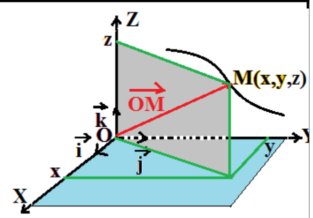
Les lois de Newton

I- Vecteur vitesse et vecteur accélération :

1- Vecteur position :



Pour repérer la position du mobile, on utilise un repère d'espace $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ d'origine O et dont les vecteurs unitaires: $\vec{i}$; $\vec{j}$ et $\vec{k}$. Avec $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = \|\vec{k}\| = 1$; et $\vec{i} \perp \vec{j}$; $\vec{i} \perp \vec{k}$ et $\vec{j} \perp \vec{k}$.

$\vec{OG} = x.\vec{i} + y.\vec{j} + z.\vec{k}$ est appelé vecteur position,

Sa norme est : $OG = \|\vec{OG}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

G : Centre d'inertie du corps, et x, y et z :sont les coordonnée du centre d'inertie G dans le repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$,
Si le corps est en mouvement, ses coordonnées x, y et z variant en fonction du temps, alors les fonctions : x=f(t), y=g(t) et h(t) sont appelées les équations horaires du mouvement.
La trajectoire est l'ensemble des positions successives occupées par le mobile au cours de son mouvement.

2- Vecteur vitesse instantané $\vec{v}_G(t)$:

- Le vecteur vitesse instantanée du centre d'inertie d'un corps est donné par la relation suivante : $\vec{v}_G(t) = \frac{d\vec{OG}}{dt}$,

Alors $\vec{v}_G(t) = \frac{d\vec{OG}}{dt} = \frac{dx}{dt}.\vec{i} + \frac{dy}{dt}.\vec{j} + \frac{dz}{dt}.\vec{k} = \dot{x}.\vec{i} + \dot{y}.\vec{j} + \dot{z}.\vec{k} = v_x.\vec{i} + v_y.\vec{j} + v_z.\vec{k}$

- Les coordonnées du vecteur vitesse instantané sont : $v_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x}$; $v_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y}$; $v_z = \frac{dz}{dt} = \dot{z}$
- Son module est : $\|\vec{v}_G(t)\| = v_G = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$.
- Le vecteur vitesse $\vec{v}_i(t)$ est tangente à la trajectoire en M_i, dans le sens du mouvement.

3- Vecteur accélération $\vec{a}_G(t)$:

a- Dans un repère cartésien :

Le vecteur accélération du centre d'inertie d'un corps est donné par la relation suivante : $\vec{a}_G(t) = \frac{d\vec{v}_G(t)}{dt}$,

Alors $\vec{a}_G(t) = \frac{d\vec{v}_G(t)}{dt} = \frac{dv_x}{dt}.\vec{i} + \frac{dv_y}{dt}.\vec{j} + \frac{dv_z}{dt}.\vec{k} = \dot{v}_x.\vec{i} + \dot{v}_y.\vec{j} + \dot{v}_z.\vec{k} = a_x.\vec{i} + a_y.\vec{j} + a_z.\vec{k}$

Les coordonnées du vecteur accélération sont : $a_x = \frac{dv_x}{dt} = \dot{v}_x = \ddot{x}$; $a_y = \frac{dv_y}{dt} = \dot{v}_y = \ddot{y}$; $a_z = \frac{dv_z}{dt} = \dot{v}_z = \ddot{z}$

Le module de $\vec{a}_G(t)$ est : $\|\vec{a}_G(t)\| = a_G = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}$.

La dimension de a_G : on a $\vec{a}_G(t) = \frac{d\vec{v}_G(t)}{dt}$, donc $[a] = \frac{[v]}{T} = \frac{L}{T^2} = L.T^{-2}$, alors a s'exprime en m/s^2.

b- Dans une base de Frenet :

Le repère de Frenet est un repère local orthonormé lié au mobile que l'on note $(M, \vec{u}, \vec{n})$, le vecteur unitaire $\vec{u}$ est tangent à la trajectoire au point M et orienté dans le sens du mouvement.

Le vecteur unitaire $\vec{n}$ est normal, et dirigé vers le centre de courbure de la trajectoire, il est perpendiculaire à $\vec{u}$.

- L'expression du vecteur accélération dans le repère de Frenet est : $\vec{a}_G(t) = a_T.\vec{u} + a_N.\vec{n}$
- La composante tangentielle de $\vec{a}_G(t)$ est : $\vec{a}_T = a_T.\vec{u}$
- La composante normale de $\vec{a}_G(t)$ est : $\vec{a}_N = a_N.\vec{n}$

- ρ : est le rayon de courbure de la trajectoire au point M. (Si la trajectoire est un cercle $\rho = R$ rayon du cercle).

Remarques :

Si le mouvement est rectiligne, alors ρ↝∞ alors $a_N = 0$ donc $a_G = a_T = \frac{dv_G}{dt}$,
Si le mouvement est rectiligne uniforme, alors ρ↝∞ alors $a_N = 0$ et $v_G = cte$, alors $a_T = 0$ donc $a_G = 0$,
Si mouvement est circulaire uniforme, $\frac{dv_G}{dt} = 0$, alors $a_T = 0$, donc $a_G = a_N = \frac{v_G^2}{\rho} = \frac{v_G^2}{R}$.

c- La nature du mouvement :

- Le mouvement est dit accéléré si la vitesse augmente et $\vec{a}_G.\vec{v}_G > 0$,
- Le mouvement est dit uniforme si la vitesse reste constante et $\vec{a}_G.\vec{v}_G = 0$,
- Le mouvement est dit retardé si la vitesse diminue et $\vec{a}_G.\vec{v}_G < 0$,
- Le mouvement est uniformément varié si $a_G = cte \neq 0$.

Application 1 :

Les coordonnées de centre d'inertie G d'un mobile dans un repère cartésien sont :
$x(t) = 2$; $y(t) = 3t$ et $z(t) = t^2 + 2$:

1- Trouver l'expression du vecteur position $\vec{OG}(t)$, calculer sa norme à l'instant $t = 2s$,
2- Déduire l'expression de vecteur vitesse $\vec{v}_G(t)$, calculer sa valeur à l'instant $t = 2s$,
3- Déduire l'expression de vecteur accélération $\vec{a}_G(t)$, calculer sa norme, à l'instant $t = 2s$,
4- Calculer a_T la composante tangentielle et a_N la composante normale de l'accélération dans la base de Frenet à l'instant $t = 2s$. Déduire la valeur du rayon de courbure à cet instant,
5- Quelle est la nature du mouvement du point G ?

Correction :

1- $\vec{OG}(t) = 2\vec{i} + 3t\vec{j} + (t^2 + 2).\vec{k}$, à $t = 2s$, on a $\|\vec{OG}\| = \sqrt{2^2 + (3\times2)^2 + \left(2^2 + 2\right)^2} = 8,717 \approx 8,72m$
2- $\vec{v}_G(t) = 0\vec{i} + 3\vec{j} + 4t\vec{k} = 3\vec{j} + 4t\vec{k}$, à $t = 1s$, on a $\|\vec{v}_G(t)\| = \sqrt{3^2 + (4\times1)^2} = 5m.s^{-1}$,
3- $\vec{a}_G(t) = 0\vec{i} + 0\vec{j} + 4\vec{k} = 4\vec{k}$, $\forall t$, on a $\|\vec{a}_G(t)\| = \sqrt{4^2} = 4m.s^{-2}$,
4- $\vec{a}_G(t).\vec{v}_G(t) = 4t\times4 = 16t > 0$, alors le mouvement est accéléré.

Remarques :

On a $\|\vec{a}_G(t)\| = 4m.s^{-2} = cte$, alors le mvt est uniformément accéléré,
$\{v_x = 0\ a_x = 0$, donc le mouvement ne se fait pas selon l'axe (Ox),
$\{v_y = 3\ a_y = 0$, Donc le mouvement est uniforme selon l'axe (Oy),
$\{v_z = 4t\ (en\ m/s) = cte\ a_z = 4m.s^{-2}$, Donc le mouvement est uniformément varié (accéléré dans ce cas) selon l'axe (Oz).

4- Référentiel Galiléen :

- Le référentiel Galiléen est un référentiel dans lequel le principe d'inertie est vérifié,

- On considère chaque référentiel en translation rectiligne uniforme par rapport à un référentiel Galiléen, est également Galiléen,
- Le référentiel Copernic est le meilleur référentiel Galiléen : le référentiel héliocentrique (repère lié au centre du Soleil),
- Un référentiel terrestre peut être considéré comme un référentiel Galiléen pour des mouvements de courte durée.

II- Lois de newton :

1- Troisième loi de Newton (Action et réaction) :

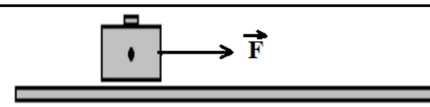
Si un corps A exerce une force $\vec{F}_{A/B}$ sur un corps B, alors le corps B exerce une force $\vec{F}_{B/A}$ sur le corps A, telle que : $\vec{F}_{A/B} = -\vec{F}_{B/A}$ que les deux corps soient en mouvement ou au repos, et que le repère soit galiléen ou non galiléen.

2- Premièr loi de Newton (Principe d'inertie) :

Dans un référentiel galiléen, le centre d'inertie G d'un système isolé (ne soumis à aucune force) ou pseudo-isolé ($\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0}$) est : soit immobile ($\vec{V}_G = \vec{0}$), soit en mouvement rectiligne uniforme ($\vec{V}_G = \vec{cte} \neq \vec{0}$),

3- Deuxième loi de Newton (Principe fondamental de la dynamique) :

a- ***Activité :*** On tire, par une force constante de l'intensité est F=0,38N, un autoporteur de masse m=600g sur une table à coussin d'air horizontale. Les résultats obtenus sont les suivants : (on donne $\tau = 80ms$).



La position M_i	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6	M_7	M_8
L'abscisse $x_i(m)$	0	0,009	0,023	0,04	0,0615	0,0865	0,1155	0,1485
La date $t_i(s)$	-0,24	-0,16	-0,08	0	0,08	0,16	0,24	0,32
Vitesse instantanée $v_i(m/s)$	--	0.14	0.19	0.24	0.29	0.34	0.39	--
$\frac{\Delta v_i}{\Delta t} = \frac{v_{i+1}-v_{i-1}}{2\tau}$ $(en\ m/s^2)$	--	--	0.625	0.625	0.625	0.625	--	--

b- Observations :

Le système étudié est : $\{l'autoporteur\}$,

L'autoporteur est soumis à trois forces : $\vec{P}$ son poids ; $\vec{R}$ la réaction de la table à coussin d'air et la force $\vec{F}$,

La table à coussin d'air est horizontale alors $\vec{P} + \vec{R} = \vec{0}$ (sans frottement),

Alors $\sum \vec{F}_{ext} = \vec{P} + \vec{R} + \vec{F} = \vec{0} + \vec{F} = \vec{F}$, alors $\|\sum \vec{F}_{ext}\| = \|\vec{F}\| = 0,38N$,

Et d'autre part, on a $m.\frac{\Delta v_i}{2\tau} = 0,6\times0.625 = 0,375\approx0.38Kg.m.s^{-2}$, alors $\|\sum \vec{F}_{ext}\| = m.\frac{\Delta v_i}{\Delta t}$

On remarque que les deux vecteurs $\sum \vec{F}_{ext}$ et $m.\frac{\Delta \vec{v}_i}{\Delta t}$ ont les mêmes caractéristiques, donc $\sum \vec{F}_{ext} = m.\frac{\Delta \vec{v}_i}{\Delta t}$,

Mathématiquement, le vecteur est exprimé par la relation : $\left(\frac{\Delta \vec{v}_i}{\Delta t}\right) = \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \vec{a}_G(t_i)$

Alors, l'expression de la deuxième loi de Newton est : $\sum \vec{F}_{ext} = m.\frac{d\vec{v}}{dt} = m.\vec{a}_G(t)$

Remarques :

- Pour un corps mécaniquement isolé ou pseudo-isolé, on a : $\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0}$ d'où $\vec{a}_G(t) = \vec{0}$,

  Alors $\vec{v}_G(t) = \vec{cte}$, alors la première loi est un cas particulier de la deuxième loi de Newton.
- La loi fondamentale de la dynamique n'est vérifiée que dans les référentiels Galiléens,
- D'près : $\sum \vec{F}_{ext} = m.\frac{d\vec{v}}{dt}$, pour les mêmes forces, plus la masse est grande, plus le changement de vitesse est faible. Alors la masse résiste au changement de vitesse. La masse caractérise donc l'inertie du corps solide

c- Conclusion :

Dans un référentiel galiléen la somme des vecteurs forces qui s'exercent sur un corps est égale au produit de la masse du corps et du vecteur accélération de son centre d'inertie, et on écrit : $\sum \vec{F}_{ext} = m.\vec{a}_G(t)$.

Application 2 :

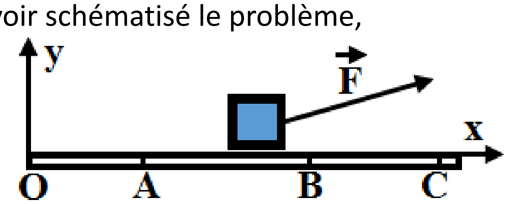
On donne : g = 10N/Kg et on négligera la résistance de l'air :
Un skieur de 80 kg descend une piste de longueur AB=100m inclinée de 20° par rapport à l'horizontale. Le skieur est lâché de point A sans vitesse initiale et sans frottement :

1- Représenter qualitativement les forces agissant sur le skieur sur un schéma convenable,
2- Déterminer expression de l'accélération,
3- Ecrire les équations horaires du mouvement du skieur,
4- Déterminer la vitesse de skieur en bout de piste B.
5- En réalité, les frottements ne sont pas négligeables, elles équivalents à une force parallèle à (AB) d'intensité f=50N constante et de sens opposé du mouvement :
   a- Représenter qualitativement les forces agissant sur le skieur sur un schéma convenable,
   b- Déterminer expression de l'accélération,
   c- Ecrire les équations horaires du mouvement du skieur,
   d- Déterminer la vitesse de skieur en bout de piste B.

Application 3 :

Un corps de masse m= 80kg se déplace, sur un plan horizontal, sous l'action d'une force $\vec{F}$ constante et forme un angle de 12,0° par rapport à le plan. La composante de l'accélération selon l'axe (Ox) est $a_x = 3,00 m.s^{-2}$:

1- Représenter qualitativement les forces agissant sur le corps après avoir schématisé le problème,
2- Calculer F l'intensité de la force $\vec{F}$, Sachant que R_N=664N,
3- Etablir l'équation différentielle du mouvement,
4- Déduire la valeur de la composante tangentielle R_T,
5- Déduire la valeur de R l'intensité du $\vec{R}$, ainsi la valeur de K le coefficient de frottement,



6- Déduire les coordonnées du vecteur vitesse et celles du vecteur position, on prend ($t_A = 0s$),
7- Le corps passe par deux points A et B avec des vitesses $v_A = 6m.s^{-1}$ et $v_B = 18m.s^{-1}$:
   Calculer la durée de parcours entre A et B, puis déduire la distance AB,
8- On élimine la force $\vec{F}$ à l'instant ou G passe par le point B, on prend ($t_B = 0s$) comme origine des dates. Le corps continue son mouvement sur le plan BC pour s'arrêter en un point C : calculer BC.