



Universitat
de les Illes Balears

Proves d'accés
a la Universitat

Matemàtiques Aplicades a las Ciencias Sociales II

Modelo 2

No se permite el uso de calculadoras gráficas ni programables, ni de dispositivos que puedan transmitir o almacenar información. Se pueden usar reglas y bolígrafos de colores (excepto rojo y verde)

Parte A. Conteste el problema A1 y conteste también un problema a escoger entre el problema A2 y el problema A3. (total 4 pt)

Problema A1 (obligatorio) En la lotería de Navidad el número ganador del Gordo es un único número de 5 cifras. Todos los números tienen la misma probabilidad de resultar ganadores.

Considera los siguientes sucesos:

A: el número ganador en la Navidad de 2025 será el 00000

B: el número ganador en la Navidad de 2025 será el 72480.

C: el número ganador en la Navidad de 2026 será el 72480

a) Expresa, con tus propias palabras, qué quieren decir los dos términos siguientes: $p(C/B)$ y $p(A \cap B)$
(1 pt)

Resolución

$p(C/B)$ es la probabilidad de que el número ganador en la Navidad de 2026 sea el 72480 sabiendo que en la Navidad de 2025 fue el 72480

$p(A \cap B)$ es la probabilidad de que el número ganador en la Navidad de 2025 sea el 00000 y también sea el 72480

b) Calcula $p(C/B)$ y $p(A \cap B)$

Resolución

Como el número que salga premiado en 2025 no influye en el que saldrá premiado en 2026, entonces

$$p(C/B) = p(C) = \frac{1}{10000} = 0,00001$$

Problema A2. El Instituto Nacional de Estadística (INE) dispone de los datos, para el 2023, sobre la cantidad de habitantes totales y la cantidad de trabajadores por nacionalidad y sexo en España, que son los siguientes:

	Españoles	Extranjeros
Hombres	20,6 millones	3,0 millones
Mujeres	21,2 millones	3,3 millones

	Españoles	Extranjeros
Hombres	10,8 millones	1,9 millones
Mujeres	9,6 millones	1,7 millones

a) Escogiendo hombre al azar, ¿cuál es la probabilidad de que trabaje? (1 pt)

Resolución

La tabla que refleja la población en España para 2023 es

población	Españoles	Extranjeros	totales
Hombres	20,6 millones	3,0 millones	23,6 millones
Mujeres	21,2 millones	3,3 millones	24,5 millones
totales	41,8 millones	6,3 millones	48,1 millones

La tabla que refleja los trabajadores en España para 2023 es

trabajadores	Españoles	Extranjeros	totales
Hombres	10,8 millones	1,9 millones	12,7 millones
Mujeres	9,6 millones	1,7 millones	11,3 millones
totales	20,4 millones	3,6 millones	24 millones

Sean los sucesos A = ser hombre A^c = ser mujer B = trabajar

Nos piden $p(B/A) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)} = \frac{12,7/48,1}{23,6/48,1} \cong 0,5481 = 54,81\%$

b) Escogiendo un individuo al azar, ¿los sucesos "ser mujer" y "trabajar" son independientes? (1 pt)

Resolución

Como $p(A^c) \cdot p(B) = \frac{24,5}{48,1} \cdot \frac{24}{48,1} \cong 0,2541 \neq p(A^c \cap B) = \frac{11,3}{48,1} \cong 0,2349 \Rightarrow A^c$ y B son dependientes

Problema A3. Después de una formación académica determinada, el tiempo que tardan los titulados en encontrar trabajo lo podemos aproximar como una variable aleatoria X que sigue una distribución normal de media poblacional μ desconocida, y desviación típica $\sigma = 30$ días. Respecto de los 22 titulados de este año, el número medio de días que han tardado en encontrar trabajo ha sido de 86.

Calcula un intervalo de confianza para la media poblacional μ con un nivel de confianza del 80%. (2 pt)

Resolución

X = tiempo, en días $\rightarrow N(\mu, 30)$. El intervalo de confianza a nivel de confianza del 80% para estimar μ ,

es $I_c = (\bar{x} - E, \bar{x} + E)$, siendo $\bar{x} = 86$ la media de la muestra de tamaño $n = 22$ y $E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$,

el máximo error de estimación.

Como $\frac{1+n_c}{2} = \frac{1+0,8}{2} = 0,9$,

$p(Z < z_{\alpha/2}) = 0,9$ usando la tabla de la $N(0, 1)$ por interpolación $\rightarrow z_{\alpha/2} \cong 1,285$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,285 \cdot \frac{30}{\sqrt{22}} \cong 8,22 ; I_c = (86 - 8,22 ; 86 + 8,22) \cong (77,78 ; 94,22)$$

Parte B. Escoja solo un problema (le esta parte (total 3 pt j.

Problema B1. Considera: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 & 4 & 1 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -5 & -3 & 4 \end{pmatrix}$ y

$$v = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

a) ¿Es cierto que $A = B^{-1}$? ¿Es cierto que $B = A^{-1}$? (1 pt)

Resolución

Como $AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 & 4 & 1 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -5 & -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$, entonces $A = B^{-1}$
y $B = A^{-1}$

b) Calcula x tal que $Ax = v$. (1 pt)

Resolución

Como $\det A = 4 - 3 = 1 \neq 0$, existe A^{-1} . Multiplicando, por la izquierda, por A^{-1} en los dos miembros:

$$A^{-1}Ax = x = A^{-1}v$$

$$= \frac{1}{\det A} (\text{adj } A)^t v = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 & 0 & 1 & -3 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -5 & -3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

c) Con el valor de x del apartado anterior, calcula y tal que $B^2y = x$. (1 pt)

Resolución

Sea

$$C = B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -5 & -3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -5 & -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 & 4 & -5 & -25 & -15 & 19 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Queda } Cy = x$$

Como $\det C = 76 - 75 = 1 \neq 0$, existe C^{-1} . Multiplicando, por la izquierda, por C^{-1} en los dos miembros:

$$C^{-1}Cy = y = C^{-1}x$$

$$= \frac{1}{\det C} (\text{adj } C)^t x = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} 1 & 30 & 25 & 0 & 19 & 15 & 0 & 5 & 4 \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} 1 & -6 & 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 30 & 19 & 5 & 25 & 15 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -6 & 18 \end{pmatrix} \Rightarrow x = \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}$$

Problema B2. Para organizar un evento social, queremos contratar el transporte con una que nos ofrece autocares y minibuses.

Cada autocar tiene una capacidad de 50 viajeros y tiene un precio de 100 €.

Cada minibus tiene una capacidad de 30 viajeros y tiene un precio de 55 €.

Podemos contratar tantos autocares como queramos, y hasta 8 minibuses. Por limitaciones en el número de conductores, tan solo podemos contratar 11 vehículos. Si queremos asegurar el transporte para al menos 450 personas, ¿cuál es la combinación más ventajosa y su coste? (3 pt)

Resolución

Representamos en una tabla los datos del problema:

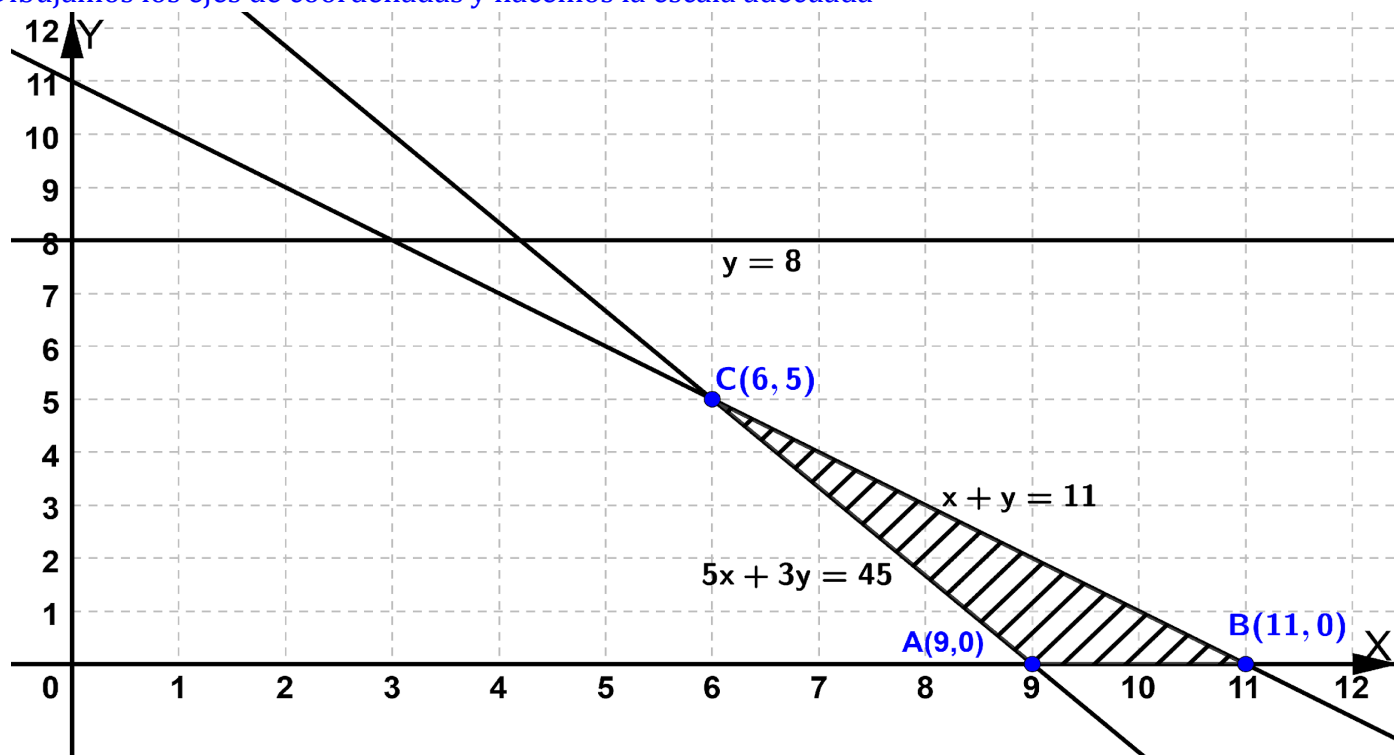
	unidades	nº de viajeros	coste (en €)
autocares	x	50x	100x
minibuses	y	30y	55y
total	x + y	50x + 30y	100x + 55y

Las restricciones son

$$\{y \leq 8, x + y \leq 11, 50x + 30y \geq 450, x \geq 0, y \geq 0\} \Rightarrow \{y \leq 8, x + y \leq 11, 5x + 3y \geq 45, x \geq 0, y \geq 0\}$$

La función a optimizar (minimizar) es el coste $f(x, y) = 100x + 55y$

Dibujamos los ejes de coordenadas y hacemos la escala adecuada



Veamos en qué vértices alcanza el coste mínimo $f(x, y) = 100x + 55y$:

$$f(A) = f(9, 0) = 100 \cdot 9 + 55 \cdot 0 = 900 \quad f(B) = f(11, 0) = 100 \cdot 11 + 55 \cdot 0 = 1100$$

$$f(C) = f(6, 5) = 100 \cdot 6 + 55 \cdot 5 = 875$$

Luego, el coste mínimo es 875 € y se obtiene contratando 6 autocares y 5 minibuses

Parte C. Escoja solo un problema de esta parte (total 3 pt)

Problema C1. Considera la función $f(x) = x^3 - 3x^2$, para $x \in [-1, \infty)$

a) Haz una gráfica esquemática de la función $f(x)$. Calcula o justifica, e indica sobre la gráfica el valor de la función en los extremos del dominio, los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y los máximos y mínimos relativos y absolutos. (2 pt)

b) Sobre la misma gráfica, traza la recta tangente a la función en el punto $x = 1$. ¿Cuál es el valor de su pendiente? (1 pto)

Resolución

$$f(x) = x^3 - 3x^2 = x^2(x - 3) = 0 \Leftrightarrow x = 0, x = 3. \text{ La gráfica corta a los ejes en } (0, 0) \text{ y } (3, 0)$$

$$f(-1) = (-1)^3 - 3(-1)^2 = -4, \quad f(x) \rightarrow +\infty; \quad f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2) = 0 \Leftrightarrow x = 0, x = 2$$

Hagamos una tabla de signos de $f'(x)$. Para ello, tenemos en cuenta que $y = 3x^2 - 6x$ es una parábola convexa que corta al eje X en 0 y 2:

	$(-1, 0)$	0	$(0, 2)$	2	$(2, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	creciente	máximo	decreciente	mínimo	creciente

f es creciente en $(-1, 0) \cup (2, +\infty)$ y decreciente en $(0, 2)$. Máximo relativo: $x = 0, y = f(0) = 0, (0, 0)$.

Como $f(x) \rightarrow +\infty$, no hay máximo absoluto

Mínimo relativo: $x = 2, y = f(2) = 2^3 - 3 \cdot 2^2 = -4$. Punto $(2, -4)$.

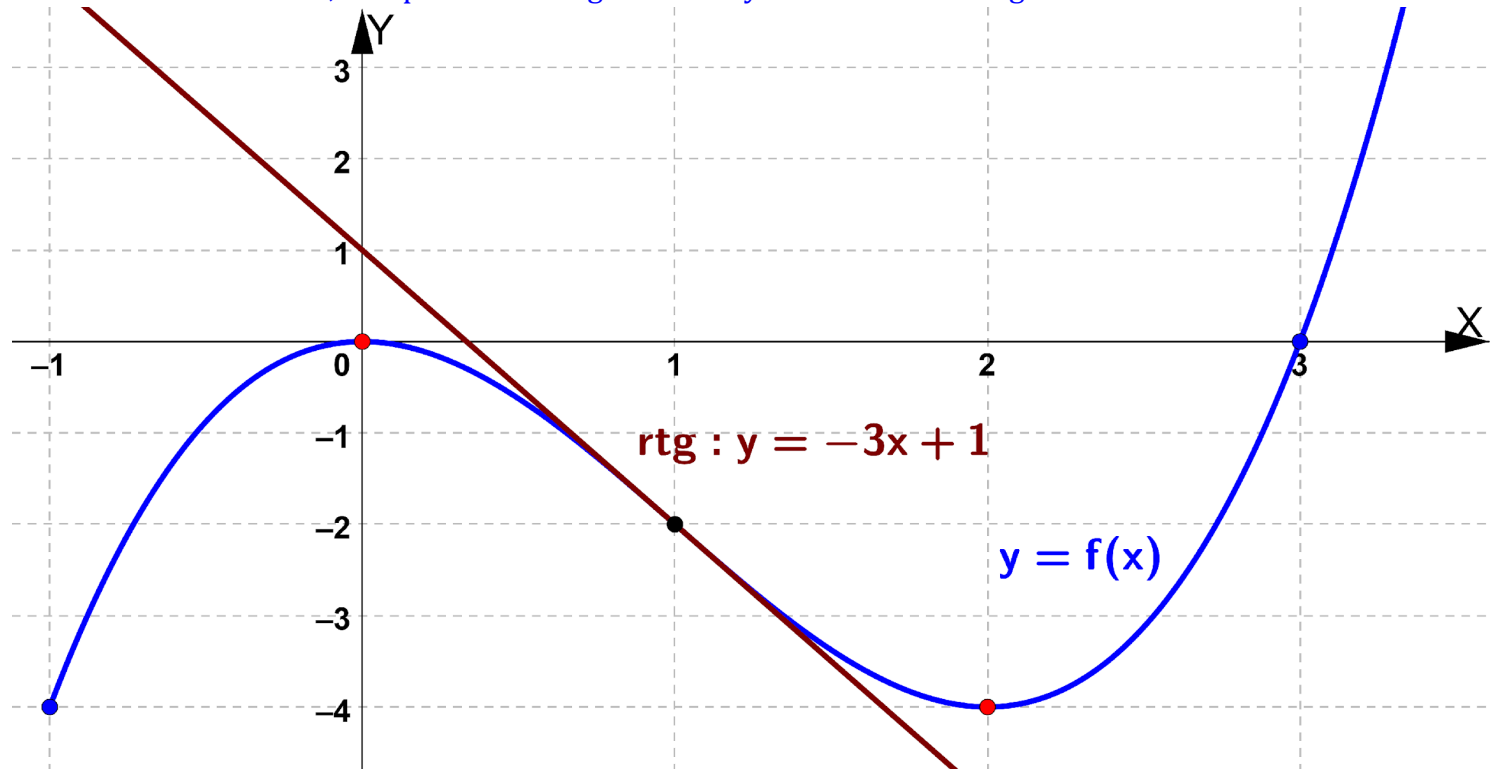
Tanto $(2, -4)$ como $(-1, -4)$ son mínimos absolutos

Por otra parte, la ecuación de la recta tangente a la gráfica de una función f en un punto $A(a, f(a))$ es

rtg: $y = f'(a)(x - a) + f(a)$. En este caso, $a = 1$, $f'(a) = f'(1) = 3 \cdot 1^2 - 6 \cdot 1 = -3$, $f(a) = f(1) = 1^3 - 3 \cdot 1^2 = -2$

rtg: $y = -3(x - 1) - 2 \Rightarrow$ rtg: $y = -3x + 1$. La pendiente es -3

Usando todo lo anterior, la representación gráfica de f y de dicha recta tangente es



Problema C2. En psicología, la función siguiente modela cómo las personas valoran recompensas en un instante de tiempo futuro, t : $V(t) = \frac{1}{(1+r)^t}$, $t \in [0, +\infty)$, donde r es una constante positiva, y t se mide en días.

a) Si $r = 0,01$, ¿qué vale la función $V(t)$ en $t = 50$? (1 pt)

Resolución Para $r = 0,01$, $V(t) = \frac{1}{1,01^t} \Rightarrow V(50) = \frac{1}{1,01^{50}} \cong 0,61$

b) ¿Para qué valor de r , la función $V(t)$ vale 0,75 en $t = 50$? (1 pt)

Resolución

$t = 50$. Hallemos r si $\frac{1}{(1+r)^{50}} = 0,75 = \frac{3}{4}$. Despejando, $(1+r)^{50} = \frac{4}{3} \Rightarrow r = \sqrt[50]{\frac{4}{3}} - 1 \cong 5,77 \cdot 10^{-3}$

c) Si $r = 0,03$, ¿a qué valor tiende la valoración de una recompensa en un futuro muy lejano? (1 pt)

Resolución

Para $r = 0,03$, $V(t) = \frac{1}{1,03^t}$, $V(t) = \frac{1}{\infty} = 0$. O sea, la recompensa tiende a 0