Exercice 1 :

Dans chacun des cas suivants justifier la continuité de la fonction f en a :

a) $\begin{cases} f(x)=\dfrac{|x|\sqrt{|x|}}{x} \\ f(0)=0 \end{cases} ;(a=0)$

b) $\begin{cases} f(x)=\sqrt{1+x}-2 \quad \text{si} \quad x\neq 3 \\ f(3)=1 \end{cases} ;(a=5)$

c) $\begin{cases} f(x)=1+\sqrt{x} \quad \text{si } x>0 \\ f(x)=-1-\sqrt{-x} \quad \text{si } x<0 \\ f(0)=1 \end{cases} ; (a=0)$

d) $\begin{cases} f(x)=\dfrac{\sqrt{(x-1)^2-(x-1)^4}}{x-1} \quad \text{si } x\in]1,2] \\ f(x)=|x| \quad \text{si } x\in]-\infty,1] \end{cases} ; (a=1)$

Exercice 2 :

Dans chacun des cas suivants étudier la continuité de f sur son domaine de définition :

a) $\begin{cases} f(x)=\sqrt{x+1} \quad \text{si } x\geq -1 \\ f(x)=\dfrac{-|x|^3+x^2}{x+1} \quad \text{si } x<-1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} f(x)=\sqrt{x^2-1} \quad \text{si } x\in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty] \\ f(x)=\dfrac{1-x^2}{1-x^3} \quad \text{si } x\in [-1,1[\end{cases}$

c) $\begin{cases} f(x)=\dfrac{-x^2+x}{x^2-1} \quad \text{si } x<1 \\ f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-x+1}-x}{x-1} \quad \text{si } x\neq 1 \\ f(1)=-\dfrac{1}{2} \end{cases}$

d) $\begin{cases} f(x)=\sqrt{x^2-x-6}-x \quad \text{si } x\leq -2 \\ f(x)=\dfrac{x+1}{x} \quad \text{si } -2<x\leq 2 \\ f(x)=\dfrac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{x+7}-3} \quad \text{si } x>2 \end{cases}$

Exercice 3 :

Dans chacun des cas suivants la fonction f est elle prolongeable par continuité en x_0 ? Si oui définir ce prolongement.

a) $f: x \mapsto \dfrac{|x|-3}{x^2+3x}$; $x_0=-3$

b) $f: x \mapsto \dfrac{x}{x+|x|}$; $x_0=0$

d) $f: x \mapsto \dfrac{x^2+x-2}{x^2-1}$; $x_0=1$

e) $f: x \mapsto \dfrac{8x^3-1}{x-|x-1|}$; $x_0=\dfrac{1}{2}$

Exercice 4 :

Soit f la fonction définie par : $\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^3-1}{x^2-3x+2} \quad \text{si } x<1 \\ f(x)=\sqrt{x^2-1}-3x \quad \text{si } x\geq 1 \end{cases}$ Montrer que f est continue en 1

Exercice 5 :

Soit f la fonction définie par $f(x)=\dfrac{\sqrt{1+x}-2}{x-3}$ si $x\neq 3$.

$f(3)=a$ (a réel donné). Déterminer a pour que f soit continue en 3.

Exercice 6 :

On considère la fonction f définie par $x \mapsto \dfrac{\sqrt{1+x^2}+x-1}{x}$

1) Déterminer l'ensemble de définition de f.
2) Montrer que f est continue en tout réel non nul.
3) a) Montrer que pour tout réel x non nul $f(x)=\dfrac{2}{\sqrt{1+x^2}-x+1}$
   b) En déduire que f admet un prolongement par continuité en 0.

Exercice 7:

Soit f la fonction définie par : $\begin{cases} f(x)=\dfrac{\sqrt{5+4x}-2x-1}{x-x^2} \quad \text{si } x\neq 1 \\ f(1)=m \end{cases}$ (où $m\in IR$)

1) Déterminer D_f.

2) Déterminer m pour que f soit continue en 0.
3) Donner alors suivant les valeurs de m, le domaine de continuité de f
4) Soit g la fonction définie par g (x) = (x – 1)².f (x) Etudier la continuité de g en 1.

Exercice 8 :

Soit f la fonction définie par f (x) = $\sqrt{x^2 - |x|}$

1) Déterminer l'ensemble de définition de f.
2) Peut-on-parler de la continuité de f en 0 ?
3) Vérifier que f est continue à droite en 1 et continue à gauche en (– 1).

Exercice 9 :

Soit f la fonction définie sur IR par
$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{3x^2 + 4x + 1}{x^2 - 1} & \text{si } x \in]-\infty, -1[\\ f(x) = x^2 + x + 1 & \text{si } x \in [-1, 1] \\ f(x) = 2\sqrt{x^2 - 1} - x + 4 & \text{si } x \in]1, +\infty[\end{cases}$$

1) Montrer que f est continue en 1.
2) f est-elle continue en -1.
3) Déterminer les intervalles sur les quels f est continue.

Exercice 10 :

Soit f la fonction définie sur IR par
$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{3x^2 + 4x + 2x}{x^2 - 1} & \text{si } x \in]-\infty, -1[\\ f(x) = x^2 + x + 1 & \text{si } x \in [-1, -1] \\ f(x) = 2\sqrt{x^2 - 1} - x + 4 & \text{si } x \in]-1, +\infty[\end{cases}$$

1) Montrer que f est continue en 1.
2) . f est-elle continue en -1.
3) Déterminer les intervalles sur les quels f est continue.

Exercice 11 :

Soit f la fonction définie sur IR par :
$$\begin{cases} f(x) = -1 + \dfrac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{x} & \text{si } x < 0 \\ f(x) = 1 + \dfrac{x^2 + 3x}{x + 1} & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

1) Etudier la continuité de f en 0.
2) Soit g la fonction définie par g (x) = |x|.f (x) Montrer que g est continue en 0.

Exercice 12:

Soit la fonction définie par :
$$\begin{cases} f(x) = \sqrt{x^2 - x - 6} + ax & \text{si } x \le -2 \quad (a \text{ est un paramètre réel}) \\ f(x) = \dfrac{x + 1}{x} & \text{si } -2 < x \le 2 \\ f(x) = \dfrac{\sqrt{x + 2} - 2}{\sqrt{x + 7} - 3} & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

1) Déterminer le domaine de définition de f.
2) Montrer que f est continue en 2.
3) Déterminer le réel a pour que f soit continue en -2.
4) On prend dans la suite a = $-\frac{1}{4}$. Montrer que f est continue sur son domaine de définition.