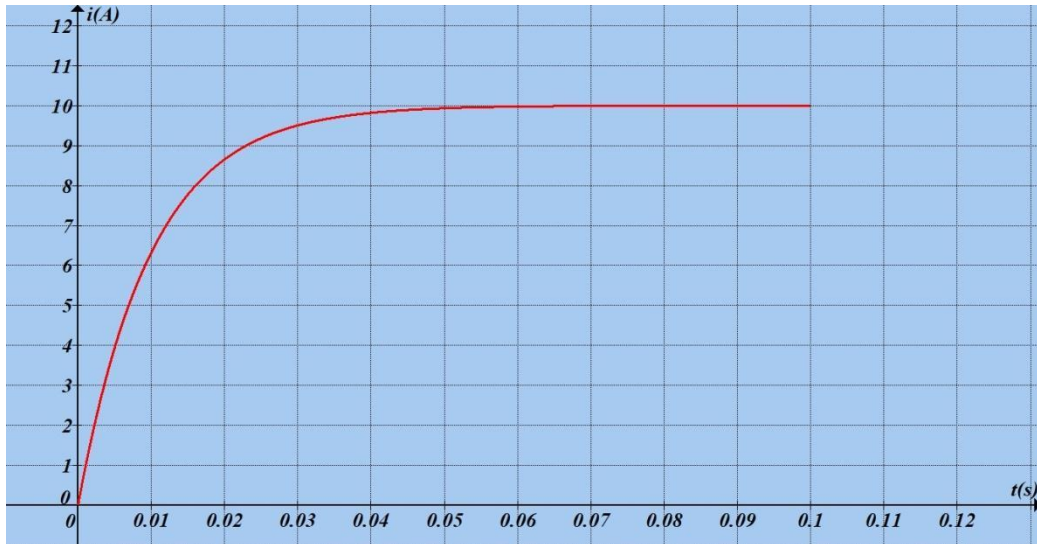
στ₄)

$$U_L = \frac{1}{2} Li^2 \Leftrightarrow U_L = \frac{1}{2} L \left[\frac{E}{R} \cdot (1 - e^{-\frac{R}{L}t}) \right]^2 \Leftrightarrow$$

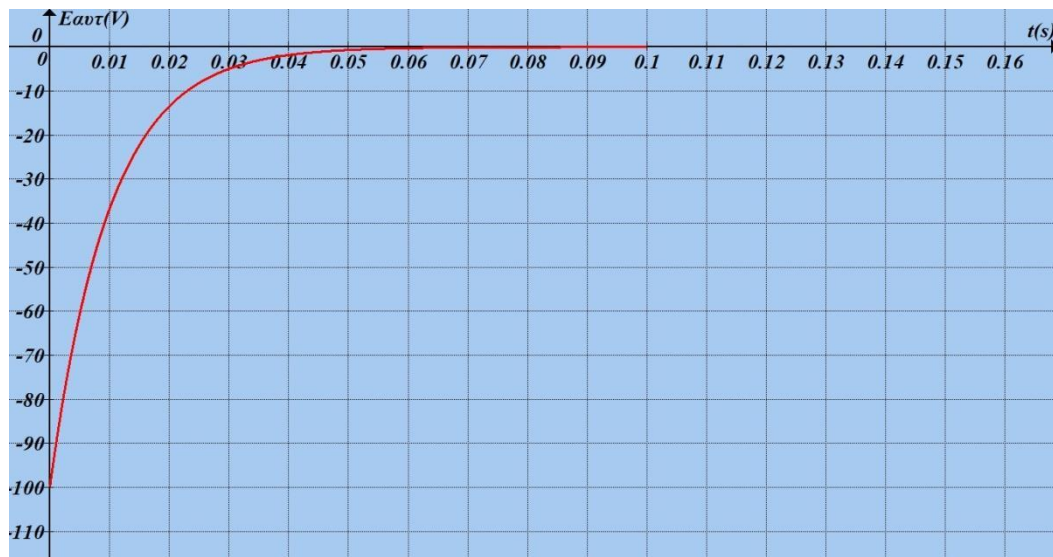
$$U_L = 5 \cdot (1 - e^{-100t})^2 \text{ (S.I.)}$$

Με το graph παίρνουμε και τις αντίστοιχες γραφικές παραστάσεις:

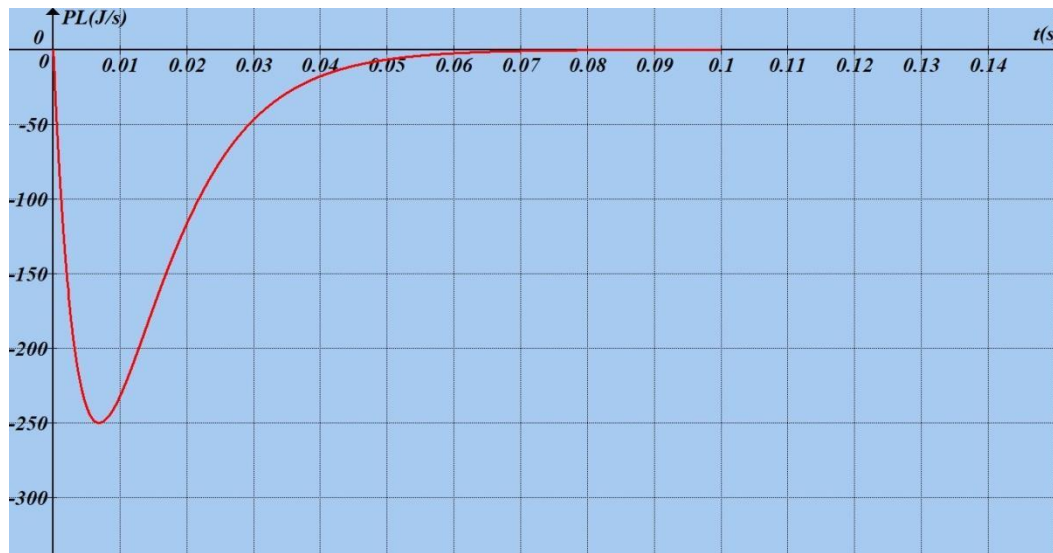
$$i = f(t)$$



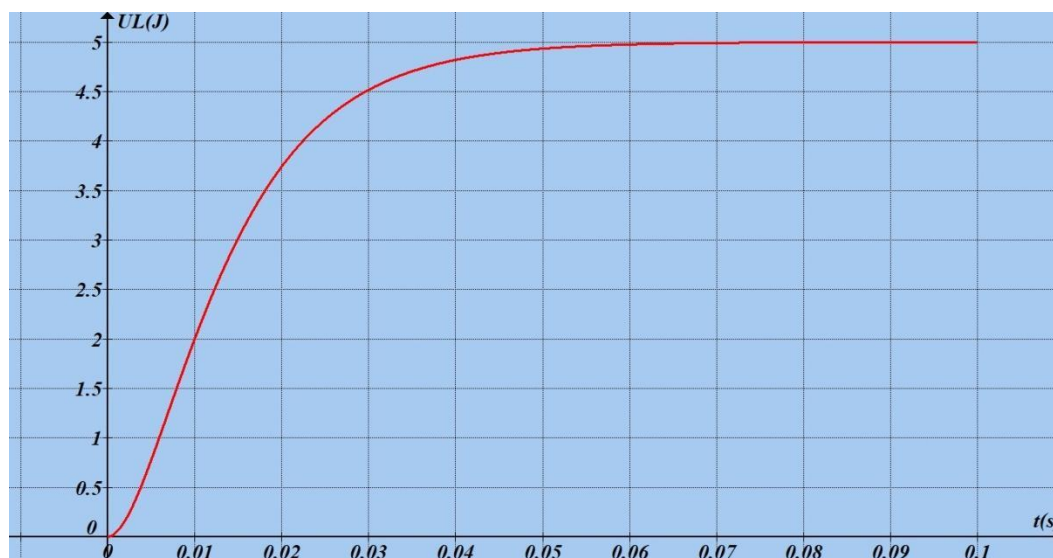
$$E_{avt} = f(t)$$



$$P_L = f(t)$$



$$U_L = f(t)$$



Σχόλια

α) Η χρονική στιγμή $t_l = 0,00695s$, όπως προκύπτει από το graph.

β) Η χρονική στιγμή που αποκαθίσταται το ρεύμα είναι πρακτικά $t_f = 5L/R = 0,05s = 5ms$.

Άρα αν στη θέση του αντιστάτη είχαμε ένα λαμπάκι, για να παρατηρήσουμε την αύξηση στη φωτοβολία μέχρι να σταθεροποιηθεί, δε θα βλέπαμε ... τίποτα σχετικό αλλά θα νομίζαμε ότι το λαμπάκι ανάβει αμέσως.

Ανδρέας Ριζόπουλος