

Exercice 1 :

Dans chacun des cas suivants justifier la continuité de la fonction f en a :

$$a) \begin{cases} f(x) = \frac{|x|\sqrt{|x|}}{x} & ; (a=0) \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} f(x) = \sqrt{1+x} - 2 & \text{si } x \neq 3 \\ f(3) = 1 \end{cases} ; (a=5)$$

$$c) \begin{cases} f(x) = 1 + \sqrt{x} & \text{si } x > 0 \\ f(x) = -1 - \sqrt{-x} & \text{si } x < 0 \\ f(0) = 1 \end{cases} ; (a=0)$$

$$d) \begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{(x-1)^2 - (x-1)^4}}{x-1} & \text{si } x \in]1, 2] \\ f(x) = |x| & \text{si } x \in]-\infty, 1] \end{cases} ; (a=1)$$

Exercice 2 :

Dans chacun des cas suivants étudier la continuité de f sur son domaine de définition :

$$a) \begin{cases} f(x) = \sqrt{x+1} & \text{si } x \geq -1 \\ f(x) = \frac{-|x|^3 + x^2}{x+1} & \text{si } x < -1 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} f(x) = \sqrt{x^2-1} & \text{si } x \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[\\ f(x) = \frac{1-x^2}{1-x^3} & \text{si } x \in [-1, 1[\end{cases}$$

$$c) \begin{cases} f(x) = \frac{-x^2 + x}{x^2 - 1} & \text{si } x < 1 \\ f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - x + 1} - x}{x - 1} & \text{si } x \geq 1 \\ f(1) = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} f(x) = \sqrt{x^2 - x - 6} - x & \text{si } x \leq -2 \\ f(x) = \frac{x+1}{x} & \text{si } -2 < x \leq 2 \\ f(x) = \frac{\sqrt{x+2} - 2}{\sqrt{x+7} - 3} & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Exercice 3 :

Dans chacun des cas suivants la fonction f est-elle prolongeable par continuité en x_0 ? Si oui définir ce prolongement.

$$a) f : x \mapsto \frac{|x|-3}{x^2+3x} ; x_0 = -3$$

$$b) f : x \mapsto \frac{x}{x+|x|} ; x_0 = 0$$

$$d) f : x \mapsto \frac{x^2+x-2}{x^2-1} ; x_0 = 1$$

$$e) f : x \mapsto \frac{8x^3-1}{x-|x-1|} ; x_0 = \frac{1}{2}$$

Exercice 4 :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^3-1}{x^2-3x+2} & \text{si } x < 1 \\ f(x) = \sqrt{x^2-1} - 3x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Soit f la fonction définie par :

Montrer que f est continue en 1

Exercice 5 :

$$\text{Soit } f \text{ la fonction définie par } f(x) = \frac{\sqrt{1+x}-2}{x-3} \text{ si } x \neq 3.$$

$f(3) = a$ (a réel donné). Déterminer a pour que f soit continue en 3.

Exercice 6 :

$$x \mapsto \frac{\sqrt{1+x^2} + x - 1}{x}$$

On considère la fonction f définie par

- 1) Déterminer l'ensemble de définition de f .
- 2) Montrer que f est continue en tout réel non nul.

- 3) a) Montrer que pour tout réel x non nul $f(x) = \frac{2}{\sqrt{1+x^2} - x + 1}$
- b) En déduire que f admet un prolongement par continuité en 0.

Exercice 7 :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{5+4x} - 2x - 1}{x - x^2} & \text{si } x \neq 1 \\ f(1) = m \end{cases} \quad (\text{où } m \in \mathbb{R})$$

Soit f la fonction définie par :

- 1) Déterminer D_f .

- 2) Déterminer m pour que f soit continue en 0.
- 3) Donner alors suivant les valeurs de m, le domaine de continuité de f
- 4) Soit g la fonction définie par $g(x) = (x-1)^2 \cdot f(x)$ Etudier la continuité de g en 1.

Exercice 8 :

Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{x^2 - |x|}$

- 1) Déterminer l'ensemble de définition de f.
- 2) Peut-on parler de la continuité de f en 0 ?
- 3) Vérifier que f est continue à droite en 1 et continue à gauche en (-1).

Exercice 9 :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3x^2 + 4x + 1}{x^2 - 1} & \text{si } x \in]-\infty, -1[\\ x^2 + x + 1 & \text{si } x \in [-1, 1] \\ 2\sqrt{x^2 - 1} - x + 4 & \text{si } x \in]1, +\infty[\end{cases}$$

Soit f la fonction définie sur IR par

- 1) Montrer que f est continue en 1.
- 2) f est-elle continue en -1.
- 3) Déterminer les intervalles sur lesquels f est continue.

Exercice 10 :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3x^2 + 4x + 2x}{x^2 - 1} & \text{si } x \in]-\infty, -1[\\ x^2 + x + 1 & \text{si } x \in [-1, 1] \\ 2\sqrt{x^2 - 1} - x + 4 & \text{si } x \in]1, +\infty[\end{cases}$$

Soit f la fonction définie sur IR par

- 1) Montrer que f est continue en 1.
- 2) f est-elle continue en -1.
- 3) Déterminer les intervalles sur lesquels f est continue.

Exercice 11 :

$$f(x) = \begin{cases} -1 + \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{x} & \text{si } x < 0 \\ 1 + \frac{x^2 + 3x}{x + 1} & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

Soit f la fonction définie sur IR par :

- 1) Etudier la continuité de f en 0.
- 2) Soit g la fonction définie par $g(x) = |x| \cdot f(x)$ Montrer que g est continue en 0.

Exercice 12:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 - x - 6} + ax & \text{si } x \leq -2 \\ \frac{x+1}{x} & \text{si } -2 < x \leq 2 \\ \frac{\sqrt{x+2} - 2}{\sqrt{x+7} - 3} & \text{si } x > 2 \end{cases} \quad (a \text{ est un paramètre réel})$$

Soit la fonction définie par :

- 1) Déterminer le domaine de définition de f.
- 2) Montrer que f est continue en 2.
- 3) Déterminer le réel a pour que f soit continue en -2.
- 4) On prend dans la suite $a = -\frac{1}{4}$. Montrer que f est continue sur son domaine de définition.