ثانوية آبادي بوسواليم رأس الوادي	وزارة التربية الوطنية اختبار الفصل الثاني – مادة الرياضيات -	الشعبة : 2تر المدة : ساعتان

التمرين الأول:

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ ، حيث a و b و c و d أعداد حقيقية .

ليكن (C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$.

$$\begin{cases} d = 1 \\ 12a-4b+c=0 \\ -8a+4b-2c+d=5 \end{cases}$$

1- باستعمال جدول تغيرات الدالة f ، بين أن a و b و c و d ، ثم استنتج عبارة $f(x)$.

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	5	↘	1	↗	$+\infty$

2- أكتب معادلة المماس (T) للمنحني (C) عند النقطة ذات الفاصلة 1 .

3- جد نقطة من (C) يكون عندها المماس (T') موازي لـ (T) ثم أكتب معادلة لـ (T') .

4- أ- بين أن المنحني (C) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيين إحداثياتها.

ب- بين أن المنحني (C) يقبل النقطة ذات الفاصلة (-1) مركز تناظر له .

5- أرسم (C) .

التمرين الثاني:

(u_n) متتالية عددية معرفة كما يلي : $u_0=1$ و من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=\frac{1}{3}u_n+2$

1- أ) أرسم في معلم متعامد و متجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$ ، المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=x$ و المنحني (d) الممثل للدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=\frac{1}{3}x+2$.

ب) باستعمال الرسم السابق ، مثل على حامل محور الفواصل و بدون حساب الحدود : u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3 .

2- نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n=u_n-3$

1) أثبت أن المتتالية (v_n) هندسية ، يطلب تعين أساسها و حدها الأول .

2) أكتب (v_n) بدلالة n ، ثم استنتج عبارة (u_n) بدلالة n .

ج) أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

3- أ- أحسب المجموع S_n بدلالة n حيث : $S_n=v_0+v_1+v_2+.....+v_n$

ب- استنتج المجموع S_n' بدلالة n حيث : $S_n' = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n$

ع/ طيار

تصحيح اختبار الفصل الأول

حل التمرين الأول

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ، $D_f = \mathbb{R}$

1- تبيان أن a و b و c حل للجملة $\begin{cases} d = 1 \\ 12a - 4b + c = 0 \\ -8a + 4b - 2c + d = 5 \end{cases}$ ، ثم استنتاج عبارة $f(x)$.

لدينا $f(0) = d$: و $f(0) = 1$ ومنه $\boxed{d = 1}$ .....(1) .

$f(-2) = a(-2)^3 + b(-2)^2 + (-2)c + d$ و $f(-2) = 5$ ومنه $\boxed{-8a + 4b - 2c + d = 5}$ .....(2) .

الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$f'(0) = c$ و $f(0) = 0$ ومنه $\boxed{c = 0}$ .....(3) .

$f'(-2) = 12a - 4b + c$ و $f'(-2) = 0$ ومنه $\boxed{12a - 4b + c = 0}$ .....(4) .

من (1) و (2) و (3) و (4) نستنتج أن a و b و c و d حل للجملة $\begin{cases} d = 1 \\ 12a - 4b + c = 0 \\ -8a + 4b - 2c + d = 5 \end{cases}$

نحل الجملة نجد : $a = 1$ ، $b = 1$ ، $c = 0$ و $d = 1$ و بالتالي $f(x) = x^3 + 3x^2 + 1$

1- كتابة معادلة المماس (T) للمنحني (C) عند النقطة ذات الفاصلة 1 .

$(T) : y = f'(1)(x - 1) + f(1)$ ومنه $(T) : y = 9x - 4$

2- إيجاد نقطة من (C) يكون عندها المماس (T') موازي لـ (T) ثم أكتب معادلة لـ (T') .

نفرض : $(T') : y = ax + b$

$(T') \parallel (T)$ إذا وفقط إذا كان $a = 9$ أي $f'(x) = 9$

$f'(x)=9$ تكافئ $3x^2+6x=9$ أي $x^2+2x-3=0$ ($\Delta=16$ ، $x_1=1$ أو $x_2=-3$)

معادلة (T') : $(T'):y=9x+b$ ، الثانية $(-3;1)$ تحقق المعادلة $y=9x+b$ أي $1=9(-3)+b$

ومنه $b=28$ إذن $(T'):y=9x+28$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$6x+6$	$-$	0	$+$

3- أ- نقطة الانعطاف :

4- الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و $f''(x)=6x+6$

المشتقة الثانية انعدمت من أجل (-1) مغيرة إشارتها ، النقطة ذات الإحداثيات $(-1;3)$ نقطة انعطاف لـ (C) .

ب- تبيان أن المنحني (C) يقبل النقطة ذات الفاصلة (-1) مركز تناظر له .

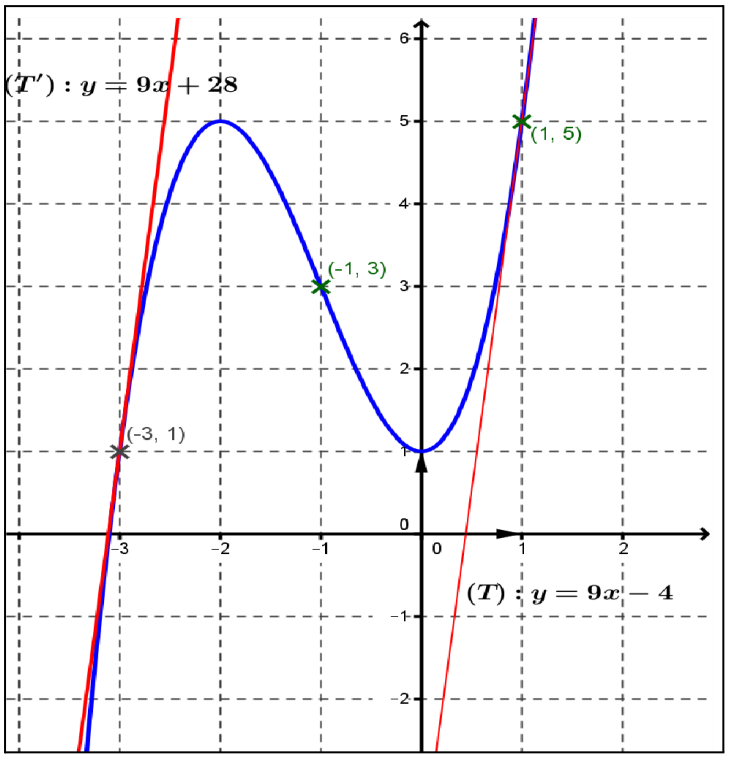
($(-1;3)$ مركز تناظر لـ (C)) معناه (من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $(-2-x)\in\mathbb{R}$ و $f(-2-x)+f(x)=6$)

بما أن : $x\in\mathbb{R}$ فإن $(-x)\in\mathbb{R}$ و منه $(-2-x)\in\mathbb{R}$ و

$$f(-2-x)+f(x)=\left[(-2-x)^3+3(-2-x)^2+1\right]+\left[x^3+3x^2+1\right]$$
$$=\left[-x^3-3x^2+5\right]+\left[x^3+3x^2+1\right]$$

$$\boxed{f(-2-x)+f(x)=6}$$

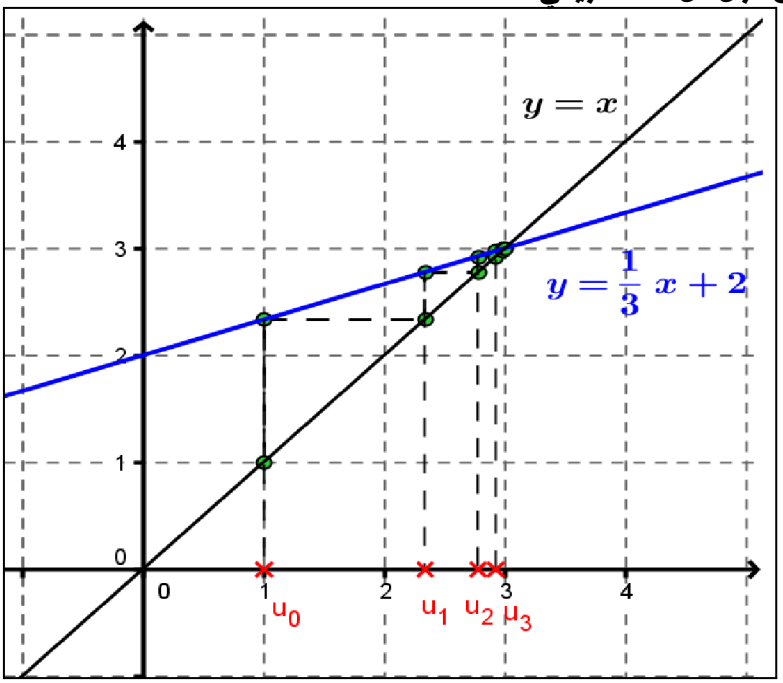
5- رسم (C) .



حل التمرين الثاني

(u_n) متتالية عددية معرفة كما يلي : $u_0 = 1$ و من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2$

2- أ) رسم (d) و (Δ) .



2) تمثيل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3 .

ملاحظة :
الرسم باستعمال البرمجية GeoGebra

2- نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = u_n - 3$

1) اثبات أن المتتالية (v_n) هندسية.

لدينا : من أجل كل عدد طبيعي n :

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 3 = \frac{1}{3}u_n + 2 - 3 = \frac{1}{3}u_n - 1 = \frac{1}{3}(u_n - 3) = \frac{1}{3}v_n$$

ومنه (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{3}$ وحدها الأول $v_0 = -2$.

ب) كتابة (v_n) بدلالة n ، ثم استنتاج عبارة (u_n) بدلالة n .

$$\boxed{v_n = -2\left(\frac{1}{3}\right)^n} \quad \text{و} \quad \boxed{u_n = v_n + 3 = -2\left(\frac{1}{3}\right)^n + 3}$$

ج)

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty}\left[-2\underbrace{\left(\frac{1}{3}\right)^n}_{0} + 3\right] = 3$$

$$S_n = v_0 + v_1 + v_2 + \ldots\ldots + v_n$$

$$S_n = -2\left[\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{3}}\right] = 3\left[\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} - 1\right]$$

4- أ- حساب المجموع S_n بدلالة n :

$$S'_n = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots\ldots + u_n$$

$$S'_n = (v_0 + 3) + (v_1 + 3) + (v_2 + 3) + \ldots\ldots + (v_n + 3)$$

$$S'_n = [v_0 + v_1 + v_2 + \ldots\ldots + v_n] + \underbrace{(3 + 3 + 3 + \ldots + 3)}_{n+1}$$

$$S'_n = 3\left[\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} - 1\right] + 3(n+1)$$

$$\boxed{S'_n = 3\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} + 3n}$$

ب- استنتاج المجموع S'_n بدلالة n :