

## PREMIER PROBLEME

Ce problème étudie les mouvements de trois systèmes matériels et permet d'expliquer le rôle des roues d'une bicyclette.

### 1. Calculs d'énergie cinétique

Exprimer l'énergie cinétique des trois systèmes matériels suivants:

1. Le système  $S_1$  est un solide en translation de masse  $M$  et de vitesse  $v$ .
2. Le système  $S_2$  est un cercle de rayon  $R$ , de masse  $m$  uniformément répartie sur le cercle. Ce cercle est animé d'une vitesse angulaire  $\omega$  autour de son axe de révolution  $(D)$ , cet axe  $(D)$  possède la vitesse  $v$  parallèle au plan du cercle.
3. Le système  $S_3$  est une bicyclette. L'ensemble cadre + cycliste de masse  $M$  est en translation de vitesse  $v$ . Chacune des roues de rayon  $R$ , de masse  $m$  est modélisable par le système  $S_2$  et possède la vitesse angulaire  $\omega$ .

## II. Mouvements sur un plan horizontal

1. Le système  $S_1$  repose sur le sol, le contact étant caractérisé par le coefficient de frottement de glissement  $f$ .  $S_1$  en mouvement de translation, a pour vitesse initiale  $v_0$ . Etablir la loi  $v = f(t)$  de la vitesse  $v$  en fonction du temps  $t$ . Représentation graphique.
2. Le système  $S_2$  roule sans glisser sur le plan horizontal, le contact étant caractérisé par le même coefficient de frottement de glissement  $f$ . La vitesse initiale du centre d'inertie est  $v_0$ . Etablir la loi  $v = g(t)$  de la vitesse  $v$  en fonction du temps  $t$ . Représentation graphique.
3. Le système  $S_3$  possède un mouvement dans lequel le mouvement des roues est un roulement sans glissement. L'ensemble cadre + cycliste possède la vitesse initiale  $v_0$ , le cycliste ne pédale pas et ne freine pas. Etablir la loi  $v = h(t)$  de la vitesse  $v$  en fonction du temps  $t$ . Représentation graphique.

### III. Mouvements suivant la ligne de plus grande pente d'un plan incliné (P)

Soit  $\beta$  l'angle formé par le plan horizontal et le plan (P). Soit  $f$  le coefficient de frottement de glissement.

1. Le système  $S_1$  initialement au repos est susceptible d'acquérir un mouvement de translation, suivant la ligne de plus grande pente de (P).

a. Calculer, dans cette hypothèse, l'accélération  $a_G$  de son centre d'inertie.

b. Montrer que le mouvement se produit pour des valeurs de  $\beta$  supérieures à une valeur limite  $\beta_0$ .

2. On considère le système  $S_2$  lâché sans vitesse initiale.

a. La circonférence roule sans glisser. Calculer l'accélération  $a_G$  de son centre d'inertie.

b. Quel est l'intervalle  $[\beta_1, \beta_2]$  des valeurs de  $\beta$  pour lequel le roulement sans glissement est possible ? Pour  $\beta > \beta_2$ , il y a glissement de la circonférence sur le sol.

c. Calculer  $a_G$  pour  $\beta > \beta_2$ .

3. On considère le système  $S_3$ .

a. La bicyclette roule sans glisser, sur les deux roues. Calculer  $a_G$ .

b. La bicyclette roule avec glissement sur les deux roues. Calculer  $a_G$ .

c. Le roulement sans glissement a lieu pour des valeurs de  $\beta$  inférieures à une valeur notée  $\beta_3$ .

On admet que pour  $\beta > \beta_3$ , le glissement se produit simultanément sur les deux roues, et que les composantes tangentielles des réactions du plan (P) sur les deux roues sont égales.

Calculer  $\beta_3$ .

### IV. Conclusion

1. Représenter sur un même graphique les trois fonctions  $a_G(\beta)$  pour chacun des trois systèmes matériels,  $\beta$  variant de 0 à  $\frac{\pi}{2}$ .

2. En déduire le rôle du rapport  $\frac{2m}{M}$  pour une valeur de  $\beta$  donnée.

## DEUXIEME PROBLEME.

### PRELIMINAIRES

P.1. Soit une spire circulaire de rayon  $R$  placée dans l'air, d'axe  $\vec{O_1z}$ , parcourue par un courant d'intensité  $I$  (figure 1). Caractériser (direction, sens, module) le champ d'induction magnétique  $\vec{B}_M$  en un point  $M$  de l'axe de la spire. L'orientation étant celle de la figure 1, exprimer la mesure algébrique de la composante axiale de  $\vec{B}_M$  en fonction de  $\mu_0$  (perméabilité du vide égale à celle de l'air),  $I$ ,  $z$  et  $R$ .  $\vec{k}$  est un vecteur unitaire et  $\vec{O_1M} = z.\vec{k}$ .

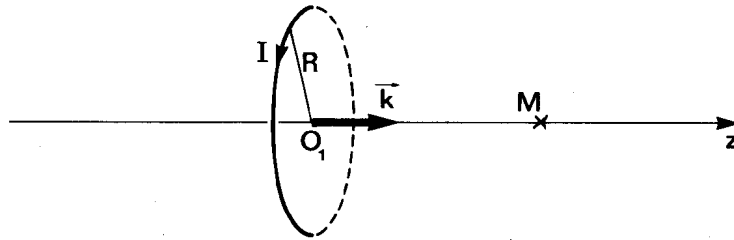


Figure 1

P.2. Soit un solénoïde de longueur  $L$  dont le nombre total de spires est  $N$ . Le rayon du solénoïde est  $R$ , il est placé dans l'air et on considère un point  $M$  de l'axe du solénoïde situé à une position  $\vec{OM} = z_1$  (figure 2) du centre  $O$  du solénoïde. Ce point  $M$  peut être caractérisé par les angles  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  définis à partir de l'axe  $O_2$  comme l'indique la figure 2.

Déterminer l'induction.  $\vec{B}_M$  en  $M$  et exprimer la composante axiale de celle-ci en fonction de  $\mu_0$ ,  $N$ ,  $I$ ,  $L$ ,  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$ .

*N.B.:* On pourra se servir du résultat de P.1 en cherchant le champ élémentaire créé en  $M$  par un ensemble de spires circulaires contenues dans l'épaisseur  $dz$  et parcourues par le courant  $I$ .

*Application numérique:* Calculer l'expression de l'induction  $B_o$  au centre si  $N = 300$ ;  $L = 10$  cm;

$$I = 0,5 \text{ A}; R = 4 \text{ cm}; \mu_0 = 4.\pi.10^{-7} \text{ unités SI}$$

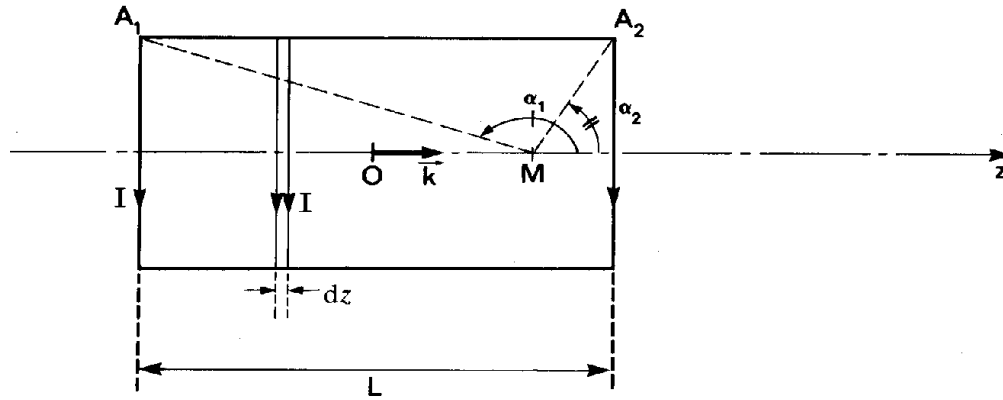


Figure 2

Tournez la page S V D

### PREMIERE PARTIE

Soit un circuit dont la forme est celle d'une hélice circulaire d'axe  $O\vec{z}$  comportant  $2N_1$  spires complètes parcourues par un courant  $I$ . Le pas de l'hélice est noté  $p$  et elle est rapportée à un repère  $(O, x, y, z)$  et son équation paramétrique (paramètre:  $\phi$ ) est (figure 3):

$$x = R_1 \cos \phi$$

$$y = R_1 \sin \phi$$

$$z = \frac{p}{2\pi} \phi$$

Les spires sont réparties entre la cote  $z_1 = -p N_1$  et la cote  $z_2 = +p N_1$ . On recherche la composante de l'induction  $B_{Oz}$  suivant l'axe  $Oz$  au point  $O$  (origine) créée par les  $2N_1$  spires de cette hélice.

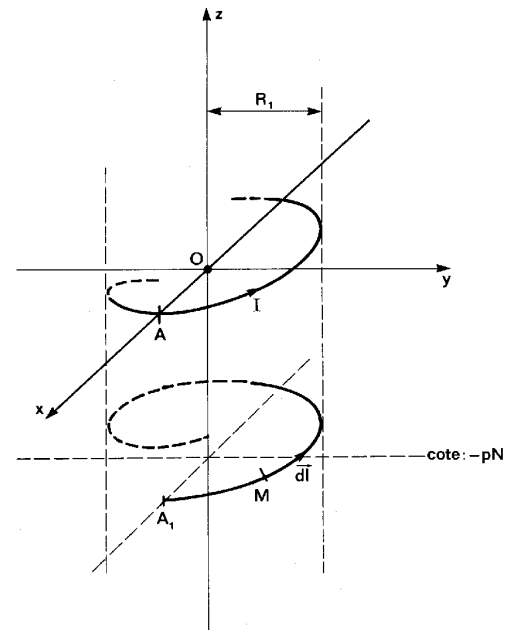


Figure 3

1.1. Exprimer  $dB_{Oz}$  mesure algébrique de la projection sur  $O\vec{z}$  de l'induction magnétique élémentaire  $d\vec{B}$  créée en  $O$  par l'élément  $d\vec{l}$  ( $dx, dy, dz$ ) parcouru par le courant  $I$  en fonction de  $R_1, \phi, \mu_0, I$  et  $p$ .

1.2. Calculer  $B_{Oz}$  composante de l'induction résultante au point  $O$  par l'intégration de l'expression précédente

(on pourra faire le changement de variable:  $u = \frac{p}{2\pi R_1} \cdot \varphi$  ).

Exprimer  $B_{Oz}$  en fonction de  $\mu_0$ ,  $I$ ,  $p$ ,  $N_1$ ,  $R_1$

1.3. Si on remarque que la longueur du circuit hélicoïdal est  $L_1 = 2p N_1$ , montrer que l'expression de  $B_{Oz}$  peut se mettre sous la forme:

$$B_{Oz} = B_0 \cdot f(R_1, N_1, p)$$

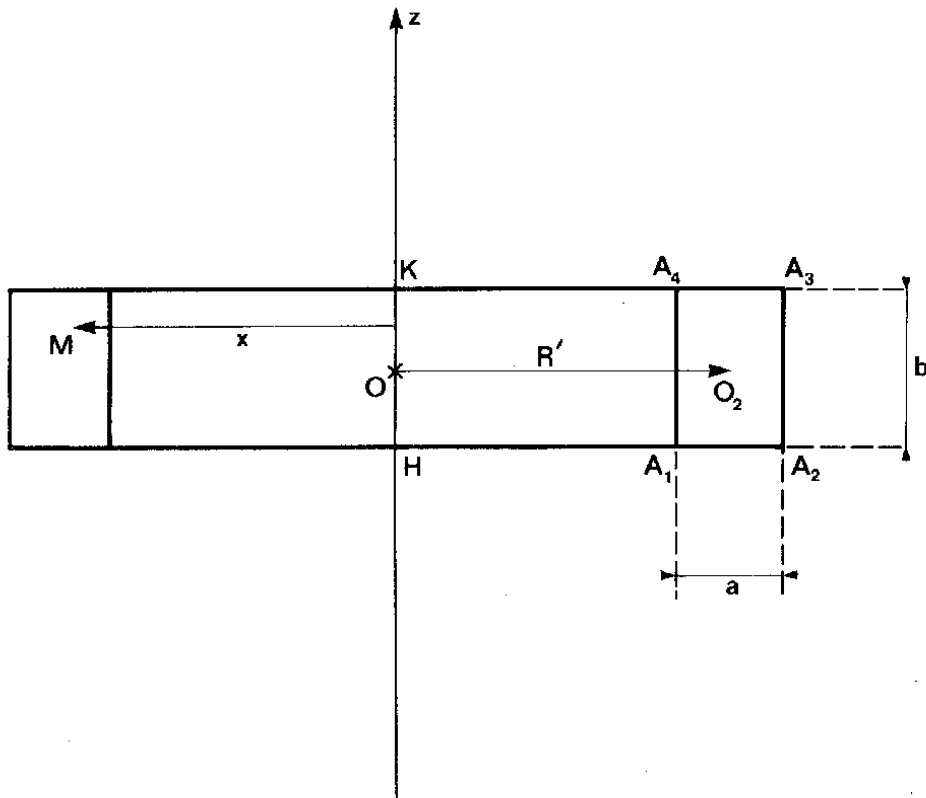
où  $B_0$  est l'induction au centre d'un solénoïde de longueur infinie. Préciser  $f(R_1, N_1, p)$ .

Pour quelle valeur de  $R_1$  peut-on considérer que  $f$  est égal à 1 à  $10^{-2}$  près ?

*Application numérique:*  $N_1 = 150$ ;  $L_1 = 0,5$  m.

## DEUXIEME PARTIE

Soit un tore de section méridienne rectangulaire et d'axe  $Oz$ ; les données géométriques sont précisées sur la figure 4. Sur ce tore on a bobiné  $N$  spires régulièrement réparties et jointives, le matériau qui le constitue est un matériau de perméabilité magnétique  $\mu$  (perméabilité absolue) que l'on supposera constante (sauf dans une question de la 3e partie). Le vecteur excitation magnétique (ou intensité du champ magnétique) sera noté  $\vec{H}$  et le vecteur induction magnétique  $\vec{B}$ .



$$= R' - \frac{a}{2}$$

$$KA_4 = HA_1 = R' - \frac{a}{2} \quad A_1A_2 = a \quad A_1A_4 = b$$

2.1. Exprimer et caractériser  $\vec{H}$  en un point M à la distance x de l'axe du tore. On aura soin de distinguer le cas d'un point intérieur puis d'un point extérieur au tore.

2.2. Calculer l'induction au point  $O_2$  du centre de la section méridienne, puis aux points  $A_1$  et  $A_2$ .

*Application numérique:*  $R' = 10 \text{ cm}$ ;  $a = 4 \text{ cm}$ ;  $b = 3 \text{ cm}$ ;  $N = 300$ ;  $I = 0,5 \text{ A}$ ;  $\mu = \frac{1}{450}$  unités SI.

2.3. Exprimer le flux du vecteur induction à travers une section méridienne du tore et en déduire l'expression de l'inductance propre de la bobine torique.

Calculer le nombre de spires (noté maintenant  $N'$ ) si l'inductance  $L$  a pour valeur  $43 \text{ mH}$ .

*Application numérique:*  $R' = 10 \text{ cm}$ ;  $a = 4 \text{ cm}$ ;  $b = 3 \text{ cm}$ ;  $\mu = \frac{1}{450}$  unités SI.

2.4. L'inductance  $L$  de la question 2.3. est insérée dans le circuit de la figure 5 qui précise le sens des tensions  $V_C$ ,  $V_L$  et  $E$  et du courant  $i$ . Pour  $t < 0$ ,  $(K_1)$  est ouvert et  $(K_2)$  fermé depuis très longtemps.  $R$  représente sur la figure 5 une résistance mise en série avec le circuit et dont la valeur est  $R = 60 \Omega$ .

On donne  $E = 30 \text{ V}$ .

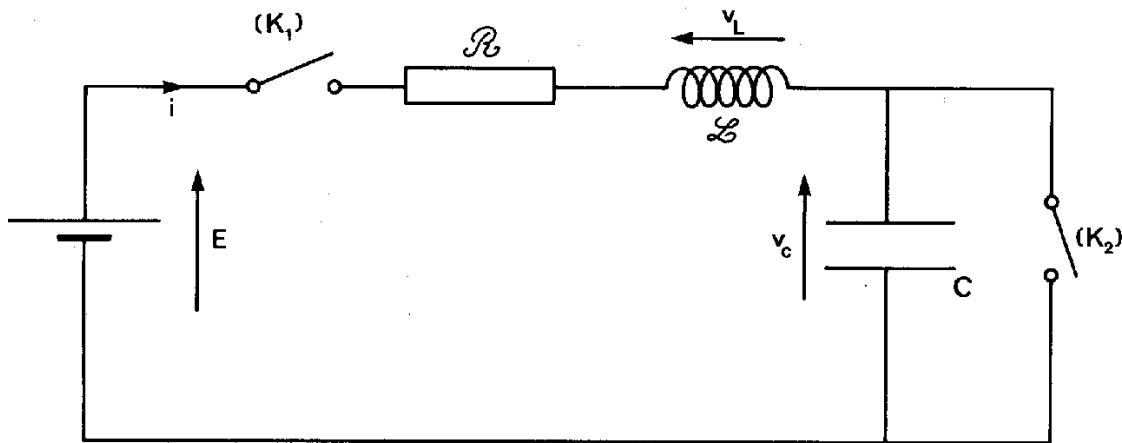


Figure 5

2.4.1. On ferme  $(K_1)$ . Au bout de combien de temps peut-on considérer que le courant dans le circuit a atteint sa valeur finale à  $10^{-4}$  près en valeur relative ? On note  $T_e$  la constante de temps de ce circuit.

2.4.2. Le régime final précédent étant considéré comme atteint à un nouvel instant pris comme origine, on ouvre  $(K_2)$ ,  $(K_1)$  étant maintenu fermé. A quelle équation différentielle obéit  $V_C$  ?

2.4.3.  $C$  remplit la condition:

$$C = \frac{4L}{R^2}$$

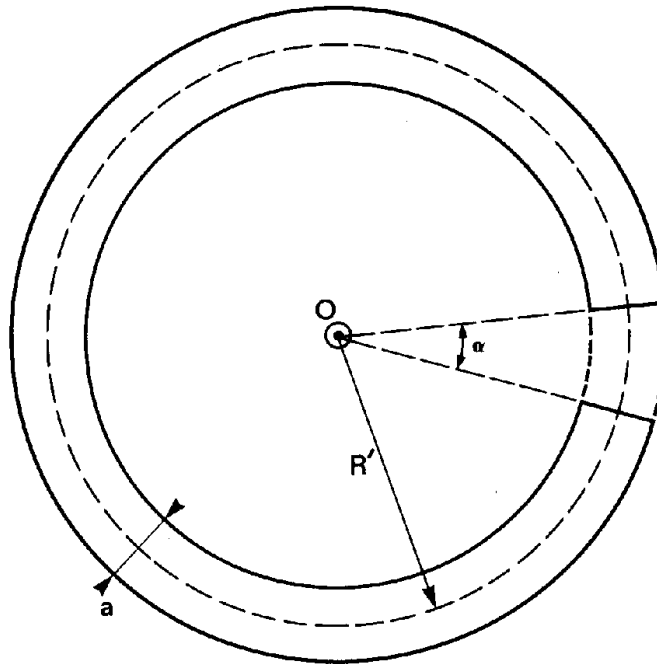
Exprimer  $V_C$  et  $i$  en fonction de  $t$ ,  $T_e$ ,  $E$  et  $R$ . Préciser les expressions numériques en fonction de  $t$  et tracer sur un même graphe en précisant les échelles choisies:

$$v_C(t), v_L(t) \text{ et } R.i(t)$$

2.4.4. Montrer que  $v_L$  passe par un extremum. Préciser la valeur et interpréter physiquement le signe de  $v_L$ .

### TROISIEME PARTIE

Le tore étudié dans la deuxième partie présente maintenant une entaille diédrique dont l'angle  $\alpha$  sera suffisamment petit pour qu'on puisse négliger les distorsions des lignes de champ (cf. figure 6). Dans l'intérieur de l'espace diédrique la perméabilité de l'air sera  $\mu_0$ .



3.1. Calculer la nouvelle expression de l'induction magnétique  $B$  à une distance  $x$  de l'axe  $Oz$ .

*Application numérique:* Calculer  $B$  en  $O_2$  centre du rectangle méridien du tore, avec:

$$I=2A; N= 300; \alpha=3,5^\circ.$$

3.2. Quelle est la nouvelle expression du coefficient d'auto-induction  $L'$  ? Quelle devrait être la valeur numérique de  $\alpha$  si ce coefficient diminue de 40 % par rapport à la valeur obtenue quand il n'y a pas d'entaille ?

3.3. Que devient l'expression de  $L$  si  $R' \gg a$  ? Comment évolue  $L$  en fonction de  $a$  ?

3.4. La perméabilité du matériau dans certaines conditions de fonctionnement ne peut plus être considérée comme constante.  $B$  et  $H$  sont alors liés par la loi:

|          |     |     |     |     |     |     |     |      |      |      |
|----------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|------|------|------|
| B(Tesla) | 0,5 | 0,8 | 0,9 | 1   | 1,1 | 1,2 | 1,4 | 1,6  | 1,7  | 1,8  |
| H(A/m)   | 225 | 339 | 409 | 460 | 517 | 584 | 780 | 1160 | 1480 | 1930 |



Par ailleurs on supposera la condition  $R' \gg a$  réalisée.

3.4.1. On désigne par  $H$  l'excitation dans le matériau et  $H_0$  l'excitation dans l'entaille diédrique. Appliquer le théorème d'Ampère le long de la ligne de champ moyenne ( $x = R'$ ).

3.4.2. Que peut-on dire de l'induction dans l'entaille et dans le matériau ?

3.4.3. Calculer l'induction en  $O_2$  pour les deux cas numériques suivants:

1<sup>er</sup> cas  $\{N = 300; I = I_1 = 3 \text{ A}; \alpha = 4^\circ; R' = 10 \text{ cm}\}$

2<sup>e</sup> cas  $\{N = 300; I = I_2 = 3,8 \text{ A}; \alpha = 0,41^\circ; R' = 10 \text{ cm}\}$

Commenter les résultats.