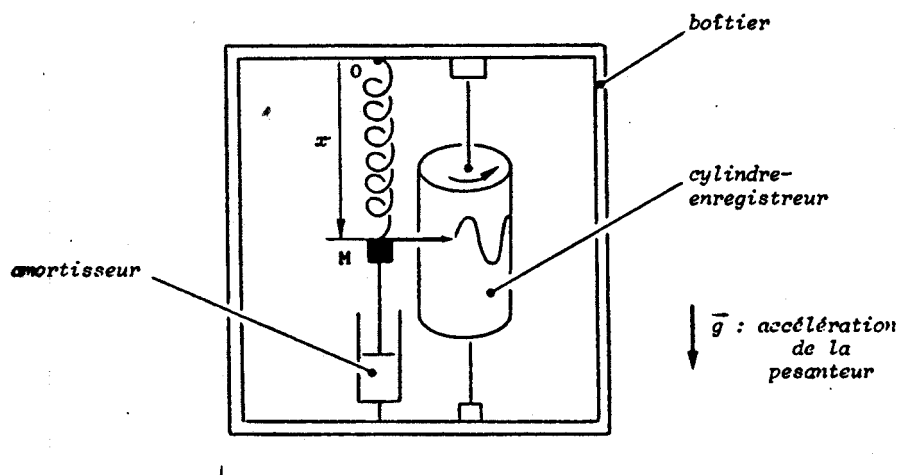


Étude d'un vibrographe

Soit le vibrographe schématisé ci-dessous :



Le point matériel pesant M de masse m, est suspendu au boîtier par l'intermédiaire d'un ressort de longueur à vide l_0 et de raideur k. Ce point M ne peut se mouvoir que verticalement.

On note x l'abscisse de M le long d'un axe vertical descendant dont l'origine O appartient au boîtier.

Un amortisseur exerce sur le point M une force de frottement $\vec{F}$ égale à : $\vec{F} = -f \vec{v}$, f étant une constante positive et $\vec{v}$ la vitesse de M par rapport au boîtier.

Un cylindre permet d'enregistrer les variations de x en fonction du temps t.

A- OSCILLATIONS LIBRES AMORTIES

Le boîtier est initialement fixe par rapport à un référentiel galiléen.

A-1. Déterminer l'abscisse x_e correspondant à la position d'équilibre du point M.

A-2.a. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par x (fonction du temps t) lorsque le point M est en mouvement.

A-2.b. On pose : $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$; $Q = \frac{m\omega_0}{f}$; $X = x - x_e$.

Déterminer l'équation différentielle vérifiée par X, les coefficients de cette équation différentielle dépendant seulement de ω_0 et de Q.

A-3. On donne : $\omega_0 = 1,80 \text{ rad.s}^{-1}$; $Q = \frac{1}{2}$.

Les conditions initiales sont : pour $t = 0$, $X = 0$ et $\frac{dX}{dt} = V_0$ ($V_0 > 0$).

A-3.a. Déterminer X en fonction de t.

A-3.b. Calculer l'instant t_1 pour lequel X passe par un maximum.

B- OSCILLATIONS FORCÉES

Q n'est plus égal à $\frac{1}{2}$.

Le boîtier du vibrographe est maintenant fixé sur une machine-outil animée, par rapport à un référentiel (R) galiléen, d'un mouvement de translation rectiligne (suivant la verticale), sinusoïdal, défini par : $z = z_m \cos \omega t$, z_m étant une constante et ω la pulsation.

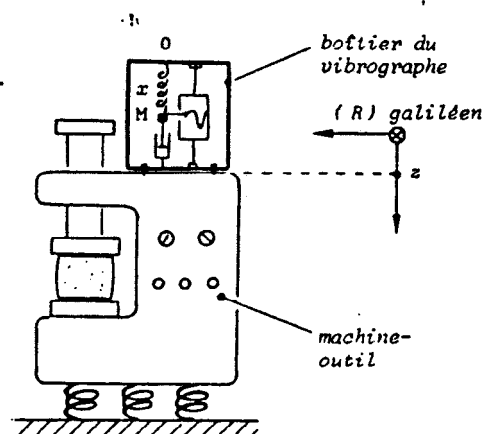


Figure dans un plan vertical

B-1.a. En raisonnant par rapport à un référentiel lié au boîtier du vibrographe, déterminer l'équation différentielle vérifiée par z fonction de t .

B-1.b. Montrer que cette équation différentielle se met sous la forme suivante (ω_0 , Q et X ayant été définis

$$\frac{d^2 X}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dX}{dt} + \omega_0^2 X = z_m \omega^2 \cos \omega t$$

précédemment) :

B-2.a. Déterminer quelle est, en régime forcé, l'amplitude X_m (des oscillations du point M par rapport au boîtier),

$$u = \frac{\omega}{\omega_0}$$

en fonction de Q , z_m et

B-2.b. Montrer que, lorsque u varie, X_m ne passe par un maximum que si Q est supérieur à une certaine valeur que l'on déterminera.

B-2.c. Cette condition étant remplie, déterminer la valeur maximale $X_{\max}$ de X_m .

B-3. Tracer la courbe représentant le rapport $\frac{X_m}{z_m}$ en fonction de u pour $Q = 0,7$ puis pour $Q = 4$.

B-4. En régime forcé, on appelle φ le retard de phase des oscillations du point M (relativement au boîtier) par rapport aux oscillations de la machine-outil (relativement au référentiel (R) galiléen).

B-4.a. Déterminer $\cos \varphi$ et $\tan \varphi$ en fonction de u et de Q .

B-4.b. Montrer que, si la pulsation ω est beaucoup plus grande que ω_0 , alors le point M est quasiment fixe par rapport au référentiel (R) galiléen.