

PARTIE CHIMIE.

A1) Dessin habituel : cube de côté a , un atome à chaque sommet et au milieu de chaque face.

A2) Le contact se fait selon la diagonale d'une face de cube : $4R_{Al} = a\sqrt{2}$ $4R_{Al} = a\sqrt{2}$.

A3) Un atome au sommet appartient à huit cubes différents, donc en fait compte pour $1/8$ d'atome. Un atome au centre de face appartient à deux cubes différents donc compte pour $1/2$.

Bilan : $8 \cdot (1/8) + 6 \cdot (1/2) = 4$ atomes par maille.

A4) La compacité c est le rapport du volume occupé par les quatre atomes sur le volume de la maille. $c = \frac{4 \cdot \frac{4\pi}{3} R_{Al}^3}{a^3}$ $c = \frac{4 \cdot \frac{4\pi}{3} R_{Al}^3}{a^3}$. Avec la relation obtenue en A2, on obtient : $c = \frac{\pi\sqrt{2}}{6} \approx 0,74$
 $c = \frac{\pi\sqrt{2}}{6} \approx 0,74$.

A5) La masse d'un atome d'Al est $m = M/N_a$. La maille de volume a^3 contient 4 atomes.

La masse volumique est donc : $\rho_{Al} = \frac{4m}{a^3} = \frac{4M}{4\sqrt{2}N_a R_{Al}^3} \approx 2700 \text{ kg.m}^{-3}$
 $\rho_{Al} = \frac{4m}{a^3} = \frac{4M}{4\sqrt{2}N_a R_{Al}^3} \approx 2700 \text{ kg.m}^{-3}$. Ce qui correspond à une densité de 2,7 par rapport à l'eau.

B6) K_s est la constante de solubilité de l'hydroxyde d'aluminium. β est la constante de formation globale du complexe aluminate (à relier à sulfate).

B7) La troisième réaction est la somme des deux premières donc $K = \beta \cdot K_s$.

B8) La solution à doser est dans un bécher, la solution dosante est dans la burette graduée. On assure l'homogénéité de la solution avec un agitateur magnétique. On plonge la double-électrode du pH-mètre dans la solution à doser.

B9) On mesure en fait une différence de potentiel.

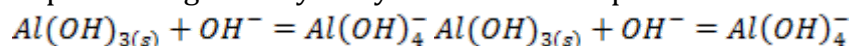
B10)

Etape 1 : dosage de l'acide nitrique, acide fort, selon la réaction $H_3O^+ + OH^- = 2H_2O$
 $H_3O^+ + OH^- = 2H_2O$

On distingue à la fin de l'étape 1 le saut de pH correspondant à l'équivalence.

Etape 2 : dosage de Al^{3+} selon $Al^{3+} + 3OH^- = Al(OH)_{3(s)}$ $Al^{3+} + 3OH^- = Al(OH)_{3(s)}$

Etape 3: dosage de l'hydroxyde d'aluminium pour former l'aluminate selon:



B11) Le volume de soude à verser pour doser Al^{3+} est $(13,8 - 3,7) = 10,1 \text{ mL}$, ce qui correspond à $10,1 \text{ mmol}$ de soude versée, soit $10,1/3 \text{ mmol}$ d'ions Al^{3+} à doser dans un volume de 40 mL . La concentration c est donc $10,1/120 \text{ mol.L}^{-1}$ soit environ : $0,084 \text{ mol.L}^{-1}$.

B12) L'apparition de $Al(OH)_3$ a lieu pour un volume de base ajouté de $3,7 \text{ mL}$ à un pH voisin de 4. A ce moment la concentration en Al^{3+} est d'environ $0,077 \text{ mol.L}^{-1}$ et $[OH^-] \approx 10^{-10} \text{ mol.L}^{-1}$. Ce qui permet d'évaluer $K_s \approx 7,7 \cdot 10^{-32}$ soit $pK_s \approx 31$.

A l'équivalence de l'étape 3, on peut évaluer le pH à 12, et 10,1/3 mmol d'aluminate pour un volume total de 57,2mL. On évalue donc $[OH^-] \approx 10^{-2}M$ et $[Al(OH)_4^-] \approx 59mmol.L^{-1}$. On en déduit $K \approx 5,9$ puis $\beta = K/K_s \approx 8.10^{33}$.

C13) Couple O_2/H_2O : $O_2 + 4e + 4H^+ = 2H_2O$ $E = 1,23 - 0,06pH$

Couple H_2O/H_2 : $2H^+ + 2e = H_2$ $E = 0,0 - 0,06pH$.

C14) Les deux droites précédentes dessinent deux frontières obliques et délimitent trois zones. Du haut vers le bas, on a successivement les zones de prédominances de O_2 , puis H_2O et H_2 .

D15) $no=0$ pour Al ; $no=3$ pour les trois autres espèces. Al^{3+} apparaît comme un acide, $Al(OH)_4^-$ comme une base, et $Al(OH)_3$ comme un amphotère. On peut donc affirmer :

1 : Al^{3+} 2: $Al(OH)_3$ 3: $Al(OH)_4^-$ 4: $Al_{(s)}$.

D16) A la frontière 1|2, on néglige la présence de la forme aluminate, ce qui donne $[Al^{3+}] = 0,01M$. On est à la limite d'apparition de l'hydroxyde donc $K_s = [Al^{3+}] \cdot [OH^-]^3$, ce qui permet de calculer pOH puis d'obtenir $pH_A = 4$. (Calcul exact).

D17) En fait, il y a cinq segments.

Pour les trois segments non verticaux, il suffit d'isoler le couple en question, d'écrire la loi de Nernst et d'isoler l'influence du pH.

Segment le plus à gauche, couple Al^{3+}/Al , pente nulle.

Segment intermédiaire 2|4, couple $Al(OH)_3/Al$,

$Al(OH)_3 + 3e + 3H^+ = Al + 3H_2O$ pente -0,06 V

Dernier segment 3|4, couple $Al(OH)_4^-/Al$,

$Al(OH)_4^- + 3e + 4H^+ = Al + 4H_2O$ pente -0,08V

D18) On reprend le premier segment de la question D17. La loi de Nernst donne :

$$E = -1,71V = E^\circ(Al^{3+}/Al) + 0,02 \cdot \log_{10}([Al^{3+}]) \quad E = -1,71V = E^\circ(Al^{3+}/Al) + 0,02 \cdot \log_{10}([Al^{3+}])$$

avec $[Al^{3+}] = 0,01M$.

$$\text{Soit donc} \quad E^\circ(Al^{3+}/Al) = -1,67V$$

D19) Immunité : on est dans la zone de stabilité de l'aluminium métal, donc dans la zone 4.

Immunité : zone 2, l'eau attaque l'aluminium métal mais l'oxyde solide qui se forme à la surface du métal va le protéger de l'eau.

Corrosion : zones 1 et 3. Les produits de l'attaque de l'aluminium par l'eau sont solubles donc n'isolent pas le métal de l'eau.

D20) L'eau est réduite en dihydrogène et il se forme Al^{3+} en milieu fortement acide. Le bilan est le suivant : $3Al + 6H^+ = 3Al^{3+} + 3H_{2(g)}$.

D21) L'eau de pluie a un pH moyen plus ou moins proche du pH attendu de l'eau pure ($pH=7$). Dans ces conditions, il se forme l'hydroxyde solide qui va protéger le métal (passivation).

E22) La densité des alliages d'aluminium est nettement plus faible que celle des aciers. On a donc des structures plus légères, moins sensibles à la corrosion que les aciers, mais plus chères.

F23) La treizième colonne, et ligne 3, donne la structure externe $3s^2 3p$. On peut maintenant compléter : $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^1$. Quand un atome d'Al aura perdu 3 électrons (no +III), il aura la configuration d'un gaz rare donc très stable.

Dans Al_2O_3 , comme O est le plus électronégatif, son no est -II, ce qui conduit un no = +III pour Al.

F24) Les enthalpies de formations des métaux sont nulles, et on obtient :

$\Delta_r H^\circ(298K) = -1673 + 824 = -849 \text{ kJ.mol}^{-1} < 0$, soit une réaction endothermique. On peut donc envisager, comme dans la question suivante, une augmentation de température du système réactionnel pendant la réaction.

F25) Nous allons directement supposer qu'on obtient les produits à l'état liquide. Il faudra évidemment obtenir une température finale $T_F > 2050^\circ\text{C}$.

Etat initial : 1 mol de Fe_2O_3 et 2 mol d'Aluminium, à 25°C sous 1 bar.

Etat final : 2 mol de fer et 1 mol de Al_2O_3 , sous 1 bar, à l'état liquide à T_F .

L'évolution est adiabatique monobare, on obtient $\Delta H = Q = 0$. On peut maintenant prendre le chemin qu'on veut:

Etape 1 : réaction chimique totale à $T_i = 25^\circ\text{C}$. $\Delta H_1 = \Delta_r H^\circ$

Etape 2 : passage isobare de T_i à T_F , avec changement d'état des deux espèces.

$$\Delta H_2 = \{2C_p(\text{Fe}) + C_p(\text{Al}_2\text{O}_3)\}(T_F - T_i) + 2\Delta H_{\text{fus}}^\circ(\text{Fe}) + \Delta H_{\text{fus}}^\circ(\text{Al}_2\text{O}_3)$$

On a alors $\Delta H_1 + \Delta H_2 = \Delta H = 0$ et on sort ($T_F - T_i$).

$$\text{On obtient : } T_F = T_i - \frac{\Delta_r H^\circ + 2\Delta H_{\text{fus}}^\circ(\text{Fe}) + \Delta H_{\text{fus}}^\circ(\text{Al}_2\text{O}_3)}{2C_p^\circ(\text{Fe}) + C_p^\circ(\text{Al}_2\text{O}_3)} \approx 3250^\circ\text{C} > 2050^\circ\text{C}$$

$$T_F = T_i - \frac{\Delta_r H^\circ + 2\Delta H_{\text{fus}}^\circ(\text{Fe}) + \Delta H_{\text{fus}}^\circ(\text{Al}_2\text{O}_3)}{2C_p^\circ(\text{Fe}) + C_p^\circ(\text{Al}_2\text{O}_3)} \approx 3250^\circ\text{C} > 2050^\circ\text{C}$$

Ensemble cohérent avec les données fournies.

F26) Conduction de la chaleur sur les rails métalliques.

PARTIE PHYSIQUE.

$$\text{G27) } \Delta(U+K) = W + Q.$$

U: énergie interne du système fermé ; K: énergie cinétique associée au mouvement du centre d'inertie ; W: travail des forces extérieures ; Q: chaleur reçue par le système.

G28)a) à l'instant $t+dt$, le système est constitué du fluide contenu dans la partie active, de masse $M(t+dt)$ plus le fluide, de masse dm_2 qui est sorti de cette partie active.

b) On est en régime stationnaire donc $M(t+dt) = M(t)$ et le système est fermé donc $dm_2 = dm_1$. Le débit massique D_m est constant.

G29)

En amont, le travail des forces de pression est $\delta W_1 = P_1 dV_1 = P_1 v_1 dm_1 = P_1 v_1 D_m dt$.

En aval, le travail des forces de pression est $\delta W_2 = -P_2 dV_2 = -P_2 v_2 D_m dt$.

G30) On applique la relation G27 entre t et $t+dt$.

La chaleur reçue est $P_{th} dt$

L'énergie interne et l'énergie cinétique du fluide contenu dans la partie active sont constantes (régime stationnaire), donc:

la variation d'énergie interne est $dm_2 u_2 - dm_1 u_1 = D_m dt(u_2 - u_1)$

la variation d'énergie cinétique $dm_2 e_{c2} - dm_1 e_{c1} = D_m dt(e_{c2} - e_{c1})$

Pour le travail reçu, il faut compter les deux travaux des forces de pression, le travail $P_u dt$, et le travail des forces conservatives extérieures soit donc la diminution d'énergie potentielle $D_m dt(e_{p1} - e_{p2})$, que l'énoncé aurait pu ignorer dès le début.

On obtient la formule demandée avec $x=h$ enthalpie massique du fluide.

G31) Y_m est en $kg.s^{-1}$ soit donc un débit massique. On peut donc proposer $Y_m = D_m$.

H32) L'air est supposé incompressible, le régime stationnaire donc les débits massique et volumique sont constants dans le tube de courant, on a donc $S_A V_A = S_B V_B = SV$.

H33) On applique la théorème de Bernoulli deux fois sur la ligne de courant $x'x$ (en utilisant la symétrie de révolution), une fois en amont entre S_A et Σ_1 , l'autre fois en aval entre S_B et Σ_2

On obtient : $P^0 + \rho V_A^2 / 2 = P_1 + \rho V^2 / 2$ et $P^0 + \rho V_B^2 / 2 = P_2 + \rho V^2 / 2$

H34) a) Projetée sur l'axe Ox , la somme des forces devient : $R_{12} = F + P_1 S - P_2 S$.

b) On applique maintenant (E_2) en projection sur $x'x$: $D_m(V - V) = 0 = R_{12}$.

c) Donc $F = (P_2 - P_1)S$.

d) On reprend H33 et on obtient : $F = \rho S(V_B^2 - V_A^2) / 2$

H35) (E_2) projetée sur $x'x$, devient : $D_m(V_B - V_A) = F + 0$ d'après l'énoncé. On peut rempalcer D_m par $D_m = \rho SV$ et $F = \rho SV(V_B - V_A)$.

H36) La comparaison des deux expressions de F donne (si V_B différent de V_A) : $2V = V_A + V_B$.

H37) Il n'y a aucun transfert thermique de l'extérieur vers le fluide, donc $P_{th} = 0$. Le fluide est un gaz parfait, les forces intérieures sont nulles et donc elles ne travaillent, il n'y aura donc pas de variation de température, donc de variation de l'enthalpie massique.

38) On en déduit maintenant via (E_1) que $P_u = D_m(V_B^2 - V_A^2) / 2 = -P_{éol}$.

En utilisant l'expression $D_m = \rho SV$ et l'expression de V , on obtient :

$$P_{éol} = \frac{\rho S}{2} (V_A + V_B)(V_A^2 - V_B^2) \quad P_{éol} = \frac{\rho S}{2} (V_A + V_B)(V_A^2 - V_B^2)$$

H39) On sort maintenant $P_{éol} = \frac{\rho S V_A^3}{2} (1+x)(1-x^2)$ $P_{éol} = \frac{\rho S V_A^3}{2} (1+x)(1-x^2)$ qui atteint son maximum pour $x=1/3$.

On calcule $P_{max} = \frac{16}{27} \rho S V_A^3$ $P_{max} = \frac{16}{27} \rho S V_A^3$.

H40) On peut évaluer $P_{max} \approx 2,8 \text{ MW}$. Il faudra donc 550 éoliennes de ce type pour remplacer une tranche de centrale nucléaire.

I41) $\vec{j} \vec{j}$ est en $A.m^{-2}$ et γ en $\Omega^{-1}.m^{-1}$.

$$\begin{aligned} \text{I42)} \quad \text{div}(\vec{B}) &= 0 \quad \text{div}(\vec{B}) = 0 \quad \text{div}(\vec{E}) = 0 \quad \text{div}(\vec{E}) = 0 \quad \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{E}) &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{B}) = \mu_o \left(\gamma \vec{E} + \epsilon_o \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{B}) = \mu_o \left(\gamma \vec{E} + \epsilon_o \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \end{aligned}$$

I43) Le rapport des normes vaut typiquement : $\frac{j_D}{j} \approx \frac{\epsilon_o \omega}{\gamma} \approx 10^{-16} \ll 1$ $\frac{j_D}{j} \approx \frac{\epsilon_o \omega}{\gamma} \approx 10^{-16} \ll 1$ à 50Hz.

I44) On utilise la formule habituelle rotrot...

On obtient une équation de diffusion, qu'on a vu dans le cadre de la conduction de la chaleur ou la diffusion de la matière.

I45)a) En utilisant le formulaire et en reportant la forme proposée dans l'équation précédente, il sort : $\underline{j}''(x) = i\omega\mu_o\gamma\underline{j}(x) = \exp^{i\pi/2}\omega\mu_o\gamma\underline{j}(x) = (\pm\exp^{i\pi/4}\omega\mu_o\gamma)^2\underline{j}(x)$
 $\underline{j}''(x) = i\omega\mu_o\gamma\underline{j}(x) = \exp^{i\pi/2}\omega\mu_o\gamma\underline{j}(x) = (\pm\exp^{i\pi/4}\omega\mu_o\gamma)^2\underline{j}(x)$

b) On cherche des solutions en $\exp(rx)$ ce qui donne 2 solutions $r_{\pm} = \pm \frac{1+i}{\delta} r_{\pm} = \pm \frac{1+i}{\delta}$ avec $\delta = \sqrt{\frac{\omega\mu_o\gamma}{2}}$ $\delta = \sqrt{\frac{\omega\mu_o\gamma}{2}}$.

La solution générale s'écrit $\underline{j}(x) = \underline{A} \cdot \exp(r_+ \cdot x) + \underline{B} \cdot \exp(r_- \cdot x)$ $\underline{j}(x) = \underline{A} \cdot \exp(r_+ \cdot x) + \underline{B} \cdot \exp(r_- \cdot x)$
 puis $\underline{j}(M, t) = \underline{A} \cdot \exp(i\omega t + r_+ \cdot x) + \underline{B} \cdot \exp(i\omega t + r_- \cdot x)$
 $\underline{j}(M, t) = \underline{A} \cdot \exp(i\omega t + r_+ \cdot x) + \underline{B} \cdot \exp(i\omega t + r_- \cdot x)$

I46) La première exponentielle diverge quand x tend vers $+\infty$. On doit avoir $\underline{A}=0$. La condition aux limites en $x=0$ permet alors d'obtenir $\underline{B}=j(0)$.

On obtient $j(x, t) = j(0) \cdot e^{-x/\delta} \cdot \cos(\omega t - x/\delta)$

I47)a) $\delta \approx 13\text{cm}$.

b) On trouve un rayon d'environ 26cm. Pour un tel rayon, l'effet de peau commence à se faire sentir et on ne peut plus supposer la densité de courant uniforme et le calcul effectué n'est pas valide. Il faudra en fait un rayon supérieur.

c) On place donc en parallèle plusieurs câbles de rayon suffisamment faible pour que l'effet de peau soit négligeable.

J48) RI_e^2 représente la puissance dissipée par effet Joule, elle est localisée dans le câble. $LI_e^2/2$ représente l'énergie magnétique stockée dans l'inductance, celle-ci est localisée dans l'espace tout entier.

J49) C est un coupe-circuit en BF, un court-circuit en HF. L'inverse pour L. On a ici un filtre passe-bas.

J50) A l'aide d'un PDT, on obtient : $\underline{H} = \frac{1}{1-LC\omega^2+iRC\omega} \underline{H} = \frac{1}{1-LC\omega^2+iRC\omega}$.

J51) Pour l'amplitude, il n'y a aucun pb et : $V_{sm} = \frac{V_{sm}}{\sqrt{(1-LC\omega^2)^2+(RC\omega)^2}} V_{sm} = \frac{V_{sm}}{\sqrt{(1-LC\omega^2)^2+(RC\omega)^2}}$.

Pour la phase, c'est un peu plus compliqué : $\varphi = -\arg(1-LC\omega^2+iRC\omega)$
 $\varphi = -\arg(1-LC\omega^2+iRC\omega)$.

J52)a) $\frac{V_{sm}}{V_{em}} = \frac{1}{\sqrt{(1-lc\omega^2 d^2)^2+(cr\omega d)^2}} \frac{V_{sm}}{V_{em}} = \frac{1}{\sqrt{(1-lc\omega^2 d^2)^2+(cr\omega d)^2}}$

b) Ce rapport considéré comme une fonction de d est maximal pour $d_{critique} = \frac{1}{\sqrt{lc\omega}} \approx 822\text{km}$. $d_{critique} = \frac{1}{\sqrt{lc\omega}} \approx 822\text{km}$. On a une très belle résonance autour de cette valeur.

c) Pour 400km, le rapport vaut environ 1,31.

K53)a) La loi des noeuds donne à la limite $dz \rightarrow 0$, $\frac{\partial I}{\partial z} = -C \frac{\partial V}{\partial t} \frac{\partial I}{\partial z} = -C \frac{\partial V}{\partial t}$.

La caractéristique de la bobine donne : $\frac{\partial V}{\partial z} = -L \frac{\partial I}{\partial t} \frac{\partial V}{\partial z} = -L \frac{\partial I}{\partial t}$.

b) Par découplage avec Schwartz, on obtient une équation d'onde pour les deux grandeurs avec une vitesse de propagation : $v_\phi = \frac{1}{\sqrt{LC}} v_\phi = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

K54)a) Il s'agit ici d'une onde stationnaire.

b) On a tout simplement $k = \omega / v_\phi$.

c) En $z=0$, on a $V(0,t) = V_{em} \cos(\omega t)$ ce qui donne $a = V_{em}$.

En $z=L$, on $I(L,t)=0$ et on doit d'abord obtenir $I(z,t)$ en intégrant une des équations de la question K53.

On obtient : $I(z,t) = \frac{k}{\omega L} \{a \cdot \sin(kz) - b \cdot \cos(kz)\} \sin(\omega t)$
 $I(z,t) = \frac{k}{\omega L} \{a \cdot \sin(kz) - b \cdot \cos(kz)\} \sin(\omega t)$ et on sort $b = a \cdot \tan(kL) = V_{em} \cdot \tan(kL)$

K55)a) $\lambda = v_\phi \cdot T = 5160 \text{ km}$.

b) Pour L proche de $\lambda/4$, kL est proche de $\pi/2$ ce qui entraîne une divergence de b , et donc une augmentation très importante de l'amplitude de la tension sur la ligne.

Pour la ligne proposée, on calcule $b = -4 \cdot V_{em}$.

A 200 km du bout de la ligne, l'amplitude de la tension d'alimentation est 4 fois plus élevée qu'attendue.