

Тема: Координати і вектори у просторі. Розв'язування задач

Посилання

на

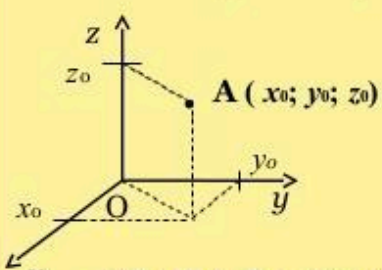
підручник:

<https://lib.imzo.gov.ua/wa-data/public/site/books2/pidruchnyky-10-klas-2018/14-matematyka-10-klas/merzlyak-ag-matematyka-alg-i-poch-analizu-ta-geom-riven-standartu-10-kl.pdf>

Матеріали до теми:

Координати в просторі

1. Сукупність трьох попарно перпендикулярних координатних прямих називають прямокутною системою координат у просторі;



2. Ox , Oy , Oz – координатні осі;
 O – початок координат.

3. Довільній точці простору ставлять у відповідність три числа:

x_0 – абсцису,
 y_0 – ординату,
 z_0 – аплікату

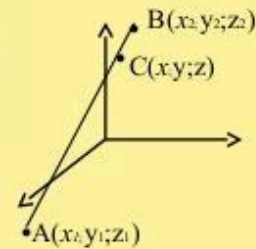
4. Нехай точка $A(x_1; y_1; z_1)$ і $B(x_2; y_2; z_2)$

а) середина відрізка AB – точка $C(\frac{x_1 + x_2}{2}; \frac{y_1 + y_2}{2}; \frac{z_1 + z_2}{2})$

б) квадрат відстані між точками A і B :

$$AB^2 = ((x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2)$$

5. Координати точки, що поділяє відрізок у заданому відношенні



Якщо $\frac{AC}{CB} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}$, то

$$x = \frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2} \cdot x_1 + \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2} \cdot x_2$$
$$y = \frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2} \cdot y_1 + \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2} \cdot y_2$$
$$z = \frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2} \cdot z_1 + \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2} \cdot z_2$$

Вектори в просторі

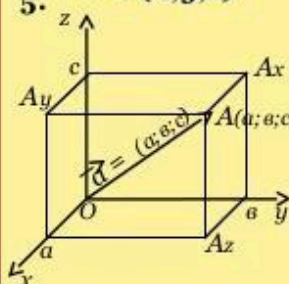
1. **Вектором** називають напрямлений відрізок.

2. **Позначають:** $\overline{AB}$ або $\vec{a}$

3. **Координатами вектора** $\overline{AB}$ початок якого – $A(x_1; y_1; z_1)$, а кінець – $B(x_2; y_2; z_2)$, називають числа:
 $x = x_2 - x_1$, $y = y_2 - y_1$, $z = z_2 - z_1$.

4. **Записують** $\overline{AB} = (x; y; z)$ або

5. $\vec{a} = (x; y; z)$



Якщо O – початок координат, а числа a, b, c – координати точки A , то ці числа є координатами вектора $\overline{OA}$

Дії над векторами

1. **Сумою векторів** $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$ і

$\vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$ називають вектор

$$\vec{a} + \vec{b} = (x_1 + x_2; y_1 + y_2; z_1 + z_2)$$

2. **Різницею цих векторів** називають вектор

$$\vec{a} - \vec{b} = (x_1 - x_2; y_1 - y_2; z_1 - z_2)$$

3. **Щоб помножити вектор на число**, потрібно кожну його координату помножити на це число.

Нехай $\vec{a}(x; y; z)$, тоді

$$m\vec{a} = (mx; my; mz)$$

4. **Для будь-яких векторів** $\vec{a}, \vec{b}$ і чисел m і n завжди: 1) $m(\vec{a} + \vec{b}) = m\vec{a} + m\vec{b}$;

$$2) (m + n)\vec{a} = m\vec{a} + n\vec{a};$$

$$3) |m\vec{a}| = |m| |\vec{a}|.$$

Властивості векторів

1. **Для будь-яких векторів** $\vec{a}, \vec{b}$ і $\vec{c}$

$$1) \vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$$

$$2) (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$$

г) Як би не були розміщені в просторі точки A, B, C, D завжди

$$2) \text{Правило паралелограма} \quad \vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} = \vec{AD}$$

ж) Модуль (абсолютною величиною) вектора називається довжина відрізка, яким задається вектор. Якщо то

• Модуль будь-якого ненульового вектора $\vec{a}(x; y; z)$ чисельно дорівнює $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

• Модуль нульового вектора дорівнює нулю:

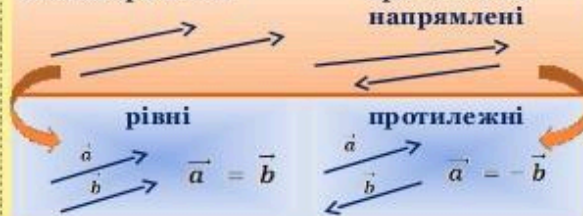
$$\vec{0} = (0; 0; 0), \quad |\vec{0}| = 0$$

4. Два ненульові вектори називають **колінеарними**, якщо вони співнапрямлені або протилежно напрямлені

Види колінеарних векторів

співнапрямлені

протилежно напрямлені

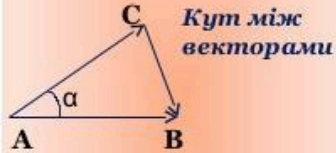


5. **Ненульові вектори** $\vec{a}$ і $\vec{b}$ **колінеарні** тоді і тільки тоді, коли їх координати пропорційні, тобто

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}$$

Застосування векторів

1. Кут між двома ненульовими векторами називають кут між відповідними їм напрямленими відрізками, які виходять з однієї точки.



Кут між векторами

2. Кут між протилежно напрямленими векторами дорівнює 180° , а між співнаправленими - 0° .

3. Скалярним добутком двох ненульових векторів називається добуток модулів цих векторів на косинус кута між ними.

Якщо кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ дорівнює φ , то їх скалярний добуток дорівнює:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi$$

4. Скалярний добуток векторів $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$ і $\vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$:

$$x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$$

5. Якщо кут між ненульовими векторами дорівнює 90° , то їх скалярний добуток дорівнює 0, бо $\cos 90^\circ = 0$.

Умова перпендикулярності двох векторів:

Два ненульові вектори перпендикулярні тоді і тільки тоді, коли їх скалярний добуток дорівнює нулю.

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \times \vec{b} = 0$$

Приклад розв'язування вправ

1. Знайдіть координати і довжини векторів $\vec{AB}$ і $\vec{AC}$, якщо $A(2; -3; -1)$, $B(-4; -8; 5)$, $C(3; 1; -2)$.

Розв'язання

$$\vec{AB} (-4 - 2; -8 - (-3); 5 - (-1)) = \vec{AB} (-6; -5; 6);$$

$$\vec{AC} (3 - 2; 1 - (-3); -2 - (-1)) = \vec{AC} (1; 4; -1);$$

$$|\vec{AB}| = \sqrt{(-6)^2 + (-5)^2 + 6^2} = \sqrt{97};$$

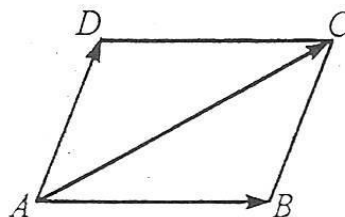
$$|\vec{AC}| = \sqrt{1^2 + 4^2 + (-1)^2} = 3\sqrt{2}.$$

Відповідь: $\vec{AB}(-6; -5; 6)$, $\vec{AC}(1; 4; -1)$, $|\vec{AB}| = \sqrt{97}$, $|\vec{AC}| = 3\sqrt{2}$.

2. Знайдіть довжину діагоналі AC паралелограма ABCD, якщо $A(2; -6; 0)$, $B(-4; 8; 2)$, $D(0; -12; 0)$

Розв'язання

Оскільки $\vec{AB}(-6; 14; 2)$, $\vec{AD}(-2; -6; 0)$, то $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{AD}$, $\vec{AC}(-8; 8; 2)$.



$$\text{Тоді } |\vec{AC}| = \sqrt{(-8)^2 + 8^2 + 2^2} = \sqrt{132} = 2\sqrt{33}.$$

Відповідь: $2\sqrt{33}$.

Завдання:

1. Повторити теоретичний матеріал: §6, п. 38-42.
2. Виконати письмово вправи: 43.42-43.46.

Розв'язати завдання:

1. Яка з наведених точок належить площині Oxy ?

А	Б	В	Г	Д
A (-1; 2; 3)	B (0; 2; 3)	C (-1; 0; 3)	D (-1; 2; 0)	E (0; 0; 3)

2. Яка з точок симетрична точці A (-5; 3; -2) відносно початку координат?

А	Б	В	Г	Д
(5; -3; 2)	(5; 3; -2)	(-5; -3; 2)	(-5; 3; 2)	(-5; -3; -2)

3. В яку точку при паралельному переносі на вектор $\vec{a}(2; -3; 4)$ перейде точка A (3; 4; -5)?

А	Б	В	Г	Д
(5; 1; -1)	(-1; -7; 9)	(6; -12; -20)	$(\frac{2}{3}, -\frac{3}{4}, -\frac{4}{5})$	(1; 7; -9)

4. Яка з наведених точок належить координатній осі z ?

А	Б	В	Г	Д
(3; 2; 4)	(3; 0; 0)	(0; 2; 0)	(0; 0; 4)	(3; 2; 0)

5. Установіть відповідність між векторами (1 – 4) і співвідношеннями між ними (А – Д)

1	$\vec{a}(2; 3; -8)$ і $\vec{b}(-4; -5; 1)$	А	однаково напрямлені
2	$\vec{a}(2; -4; 6)$ і $\vec{b}(3; -7; 5)$	Б	сума векторів дорівнює вектору $(1; -2; 10)$
3	$\vec{a}(-5; 2; 7)$ і $\vec{b}(6; -4; 3)$	В	протилежно напрямлені
4	$\vec{a}(1; 2; 3)$ і $\vec{b}(-1; 0; 1)$	Г	вектори рівні

		Д	$\vec{c} = 2\vec{a} - \vec{b} = \overline{(3; 4; 5)}$
--	--	---	---

	А	Б	В	Г	Д
1					
2					
3					
4					

6. (1 бал) При яких значеннях y і z вектори $\vec{a}(2; -3; 8)$ і $\vec{b}(-7; y; z)$ колінеарні?

7. (1 бал) При яких значеннях a вектори $\vec{c}(2; -3; 8)$ і $\vec{d}(-7; -2; a)$ перпендикулярні?

8. (2 бали) Дано ABCD – паралелограм, A (-4; 1; 5), B (-5; 4; 2), C (3; -2; -1). Знайдіть координати вершини D.

9. (2 бали) Знайдіть на осі y точку, рівновіддалену від точок A (-3; 7; 4) і B (2; -5; -1).

10. (2 бали) Знайдіть кут між векторами $\vec{AB}$ і $\vec{CD}$, якщо A (1; 0; 2), B (1; $\sqrt{3}$; 3), C (-1; 0; 3), D (-1; -1; 3).

3. Переглянути відеоматеріали за посиланням:

<https://www.youtube.com/watch?v=ZUWssDatcs4>

<https://myslide.ru/presentation/skachat-koordinati-ta-vektori-v-prostori>

ЗВЕРНІТЬ УВАГУ!!! Роботу виконувати у робочому або окремому зошиті (якщо робочий залишився у гуртожитку), фотографувати і надсилати на електронну адресу valentinatalavera@ukr.net, у темі листа вказувати – ПІБ, предмет, номер групи.

Можна підготувати мультимедійну презентацію з теми і надіслати на електронну адресу valentinatalavera@ukr.net.