



COMISSIÓ GESTORA DE LES PROVES D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT
 COMISIÓN GESTORA DE LAS PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD



PROVES D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT		PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD	
CONVOCATÒRIA:	JUNY 2023	CONVOCATORIA:	JUNIO 2023
Assignatura: MATEMÀTIQUES II		Asignatura: MATEMÁTICAS II	

BAREMO DEL EXAMEN:

El alumnado contestará solo CUATRO problemas entre los OCHO propuestos.

Cada problema se puntuará hasta 10 puntos.

La calificación del ejercicio será la suma de las calificaciones de cada problema dividida entre 4 y aproximada a las centésimas.

Se permite el uso de calculadoras siempre que no sean graficas o programables, y que no puedan realizar cálculo simbólico ni almacenar texto o fórmulas en memoria. Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos, numéricos y gráficos deberán estar siempre debidamente justificados.

En las respuestas se deben escribir todos los pasos del razonamiento utilizado.

Problema 1.- Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & m & 1 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} m & 0 & 9 \end{pmatrix}$

- a) Estudiar cuándo la ecuación matricial $A^2X = B$ tiene solución en función del parámetro real m . (4 puntos)
- b) Encontrar todas las soluciones de la ecuación anterior cuando éstas existan. (6 puntos)

Resolución

$C = A^2 = AA = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & m & 1 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & m & 1 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2m & + & 2 & 2 & 0 & m^2 & + & 3 & m & 0 & 3m & 3 \end{pmatrix}$, queda la ecuación $CX = B$

$\det C = 3m^2 + 9 - 3m^2 = 9 \neq 0$. Luego, existe C^{-1} . Multiplicando por C^{-1} , por la izquierda se tiene

$$C^{-1}CX = IX = X = C^{-1}B = \frac{1}{\det C}(\text{adj } C)^t B = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 & -6 & 3 & -3m & 2m & -6 & -m & m^2 & + & 3 \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} m & 0 & 9 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 9 & -6 & 2m & -6 & 0 & 3 & -m & 0 & -3m & m^2 & + & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m & 0 & 9 \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 27m & -54 & -9m & 9m^2 & + & 27 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3m & -6 & -$$

Problema 2.- Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & -\alpha^2 & 0 \end{pmatrix}$

- a) Obtener la matriz $(AB^t + I)^{-1}$, donde I es la matriz identidad de las dimensiones adecuadas para realizar la operación. (6 puntos)

Resolución

Como $A_{2 \times 3}$, $B_{3 \times 2}^t$ entonces $(AB^t)_{2 \times 2}$, entonces $I_{2 \times 2}$

$$D = AB^t + I = (1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1)(1 \ 2 \ 1 \ -1 \ 1 \ 0) + (1 \ 0 \ 0 \ 1) = (2 \ 2 \ 2 \ -1) + (1 \ 0 \ 0 \ 1) = (3 \ 2 \ 2 \ 0); \det D = -4 \neq 0, \text{ existe } D^{-1}.$$

$$D^{-1} = \frac{1}{\det D} (\text{adj } D)^t = \frac{1}{-4} (0 \ -2 \ -2 \ 3)^t = \frac{-1}{4} (0 \ -2 \ -2 \ 3) = \left(0 \ \frac{1}{2} \ \frac{1}{2} \ \frac{-3}{4}\right)$$

b) Comprobar que $C^2 = -\alpha^3 I$, donde I es la matriz identidad, y calcular C^{13} . (4 puntos)

Resolución

$$C^2 = (0 \ \alpha \ -\alpha^2 \ 0)(0 \ \alpha \ -\alpha^2 \ 0) = \alpha(0 \ 1 \ -\alpha \ 0)\alpha(0 \ 1 \ -\alpha \ 0) = \alpha^2(-\alpha \ 0 \ 0 \ -\alpha) = -\alpha^3(1 \ 0 \ 0 \ 1) = -\alpha^3 I$$

$$C^{13} = (C^2)^6 C = (-\alpha^3 I)^6 C = \alpha^{18} C = \alpha^{18} \alpha(0 \ 1 \ -\alpha \ 0) = \alpha^{19}(0 \ 1 \ -\alpha \ 0) = (0 \ \alpha^{19} \ -\alpha^{20} \ 0)$$

Problema 3.- Dada la recta $r: \{x - y = 1 \ x + 2y + z = 0\}$ y los puntos $P(0, 0, 3)$ y $Q(2, 2, a)$, obtener:
a) Los valores del parámetro real a , si existen, para los que son paralelas la recta r y la recta que pasa por los puntos P y Q . (6 puntos)

Resolución

Un vector director de r se obtiene como producto vectorial de los vectores normales de los planos que la definen: $\vec{d}_r = (1, -1, 0) \times (1, 2, 1) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (-1, -1, 3) // (1, 1, -3)$.

Si s es la recta que pasa por P y Q , entonces un vector director de s es $\vec{d}_s = \vec{PQ} = (2, 2, a - 3)$

Observamos que $P(0, 0, 3) \in s$, pero $P \notin r$, porque no cumple sus ecuaciones:

$$\{0 - 0 = 0 \neq 1 \ 0 + 2 \cdot 0 + 3 = 3 \neq 0$$

Luego r y s no pueden ser coincidentes.

Por tanto, $r // s \Leftrightarrow \vec{d}_r // \vec{d}_s \Leftrightarrow \frac{2}{1} = \frac{2}{1} = \frac{a-3}{-3}$. Despejando, $a - 3 = -6$, de donde $a = -3$.

Conclusión: son paralelas para $a = -3$

b) La ecuación del plano perpendicular a r y que pasa por P . (4 puntos)

Resolución

Un vector normal $\vec{n}$ del plano π que se pide es el vector director de r : $\vec{n} = \vec{d}_r = (1, 1, -3)$

Y como π pasa por $P(0, 0, 3)$, entonces $\pi: 1(x - 0) + 1(y - 0) - 3(z - 3) = 0 \Rightarrow \pi: x + y - 3z + 9 = 0$

Problema 4.- Dada la recta $r: \{5x + y + 7z = 16 \ 9x - y + 7z = 12\}$ y el punto $P(0, 5, 2)$ se pide:

a) Comprobar que el punto $Q(2, 6, 0)$ pertenece a la recta r y encontrar la recta s que pasa por los puntos P y Q . (2 puntos)

Resolución

$Q(2, 6, 0) \in r$ porque cumple sus ecuaciones: $\{5 \cdot 2 + 6 + 7 \cdot 0 = 16 \ 9 \cdot 2 - 6 + 7 \cdot 0 = 12$

Un vector director de s es $\vec{d}_s = \vec{PQ} = (2, 1, -2)$ y como s pasa por $P(0, 5, 2)$, entonces
 $s: \{x = 2k \ y = 5 + k \ z = 2 - 2k\}$

b) Obtener el ángulo que forman la recta r y la recta s. (3 puntos)

Resolución

Un vector director de r se obtiene como producto vectorial de los vectores normales de los planos que la definen: $\vec{d}_r = (5, 1, 7) \times (9, -1, 7) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 5 & 1 & 7 \\ 9 & -1 & 7 \end{vmatrix} = (14, 28, -14) // (1, 2, -1)$;

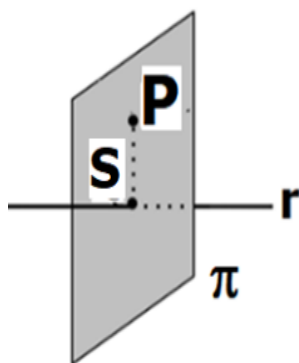
Sabemos que $\vec{d}_s = (2, 1, -2)$

Si α es el ángulo que forman r y s, sabemos que $\vec{d}_r \cdot \vec{d}_s = |\vec{d}_r| \cdot |\vec{d}_s| \cdot \cos \alpha$

$$\cos \alpha = \frac{\vec{d}_r \cdot \vec{d}_s}{|\vec{d}_r| \cdot |\vec{d}_s|} = \frac{2 + 2 + 2}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2}} = \frac{6}{3\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{6}}{6} = \frac{\sqrt{6}}{3}; \alpha = \arccos\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right) \cong 35.26^\circ$$

c) Obtener la proyección ortogonal del punto P en la recta r. (5 puntos)

Resolución



Sea S la proyección de P sobre r. Sabemos que $Q(2, 6, 0) \in r$ y $\vec{d}_r = (1, 2, -1)$, entonces
 $r: \{x = 2 + k \ y = 6 + 2k \ z = -k\}$

Un vector normal $\vec{n}$ del plano π es el vector director de r: $\vec{n} = \vec{d}_r = (1, 2, -1)$

Y como π pasa por $P(0, 5, 2)$, $\pi: 1(x - 0) + 2(y - 5) - 1(z - 2) = 0 \Rightarrow \pi: x + 2y - z - 8 = 0$

Hallamos la proyección ortogonal S, punto de corte de r y π , resolviendo el sistema formado por las ecuaciones de ambos: $2 + k + 2(6 + 2k) - (-k) - 8 = 0 \Rightarrow 6k + 6 = 0, k = -1$. Luego, $S(1, 4, 1)$

Problema 5.- Considerar la función $f(x) = \frac{1}{x} + \ln(x + 1)$. Obtener:

a) El dominio y las asíntotas de $f(x)$. (2 puntos)

Resolución

La fracción no está definida para $x = 0$ y el $\ln$ sólo está definido cuando el argumento es positivo, es decir, $x + 1 > 0 \Leftrightarrow x > -1$. Luego, el dominio es $\text{Dom } f = (-1, +\infty) - \{0\}$

$f(x) = \frac{1}{0} + \ln(0 + 1) = \frac{1}{0} = \pm\infty$. Luego, f tiene una asíntota vertical en $x = 0$ cuya ecuación es A.V.: $x = 0$ (eje Y). Además, $f(x) = \frac{1}{0^-} = -\infty$ y $f(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty$

$f(x) = \frac{1}{-1} + \ln \ln(-1 + 1) = -1 + (-\infty) = -\infty$. Luego, f tiene una asíntota vertical en $x = -1$ cuya ecuación es A.V.: $x = -1$

Estudiemos las asíntotas en $+\infty$:

$$f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{x} + \ln \ln(x + 1) \right] = \frac{1}{+\infty} + \ln \ln(+\infty + 1) = +\infty.$$

Luego, f tiene o no tiene asíntota horizontal en $+\infty$.

Veamos si tiene asíntota oblicua, AO: $y = mx + n$

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{1 + x \ln \ln(x + 1)}{x^2} = \frac{+\infty}{+\infty} \text{ Indeterminación.}$$

Regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{[1 + x \ln \ln(x + 1)]'}{(x^2)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \ln(x + 1) + \frac{x}{x+1}}{2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \ln(x + 1) + 1 - \frac{1}{x+1}}{2x} = \frac{+\infty}{+\infty} \text{ Indeterm.}$$

$$\text{Otra vez L'Hôpital: } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{[\ln \ln(x + 1) + 1 - \frac{1}{x+1}]'}{(2x)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2}}{2} = 0. \text{ Por L'Hôpital, } m = 0$$

$$[f(x) - mx] = \left[\frac{1}{x} + \ln \ln(x + 1) \right] = +\infty. \text{ Luego, tampoco hay asíntota oblicua en } +\infty$$

b) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$ y sus máximos y mínimos. (4 puntos)

c) El área comprendida entre la curva $y = f(x)$ y las rectas $y = 0$, $x = 1$ y $x = 2$. (4 puntos)

Resolución

Sabemos que $f(x) = \frac{1}{x} + \ln(x + 1)$, para $x \in (-1, +\infty) - \{0\}$ con A.V.: $x = 0$ (eje Y) y A.V.: $x = -1$

con $f(x) = -\infty$, $f(x) = -\infty$, $f(x) = +\infty$ y $f(x) = +\infty$.

$$f'(x) = \frac{-1}{x^2} + \frac{1}{x+1} = 0 \Leftrightarrow \frac{-1}{x^2} = -\frac{1}{x+1} \Leftrightarrow x^2 = x + 1 \Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0; x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \Rightarrow x = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \cong -0,62 \text{ y } x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \cong 1,62$$

Hagamos una tabla de signos de $f'(x)$:

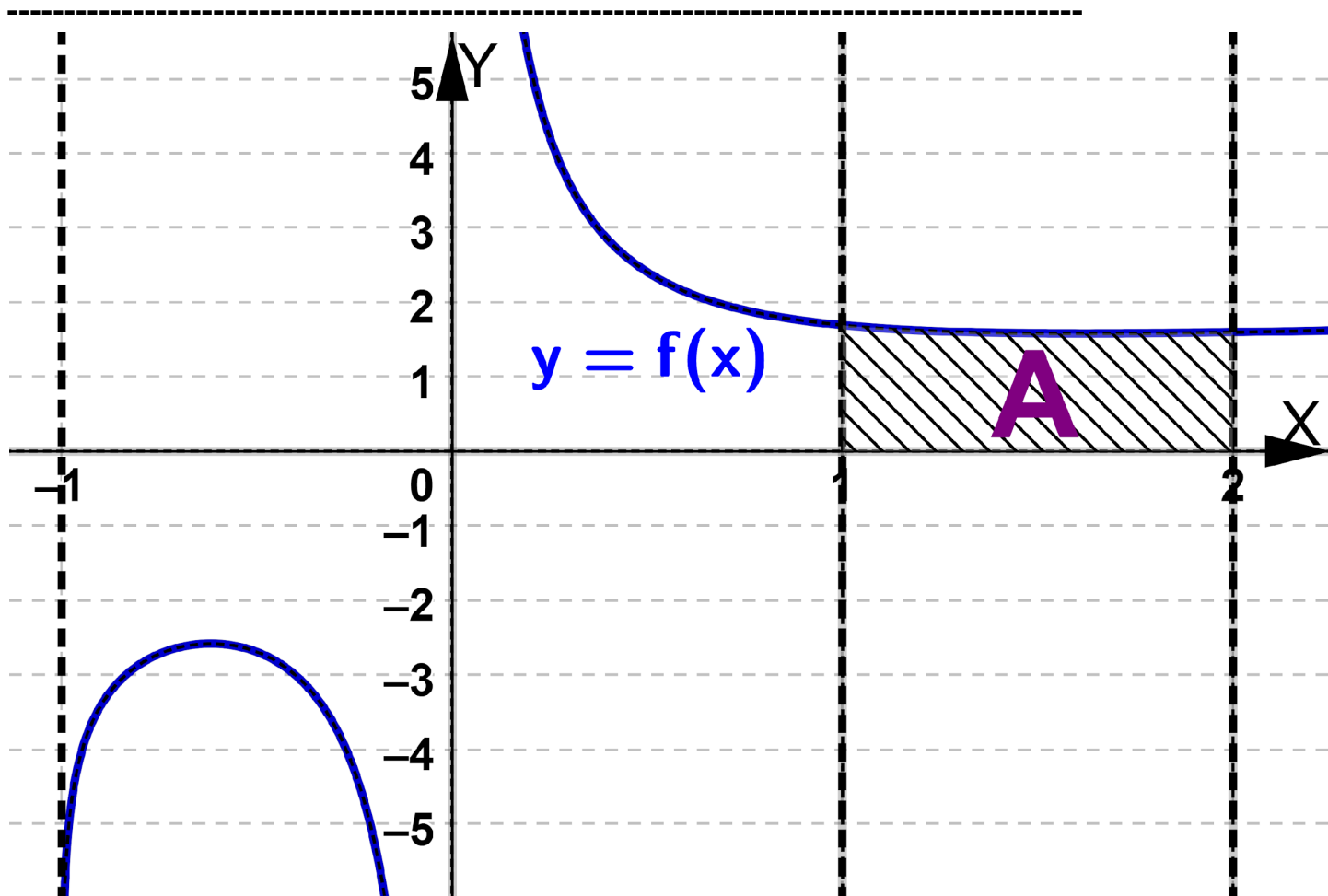
	$(-1; -0,62)$	$-0,62$	$(-0,62; 0)$	0	$(0; 1,62)$	$1,62$	$(1,62; +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	$\nexists$	-	0	+
$f(x)$	creciente	máximo	decreciente	$\nexists$	decreciente	mínimo	creciente

f es creciente en $\left(-1, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, +\infty\right)$ y decreciente en $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) - \{0\}$

$$\text{Máximo relativo: } x = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \cong -0,62, \quad y \cong f(-0,62) = \frac{1}{-0,62} + \ln \ln(-0,62 + 1) \cong -2,58.$$

$$\text{Mínimo relativo: } x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \cong 1,62, \quad y \cong f(1,62) = \frac{1}{1,62} + \ln \ln(1,62 + 1) \cong 1,58.$$

Además, la recta $y = 0$ es el eje X y las rectas $x = 1$, $x = 2$ son las verticales por 1 y 2, respectivamente. Teniendo en cuenta todo lo anterior, un esbozo del recinto cuya área se pide es



El área que se pide es $A = \int_1^2 \left[\frac{1}{x} + \ln \ln(x+1) \right] dx = \int_1^2 \frac{1}{x} dx + \int_1^2 \ln \ln(x+1) dx$.

Una primitiva de $\frac{1}{x}$ es $\ln|x|$. Para hallar una primitiva de $\ln(x+1)$ vamos a usar la integración por partes

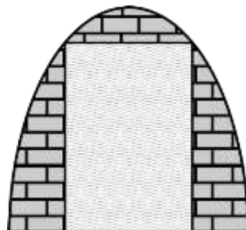
$$\begin{aligned} \left[u = \ln \ln(x+1) \quad \frac{1}{x+1} dx \quad dv = dx \quad v = x \right] &\Rightarrow \int \ln \ln(x+1) dx = (x+1) - \int \frac{x}{x+1} dx = \\ &= (x+1) - \int \frac{x+1-1}{x+1} dx = (x+1) - \int 1 dx + \int \frac{1}{x+1} dx \end{aligned}$$

Una primitiva de $f(x)$ es $F(x) = \ln \ln|x| + (x+1) - x + \ln|x+1|$. Por la regla de Barrow,

$$A = F(2) - F(1) = \ln \ln|2| + (2+1) - 2 + \ln|2+1| - [\ln \ln|1| + (1+1) - 1 + \ln|1+1|]$$

$$A = 3 \ln \ln 3 - \ln \ln 2 - 1 = 1,603 u^2$$

Problema 6.- El corte vertical de la entrada a la plaza amurallada de cierto pueblo tiene forma de parábola con ecuación $y = -x^2 + 12$, donde x e y se miden en metros e $y = 0$ representa el suelo. Se desea poner una puerta rectangular de modo que las dos esquinas superiores estén en la parábola y las inferiores en el suelo. El resto de la entrada va cerrado con piedra.



Calcular:

- Las dimensiones de la puerta para que tenga la mayor superficie posible. (6 puntos)
- Utilizando la puerta del apartado anterior, obtener el área de la parte frontal de la puerta y el área de la parte frontal de la entrada recubierta por piedra. (4 puntos)

Resolución

La base de la entrada es $2x$ y la altura es $12 - x^2$.

Función a maximizar: $\text{superficie} = f(x) = 2x(12 - x^2) = 24x - 2x^3$

$f'(x) = 24 - 6x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$, porque $x > 0$; $f''(x) = -12x$; $f''(2) < 0$ (máximo para $x = 2$)

En este caso, $y = 12 - 2^2 = 8$. Por tanto, las dimensiones de la puerta son 4 m de ancho y 8 m de alto

El área de la parte frontal de la puerta sería entonces, $4 \cdot 8 = 32 \text{ m}^2$.

El área de la parte frontal de la entrada recubierta por piedra se puede obtener restando al área, A , del recinto comprendida entre la parábola y el eje X el área de la puerta.

Como $y = -x^2 + 12 = 0 \Leftrightarrow x = \pm \sqrt{12}$, la parábola corta al eje X en $-\sqrt{12}$ y $\sqrt{12}$

Luego, por simetría esta segunda área vale $A = 2 \int_0^{\sqrt{12}} (12 - x^2) dx - 32 = \int_0^{\sqrt{12}} (24 - 2x^2) dx - 32$.

Una primitiva del integrando es $p(x) = 24x - \frac{2x^3}{3} = \frac{72x - 2x^3}{3}$. Por la regla de Barrow,

$$A = p(\sqrt{12}) - p(0) - 32 = \frac{72\sqrt{12} - 2(\sqrt{12})^3}{3} - \frac{72 \cdot 0 - 2 \cdot 0^3}{3} - 32 = \frac{48\sqrt{12}}{3} - 32 = 32\sqrt{3} - 32 \cong 23,43 \text{ u}^2$$

Problema 7.- Tenemos dos monedas distintas M_1 y M_2 . La probabilidad de obtener cara al lanzar la moneda M_1 es x y la probabilidad de obtener cara al lanzar la moneda M_2 es y .

- Si lanzamos las dos monedas al mismo tiempo, calcular las probabilidades de no obtener ninguna cara, de obtener solo una cara y de obtener dos caras. (3 puntos)

Resolución

Sean $C_1 =$ obtener cara al lanzar M_1 , $p(C_1) = x$, $X_1 =$ obtener cruz al lanzar M_1 , $p(X_1) = 1 - x$

$C_2 =$ obtener cara al lanzar M_2 , $p(C_2) = y$, $X_2 =$ obtener cruz al lanzar M_2 , $p(X_2) = 1 - y$

$$p(\text{ninguna cara}) = p(X_1 X_2) = (1 - x)(1 - y)$$

$$p(\text{sólo una cara}) = p(C_1 X_2) + p(X_1 C_2) = x(1 - y) + (1 - x)y = x + y - 2xy$$

$$p(\text{dos caras}) = p(C_1 C_2) = xy$$

b) Después de lanzar las dos monedas, volvemos a lanzar solamente las monedas en las que no hemos obtenido cara. Calcular las probabilidades de que el resultado final haya sido obtener ninguna cara, obtener solo una cara y obtener dos caras. (7 puntos)

Resolución

$C_3 = \text{obtener cara al lanzar la 2ª vez } M_1, p(C_3) = x$, $X_3 = \text{obtener cruz al lanzar la 2ª vez } M_1, p(X_3) = 1 - x$

$C_4 = \text{obtener cara al lanzar la 2ª vez } M_2, p(C_4) = y$, $X_4 = \text{obtener cruz al lanzar la 2ª vez } M_2, p(X_4) = 1 - y$

$$p(\text{ninguna cara}) = p(X_1 X_2 X_3 X_4) = (1 - x)^2 (1 - y)^2.$$

$$p(\text{sólo una cara}) = p(X_1 X_2 C_3 X_4) + p(X_1 X_2 X_3 C_4) = (1 - x)(1 - y)x(1 - y) + (1 - x)(1 - y)(1 - x)y = (1 - x)(1 - y)(x - xy + y - xy) = (1 - x)(1 - y)(x + y - 2xy)$$

$$p(\text{dos caras}) = p(X_1 X_2 C_3 C_4) = (1 - x)(1 - y)xy$$

Problema 8.- Cada fin de semana llegan al aeropuerto de Alicante 161 vuelos. De estos 161 vuelos, 95 proceden del territorio nacional, 50 proceden de la Unión Europea y 16 proceden de países de fuera de la Unión Europea. Sabiendo que el 5% de los vuelos con procedencia nacional, el 4% de los vuelos con procedencia de la Unión Europea y el 6,25% del resto de vuelos se retrasan:

a) Calcular la probabilidad de que durante el fin de semana un vuelo se retrase. (5 puntos)

b) Sabiendo que un vuelo concreto se ha retrasado, calcular la probabilidad de que este vuelo proceda de la Unión Europea. (5 puntos)

Los resultados han de expresarse en forma de fracción o en forma decimal con cuatro decimales de aproximación

Resolución

$A = \text{el vuelo procede del territorio nacional}$ $B = \text{el vuelo procede de la Unión Europea}$

$C = \text{el vuelo procede de fuera de la Unión Europea}$ $R = \text{el vuelo se retrasa}$

Elaboramos la siguiente tabla de contingencia:

	A	B	C	Total
R	5% de 95 = 4,75	4% de 50 = 2	6,25% de 16 = 1	7,75
R^c	95 - 4,75 = 90,25	50 - 2 = 48	16 - 1 = 15	153,25
Total	95	50	16	161

a) Se pide $p(R) = \frac{7,75}{161} \cong 0,0481 = 4,81\%$

b) Se pide $p\left(\frac{B}{R}\right) = \frac{p(B \cap R)}{p(R)} = \frac{2/161}{7,75/161} = \frac{2}{7,75} \cong 0,2581 = 25,81\%$