

Chapitre XVI : Produit scalaire dans l'espace

Histoire des maths : Si les vecteurs peuvent être additionnés entre eux ou multipliés par un réel, il n'a pas encore été défini ce que pouvait être le produit de deux vecteurs. Celui-ci n'est pas un vecteur mais un nombre. De par la nature de son résultat, on le nomme produit scalaire. Le produit scalaire est à l'origine une notion physique : le produit linéaire. Cet outil fut élaboré par le physicien prussien Hermann Grassman (1809-1877) et le physicien américain Josiah Gibbs (1839-1903). Mais c'est le mathématicien irlandais William Hamilton (1805-1865) qui en donna une première définition mathématique en 1853.



I. Produit scalaire dans l'espace

Définition du produit scalaire

On considère deux vecteurs de l'espace $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et trois points A, B et C tels que $\vec{AB} = \vec{u}$ et $\vec{AC} = \vec{v}$. Il existe au moins un plan $\mathcal{P}$ contenant les points A, B et C.

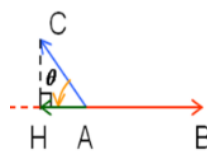
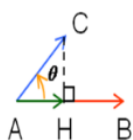
On appelle produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ le produit scalaire $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$ calculé dans ce plan. On le note $\vec{u} \cdot \vec{v}$

Rappels

1. $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ si l'un des vecteurs est nul.
2. $\vec{u} \cdot \vec{v} = ||\vec{u}|| \times ||\vec{v}|| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$ dans le cas contraire
3. Soient $\vec{AB}$ et $\vec{CD}$ deux vecteurs colinéaires non nuls.

S'ils ont le même sens : $\vec{AB} \cdot \vec{CD} = AB \times CD$ S'ils sont de sens contraires : $\vec{AB} \cdot \vec{CD} = -AB \times CD$

4. Soient trois points A, B, C avec A et B distincts. Soit H le projeté orthogonal de C sur (AB) alors :
 $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \vec{AB} \cdot \vec{AH} = AB \times AH$ si même sens ou $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \vec{AB} \cdot \vec{AH} = -AB \times AH$ si sens contraire



5. $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (||\vec{u} + \vec{v}||^2 - ||\vec{u}||^2 - ||\vec{v}||^2)$ $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (||\vec{u}||^2 + ||\vec{v}||^2 - ||\vec{u} - \vec{v}||^2)$

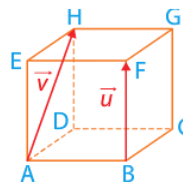
Exemple :

ABCDEFGH est un cube d'arête a .

Notons $\vec{u} = \vec{BF}$ et $\vec{v} = \vec{AH} = \vec{BG}$.

$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{BF} \cdot \vec{AH} = \vec{BF} \cdot \vec{BG} = BF \times BG \times \cos \widehat{FBG}$.

Donc $\vec{u} \cdot \vec{v} = a \times a \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = a^2$.



Propriétés

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace et k un réel, alors :

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$ commutativité
- $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$ $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}$ distributivité
- $(\lambda \vec{u}) \cdot \vec{v} = \lambda(\vec{u} \cdot \vec{v})$ $\vec{u} \cdot (\lambda \vec{v}) = \lambda(\vec{u} \cdot \vec{v})$

Exemple :

ABCDEFGH est un cube d'arête a .

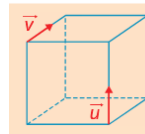
- Comme dans le plan (AGC), C est le projeté orthogonal de G sur (AC) :

$$\vec{AG} \cdot \vec{AC} = \vec{AC} \cdot \vec{AC} = AC^2 = 2a^2.$$

- Pour calculer $\vec{BF} \cdot \vec{AG}$, on peut remplacer le vecteur $\vec{AG}$ par la somme $\vec{AB} + \vec{BG}$:

Définition : Vecteurs orthogonaux

Deux vecteurs non nuls sont orthogonaux s'ils dirigent des droites orthogonales.
Le vecteur nul est orthogonal à tous les vecteurs de l'espace.

**Propriété : orthogonalité vecteurs**

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

Dém :

- Si $\vec{u} = 0$ ou $\vec{v} = 0$ alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ par définition
- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas nuls, considérons les points A, B et C tels que $\vec{AB} = \vec{u}$ et $\vec{AC} = \vec{v}$

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux ssi les droites (AB) et (AC) sont orthogonales

ce qui équivaut à $\widehat{BAC} = \frac{\pi}{2}$ donc $\cos \widehat{BAC} = 0$ donc $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

Expression analytique du produit scalaire

L'espace est muni d'un repère orthonormé (O, I, J, K) .

Soient deux vecteurs $\vec{u}(x; y; z)$ et $\vec{v}(x'; y'; z')$ alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$

En particulier : $\vec{u} \cdot \vec{u} = x^2 + y^2 + z^2$ et $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

Dém :

- Soit $\vec{i} = \vec{OI}$; $\vec{j} = \vec{OJ}$ et $\vec{k} = \vec{OK}$ On a $\vec{i} \cdot \vec{i} = \|\vec{i}\|^2 = 1$, de même pour $\vec{j} \cdot \vec{j} = 1$ et $\vec{k} \cdot \vec{k} = 1$
- Les vecteurs $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ sont deux à deux orthogonaux donc $\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{j} \cdot \vec{k} = 0$
- On sait que $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ et $\vec{v} = x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}$ donc

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) \cdot (x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}) = xx'\vec{i} \cdot \vec{i} + yy'\vec{j} \cdot \vec{j} + zz'\vec{k} \cdot \vec{k} + (xy' + x'y)\vec{i} \cdot \vec{j} + (xz' + x'z)\vec{i} \cdot \vec{k} + (yz' + y'z)\vec{j} \cdot \vec{k}$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$$

II. Vecteur normal

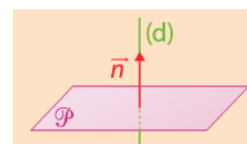
a) Vecteur normal à un plan :

Toutes les droites orthogonales à un même plan sont parallèles entre elles, leurs vecteurs directeurs sont colinéaires.

Définition : Vecteur normal

Un vecteur $\vec{n}$ non nul est dit **orthogonal à un plan** si ce vecteur directeur est un vecteur directeur d'une droite orthogonale à ce plan.

Ce vecteur est appelé **vecteur normal au plan**



Théorème : droite orthogonale à un plan

Une droite (d) est orthogonale à toute droite d'un plan $\mathcal{P}$ si et seulement si elle est orthogonale à deux droites sécantes (d_1) et (d_2) de ce plan.

ROC 7 : Démonstration exigible

Sens direct : Si (d) est orthogonale à toute droite du plan $\mathcal{P}$, elle est en particulier orthogonale à deux droites sécantes (d_1) et (d_2) .

Réciproque : Si $\vec{u}$, $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ sont des vecteurs directeurs des droites (d) , (d_1) et (d_2) .

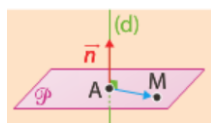
$\vec{u} \cdot \vec{v}_1 = 0$ et $\vec{u} \cdot \vec{v}_2 = 0$ car (d) est orthogonale à (d_1) et (d_2) .

Soit Δ une droite du plan $\mathcal{P}$ et $\vec{w}$ un vecteur directeur de Δ .

Les droites (d_1) et (d_2) sont sécantes donc les vecteurs $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ ne sont pas colinéaires et constituent une base du plan $\mathcal{P}$, il existe donc deux réels x, y tels que $\vec{w} = x\vec{v}_1 + y\vec{v}_2$

On a alors : $\vec{u} \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot (x\vec{v}_1 + y\vec{v}_2) = x\vec{u} \cdot \vec{v}_1 + y\vec{u} \cdot \vec{v}_2 = 0$

On en déduit que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{w}$ sont orthogonaux et donc la droite (d) est orthogonale à la droite Δ .

b) Equation cartésienne d'un plan**Propriété du vecteur normal**

Soit $\vec{n}$ un vecteur non nul et A un point de l'espace.

L'unique plan $\mathcal{P}$ passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$ est l'ensemble des points M tels que :

$$\vec{AM} \cdot \vec{n} = 0$$

Autrement dit, si M est un point du plan $\mathcal{P}$ alors $\vec{AM} \cdot \vec{n} = 0$ et si $\vec{AM} \cdot \vec{n} = 0$ alors M est un point du plan $\mathcal{P}$ passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$.

Dém :

- **Sens direct** : Soit M un point du plan $\mathcal{P}$ passant par A et (d) une droite de vecteur directeur $\vec{n}$.

La droite (AM) est alors une droite du plan $\mathcal{P}$.

Comme (d) est orthogonale à toutes les droites du plan $\mathcal{P}$, elle est orthogonale à (AM) .

On en déduit que $\vec{AM} \cdot \vec{n} = 0$

- **Réciproque** : Soit M un point de l'espace tel que $\vec{AM} \cdot \vec{n} = 0$

Alors soit M est confondu avec A, ou (AM) est orthogonale à la droite (d) passant par A et de vecteur directeur $\vec{n}$, c'est-à-dire que M appartient au plan contenant A et orthogonal à (d) .

Propriété et définition : Équation cartésienne d'un plan

Dans un repère orthonormé, un plan $\mathcal{P}$ de vecteur normal $\vec{n}(a; b; c)$ a une équation de la forme :

$$ax + by + cz + d = 0$$

Cette équation est appelée équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$.

Réciproquement, si a, b, c ne sont pas tous les trois nuls, l'ensemble E des points $M(x; y; z)$ tels que $ax + by + cz + d = 0$ est un plan de vecteur normal $\vec{n}(a; b; c)$

ROC 8 : Démonstration exigible

Sens direct : Soit $A(x_A; y_A; z_A)$ un point du plan $\mathcal{P}$ et $M(x; y; z)$ un point de l'espace.

Alors $\vec{AM}(x - x_A; y - y_A; z - z_A)$ et $\vec{AM} \cdot \vec{n} = a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A)$.

M appartient au plan $\mathcal{P}$ équivaut à $\vec{AM} \cdot \vec{n} = 0$ ssi $a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0$

ssi $ax + by + cz - ax_A - by_A - cz_A = 0$. En posant $d = -ax_A - by_A - cz_A$, on obtient $ax + by + cz + d = 0$

Réciproque : On pose E l'ensemble des points tels que $ax + by + cz + d = 0$.

On sait que a, b, c ne sont pas tous nuls.

On suppose que $a \neq 0$, alors le point $A(-\frac{d}{a}; 0; 0)$ appartient à l'ensemble E.

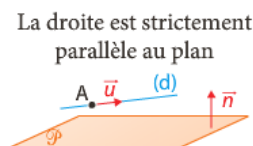
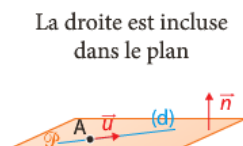
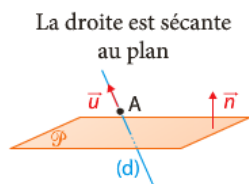
L'équation $ax + by + cz + d = 0$ équivaut à $a(x + \frac{d}{a}) + by + cz = 0$ c'est-à-dire que $\vec{AM} \cdot \vec{n} = 0$ où $\vec{n}(a; b; c)$

Donc E est le plan passant par A et de vecteur normal $\vec{n}(a; b; c)$

III. Intersection de droites et de plans**Intersection d'une droite et d'un plan**

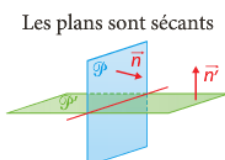
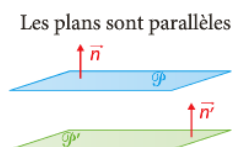
Soit (d) une droite passant par un point A et de vecteur directeur $\vec{u}$ et $\mathcal{P}$ un plan de vecteur normal $\vec{n}$.

- Si $\vec{u}$ et $\vec{n}$ ne sont pas orthogonaux, la droite (d) et le plan $\mathcal{P}$ sont sécants.
- Si $\vec{u}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux :
 - Si A appartient à $\mathcal{P}$ alors la droite (d) est incluse dans le plan $\mathcal{P}$
 - Si A n'appartient pas à $\mathcal{P}$, la droite (d) est strictement parallèle à $\mathcal{P}$

**Intersection de deux plans**

Soient deux plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ de vecteurs normaux respectifs $\vec{n}$ et $\vec{n}'$.

- Si $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ sont colinéaires alors $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont parallèles.
- Si $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ ne sont pas colinéaires alors $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont sécants et leur intersection est une droite.

**Propriété**

On se place dans un repère orthonormé.

- Les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ d'équations respectives $ax + by + cz + d = 0$ et $a'x + b'y + c'z + d' = 0$ sont sécants ssi $(a; b; c)$ et $(a'; b'; c')$ ne sont pas proportionnels.
- Lorsque $(a; b; c)$ et $(a'; b'; c')$ ne sont pas proportionnels, l'ensemble des points de l'espace dont les coordonnées vérifient est une droite.

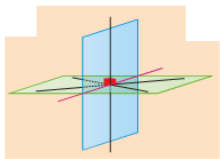
$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$$

Dém :

- Les vecteurs $\vec{n}(a; b; c)$ et $\vec{n}'(a'; b'; c')$ sont des vecteurs normaux des plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$.

Ces plans sont parallèles ssi $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ sont colinéaires ce qui équivaut à $(a; b; c)$ et $(a'; b'; c')$ sont proportionnels.

- Il s'agit de la droite d'intersection des plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$.

Définition : plans perpendiculaires	Propriété
Deux plans sont dits perpendiculaires si l'un des deux plans contient une droite perpendiculaire à l'autre plan. 	Deux plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ de vecteurs normaux $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ sont perpendiculaires ssi les vecteurs $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ sont orthogonaux. 