

M-P'

PHYSIQUE II
(4 pages dactylographiées)

ETUDE D'UN PIEGE A NEUTRONS

Le neutron est une particule sans charge électrique, il n'est donc pas possible de le piéger dans les anneaux de stockage traditionnels. Nous allons voir qu'il est néanmoins possible de confiner des neutrons très lents, appelés "ultra-froids", dans un champ magnétique approprié. La première partie du problème étudie le ralentissement des neutrons. La seconde partie s'intéresse au confinement des neutrons.

Les deux parties sont très largement indépendantes.

<u>Données</u> :	Masse du neutron	$m = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
	Moment magnétique du neutron	$M = 9,66 \cdot 10^{-27} \text{ Am}^2$
	Constante de Boltzmann	$k = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J.K}^{-1}$
	Electron-volt	$1 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$

Le référentiel du laboratoire sera supposé galiléen dans tout le problème.

$\langle F(x) \rangle_x$ représente la valeur moyenne de la fonction $F(x)$ par rapport à la variable aléatoire x

$\langle F(x) \rangle_x = \int_D F(x') dP(x')$ où D est le domaine de définition de x et où

$dP(x')$ = probabilité de trouver la variable x entre les valeurs x' et $x' + dx'$.

On donne la loi de répartition en énergie de la statistique de Boltzmann :

$$dP(E) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{(kT)^3}} \sqrt{E} \exp\left(-\frac{E}{kT}\right) dE.$$

PREMIERE PARTIE

Dans toute cette partie, $\vec{v}$ et E représentant la vitesse et l'énergie cinétique du neutron, et $\vec{w}$ la vitesse du noyau dans le référentiel du laboratoire. L'indice 1 sera réservé aux grandeurs avant le choc et l'indice 2 aux grandeurs après le choc.

On pose $A = \text{Masse du noyau} / \text{Masse du neutron}$.

On se place dans l'approximation non relativiste.

I. COLLISION NEUTRON-NOYAU AU REPOS

Un neutron de vitesse $\vec{v}_1$ et d'énergie E_1 entre en collision élastique avec un noyau atomique initialement au repos ($\vec{w}_1 = \vec{0}$).

1). Ecrire les équations de conservation de la quantité de mouvement et de l'énergie en fonction de A et des vitesses.

2). On appelle θ l'angle défini positif, que fait la direction du noyau après le choc avec la direction du neutron incident $\theta = (\vec{v}_1, \vec{w}_1)$ avec $0 < \theta < \pi$

a). Montrer que $\theta < \pi/2$.

b). Exprimer le rapport E_2/E_1 en fonction de A et θ .

II. MODELE DES SPHERES DURES

Dans ce modèle, on représente le neutron et le noyau par deux sphères rigides de rayons respectifs R_1 et R_2 . On définit le paramètre d'impact b comme étant la distance entre la trajectoire du neutron incident et le centre du noyau initialement au repos. On admettra que les actions de contact, lors du choc sont normales aux surfaces de contact.

1). Donner la relation entre l'angle θ défini au I.2 et le paramètre b .

2). Exprimer la probabilité $dP'(b)$ que le paramètre d'impact soit compris entre b et $b+db$ au cours d'une collision.

3). Montrer que $\langle -\ln(1-K \cos^2\theta) \rangle_b = 1 + \frac{1-K}{K} \ln(1-K)$ où K est une constante vérifiant $K < 1$.

4). En déduire le coefficient de ralentissement γ défini par $\gamma = \langle -\ln E_2/E_1 \rangle_b$.

5). a). Pour quelle valeur de A le ralentissement est-il en principe le plus efficace?

.../... Suite page 2

b). Application numérique. Calculer γ pour les noyaux suivants :
 ^1H , ^2H , ^{12}C , ^{238}U . On assimilera A au nombre de masse du noyau.

Tourner la page

III. APPLICATION AU RALENTISSEMENT DES NEUTRONS

On considère un neutron d'énergie initiale $E_0 = 1 \text{ MeV}$. A l'instant $t = 0 \text{ s}$, ce neutron entame un processus de collisions élastiques en chaîne avec un milieu, que l'on supposera homogène, illimité et constitué de noyaux tous identiques.

1). Le milieu est maintenu à la température $T = 300 \text{ K}$. calculer l'énergie moyenne d'agitation thermique des noyaux $E_{300\text{K}}$ en électron-volts (la démonstration de la relation utilisée n'est pas exigée). Est-il légitime de négliger le mouvement des noyaux ?

2).a). En utilisant la définition **II.4).** de γ exprimer l'énergie E_n du neutron après n collisions en fonction de E_0 , γ et n . On pourra, pour justifier le calcul, considérer que n est un grand nombre.

b). Calculer, pour les 4 noyaux du **II.5).**, le nombre de collisions nécessaires pour faire passer l'énergie du neutron de sa valeur initiale E_0 à la valeur finale $E_{300\text{K}}$ calculée plus haut.

3). On considère maintenant que l'énergie du neutron est une fonction continue du temps $E(t)$. On note λ , le libre parcours moyen du neutron dans le milieu.

a). Exprimer la fréquence de collision dn/dt en fonction de λ , $E(t)$ et m .

b). En déduire l'équation différentielle vérifiée par $E(t)$.

c). Calculer $E(t)$.

4). On donne, dans le cas du graphite, $\lambda = 2,6 \text{ cm}$.

a). Calculer le temps nécessaire pour abaisser l'énergie du neutron à la valeur finale $E_{300\text{K}}$. Que pensez-vous de l'influence de E_0 sur le temps de ralentissement ?

b). Calculer la distance parcourue par le neutron.

DEUXIEME PARTIE

I. CALCUL DE CHAMP MAGNETIQUE

Soit $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un trièdre orthonormé direct. On considère 6 fils rectilignes infinis, parallèles, de direction $\vec{k}$. La disposition des fils est telle que leurs traces dans le plan $(O, \vec{i}, \vec{j})$ notées $A_1 B_3 A_2 B_1 A_3 B_2$ sont réparties sur les sommets d'un hexagone régulier inscrit dans un cercle de centre O et de rayon a (voir Figure 1).

Le fil A_1 , tel que $OA_1 \rightarrow = a\vec{i}$, est parcouru par un courant I dans le sens de $\vec{k}$ et deux fils voisins sont parcourus par des courants opposés. On veut calculer le champ magnétique créé par cette distribution de courant au voisinage de O .

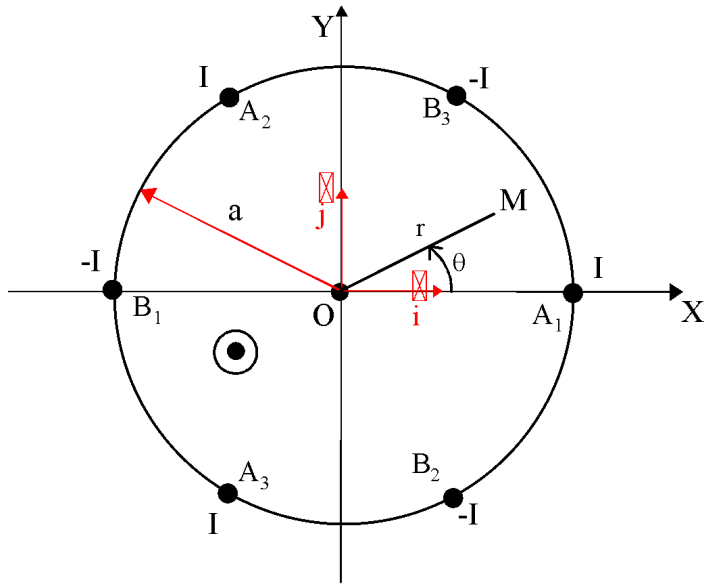


Figure 1.

1).a). Soit M un point du plan $(O, \vec{i}, \vec{j})$. on pose $OM \rightarrow \vec{r}$. Donner rapidement en fonction de I. a, $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ l'expression du champ magnétique en M créé par le fil A_1 seul.

Tourner la page

.../... Suite page 4

b). On repère M par ses coordonnées polaires (r, θ) avec $\theta = (\vec{i}, \vec{r})$. On pose $u = r/a$ et $B_0 = \mu_0 I / 2\pi a$. Donner les composantes radiale B'_r et orthoradiale B'_θ du champ créé par A_1 seul en fonction de B_0 , u et θ .

c). Faire un développement limité à l'ordre 2 en u de ces expressions.

2).a). Par quelle transformation passe-t-on du champ créé par le fil A_1 , au champ créé par le seul fil B_1 diamétralement opposé à A_1 ?

b). En déduire, à l'ordre 2 en u , les composantes B_{1r} et $B_{1\theta}$ du champ créé par le couple (A_1, B_1) . Il est conseillé, pour la suite du calcul, de linéariser les expressions en $\sin\theta$ et $\cos\theta$.

3).a). Par quelle transformation obtient-on les champs créés par les deux autres couples de fils (A_2, B_2) et (A_3, B_3) ?

b). Montrer que le champ total se met sous la forme

$$B_r = -C B_0 u^2 \sin 3\theta$$

$B_\theta = -C B_0 u^2 \cos 3\theta$ où C est une constante numérique à déterminer.

4).a). Donner l'équation des lignes de champ.

b). Représenter l'allure des lignes de champ.

5).a). Calculer le module du champ que l'on notera $B(r)$.

b). Comment sont les lignes isomodules $B(r) = \text{Constante}$?

On conviendra que cette expression de $B(r)$ est valable pour tout $r < a$.

II. ACTION DU CHAMP SUR UN NEUTRON

On admet qu'un neutron placé dans un champ magnétique oriente toujours son moment magnétique dans la direction du champ mais que son sens peut-être, de façon équiprobable, parallèle ou antiparallèle au vecteur champ magnétique.

$$\text{On pose } \Omega = (2CB_0M/ma^2)^{1/2}$$

1).a). Exprimer en fonction de Ω , m et r l'énergie potentielle d'interaction entre le neutron et le champ magnétique $\vec{B}$ déterminé dans la question I. On distinguera le cas des neutrons "parallèles" et celui des neutrons "antiparallèles" au champ.

b). Exprimer la force qui s'exerce sur ces neutrons. En déduire qu'il est possible de confiner certains neutrons dans ce champ, on précisera lesquels.

Dans toute la suite du problème on ne s'intéresse qu'aux neutrons confinés.

2). Soit le repère d'axe cartésien (O, x, y, z) engendré par le trièdre $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ défini au I.

a). Ecrire les équations différentielles du mouvement du neutron.

b). On considère un neutron qui, à $t = 0$ s. a pour coordonnées $(x_0, 0, 0)$ et pour vecteur vitesse $(0, u_0, v_0)$. Exprimer $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$.

c). Représenter sa trajectoire.

3). Soit $\vec{u}$ la projection du vecteur vitesse sur le plan (O, x, y) .

a). Montrer qu'il existe une vitesse critique u_c telle que si $|\vec{u}| > u_c$ aucun neutron n'est confiné. On exprimera u_c en fonction de B_0 , M et m .

b). Calculer u_c pour $B_0 = 0,5$ T. Calculer l'énergie cinétique critique E_c correspondante en électron-volts. Justifier, par un calcul numérique, le qualificatif d' "ultra-froids" que l'on donne aux neutrons confinés.

c). On considère un faisceau de neutrons ralentis et en équilibre thermique dans un milieu de température $T = 300$ K. Evaluer la fraction de ces neutrons qui sont susceptibles d'être piégés dans le champ. On utilisera la valeur E_c calculée précédemment et on fera une approximation justifiée.

4). Expliquer pourquoi, en pratique, la durée de confinement sera forcément limitée.

.../... Suite page 5

Tourner la page

III. AMELIORATION DU CONFINEMENT

On referme le volume cylindrique de la zone de confinement sur lui-même pour former un tore de rayon moyen R et de section circulaire de rayon a . Les 6 fils rectilignes infinis du **I** sont donc remplacés par 6 fils circulaires coaxiaux et on définit un nouveau repère d'axe en coordonnées cylindriques (ρ, θ, z) l'axe z étant maintenant confondu avec l'axe du tore (voir **Figure 2.**)

1). On admet que la configuration du champ dans une section $\theta = \text{constante}$ du tore est identique à celle déjà calculée dans le cas des fils infinis.

a). Exprimer, en coordonnées cylindriques, la force qui s'exerce sur un neutron confiné en fonction de m, Ω, R, ρ et z .

b). Exprimer les composantes de l'accélération en coordonnées cylindriques.

c). En déduire les équations différentielles du mouvement.

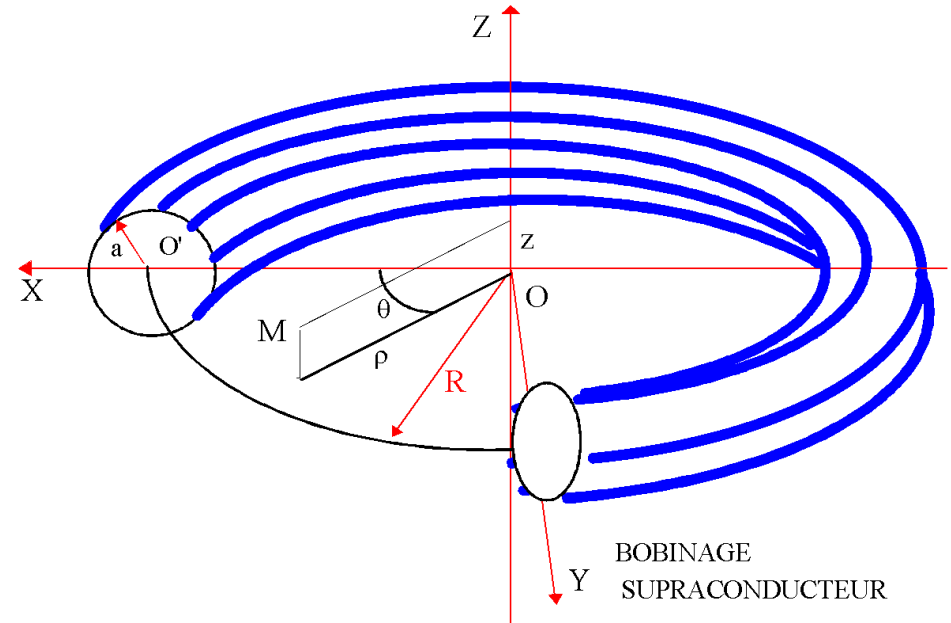


Figure 2.

On choisit l'origine des temps telle que $d\rho/dt(t=0) = 0$ et l'origine des angles telle que $\theta(t=0) = 0$. On pose $\rho(0) = \rho_0, z(0) = z_0, d\theta/dt(t=0) = \omega_0$ et $dz/dt(t=0) = v_0$.

2).a). Calculer $z(t)$.

b). Montrer que $\rho^2 d\theta/dt$ est une constante du mouvement. Comment aurait-on pu prévoir directement ce résultat ?

c). En déduire une équation différentielle en $\rho(t)$ uniquement.

3). Décrire complètement le mouvement dans les deux cas particuliers suivants :

a). $\omega_0 = 0$. Donner la nature des trajectoires.

.../... Suite page 7

b). $d\theta/dt = \text{constante}$. Calculer ρ en fonction de R , Ω et ω_0 et représenter les trajectoires. A quelle condition sont-elles fermées ?

4). On cherche maintenant des solutions pour lesquelles ρ varie peu autour de sa valeur moyenne.

On pose $\rho(t) = \rho_m (1 + \varepsilon(t))$ avec $\rho_m = \langle \rho(t) \rangle_t$ et $|\varepsilon| \ll 1$.

a). En ne conservant que les termes d'ordre 1 en ε , établir l'équation différentielle linéaire vérifiée par $\varepsilon(t)$.

b). Donner l'équation qui lie ρ_m aux grandeurs initiales ρ_0 et ω_0 . On ne cherchera pas à la résoudre.

c). En déduire les expressions de $\rho(t)$ et de $d\theta/dt$ en fonction de ρ_m , ω_0 , Ω , R et t .

d). Représenter l'allure des trajectoires.

5). Si on suppose l'axe z vertical, quel serait l'effet de la pesanteur sur la trajectoire du neutron ?

Faire l'application numérique pour $g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$, $B_0 = 0.5\text{T}$ et $a = 10 \text{ cm}$.

**** **FIN** ****