

Timothée TIHAY

I. Énoncé et preuve de l'inégalité de Jensen

II. Résoudre l'équation différentielle

$$(x^2 + 1) \ln \ln (x^2 + 1) y' + 2xy = (x^2 + 1)e^x$$

III. Montrer que

$$\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right], \frac{2}{\pi}x \leq \sin \sin(x) \leq x$$

Samuel TOUIL

I. Énoncé de toutes les caractérisation de la convexité à l'oral.

Preuve de « *convexe* $\Leftrightarrow f'' \geq 0$ », dans le cas d'une fonction deux fois dérivable, à partir de l'inégalité des pentes

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq \frac{f(b)-f(x)}{b-x}$$

pour $a < x < b$

II. Résoudre l'équation différentielle

$$y''' = y$$

On pourra poser $g = y + y' + y''$

III. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$ et soit $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ une application convexe. Montrer que

$$\forall c \in [a; b], (b - a)f(c) \leq (c - a)f(b) + (b - c)f(a)$$

Maxime VOINOT

I. Résoudre l'équation différentielle

$$y'' - 4y' + 5y = e^x \cos(x)$$

II. Résoudre l'équation différentielle

$$y'' - 2\tan(x)y' - y = \frac{1}{x\cos(x)}$$

III. Soit $f: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe et $g: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$g(x) = \frac{f(x)}{x}$$

1. Montrer que si g est décroissante, alors f est sous-additive :

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}_+^{*2}, f(a + b) \leq f(a) + f(b)$$

2. Montrer que si f est convexe et sous-additive, alors g est décroissante.

Timothée TIHAY

I. Énoncé et preuve de l'inégalité de Jensen

II. Résoudre l'équation différentielle

$$(x^2 + 1) \ln \ln (x^2 + 1) y' + 2xy = (x^2 + 1)e^x$$

Réolvons l'équation différentielle

$$(x^2 + 1) \ln \ln (x^2 + 1) y' + 2xy = (x^2 + 1)e^x \quad (1)$$

Remarquons que la fonction $x \mapsto (x^2 + 1) \ln \ln (x^2 + 1)$ s'annule lorsque $x = 0$. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ ne contenant pas 0. Soit $x \in I$, posons

$$f(x) = \ln \ln (x^2 + 1) y(x)$$

f est dérivable sur I en tant que produit de fonctions dérivables sur I .

$$\forall x \in I, f'(x) = \frac{2x}{x^2+1} y(x) + \ln \ln (x^2 + 1) y'(x)$$

Par ailleurs, soit $x \in I$,

$$(1) \Leftrightarrow \ln \ln (x^2 + 1) y' + \frac{2x}{x^2+1} y = e^x \quad (1) \Leftrightarrow f'(x) = e^x$$

On déduit qu'il existe un réel C tel que

$$\forall x \in I, f(x) = e^x + C$$

Et ainsi

$$\forall x \in I, y(x) = \frac{e^x + C}{\ln \ln (x^2 + 1)}$$

Remarquons ensuite que la solution trouvée n'admet pas de limite finie lorsque x tend vers 0 quelle que soit la valeur de C . En effet, par quotient des limites, si $C \neq -1$,

$$\left(\frac{e^x + C}{\ln \ln (x^2 + 1)} \right) = \begin{cases} +\infty & \text{si } C + 1 > 0 \\ -\infty & \text{si } C + 1 < 0 \end{cases}$$

Pour $C = -1$, la fonction exponentielle est convexe sur $\mathbb{R}$ donc sa courbe représentative est au-dessus de ses tangentes, y compris celle en 0 donc

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, e^x \geq x + 1 \Leftrightarrow e^x - 1 \geq x \quad (2)$$

la fonction logarithme est concave sur $\mathbb{R}_+^*$ donc sa courbe représentative est au-dessous de ses tangentes, y compris celle en 1 donc

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ln \ln (x) \leq x - 1$$

On en déduit que

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \ln \ln (x^2 + 1) \leq x^2$$

Par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$, on déduit que

$$\frac{1}{\ln \ln (x^2 + 1)} \geq \frac{1}{x^2} \quad (3)$$

D'après (2) et (3),

$$\frac{e^x - 1}{\ln \ln (x^2 + 1)} \geq \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x}$$

On en déduit que, d'après le théorème de comparaison,

$$\left(\frac{e^x - 1}{\ln \ln (x^2 + 1)} \right) = +\infty$$

On ne peut donc pas trouver un prolongement sur $\mathbb{R}$ de la solution trouvée.

III. Montrer que

$$\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2} \right], \frac{2}{\pi} x \leq \sin \sin (x) \leq x$$

Samuel TOUIL

I. Énoncé de toutes les caractérisation de la convexité à l'oral.

Preuve de « *convexe* $\Leftrightarrow f'' \geq 0$ », dans le cas d'une fonction deux fois dérivable, à partir de l'inégalité des pentes

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq \frac{f(b)-f(x)}{b-x}$$

pour $a < x < b$

II. Résoudre l'équation différentielle

$$y''' = y$$

On pourra poser $g = y + y' + y''$

III. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$ et soit $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ une application convexe. Montrer que

$$\forall c \in [a; b], (b - a)f(c) \leq (c - a)f(b) + (b - c)f(a)$$

Maxime VOINOT

I. Résoudre l'équation différentielle

$$y'' - 4y' + 5y = e^x \cos(x)$$

Il existe $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}, y(x) = e^{2x} (c_1 \sin \sin(x) + c_2 \cos \cos(x)) + \frac{1}{5} e^x (\cos \cos(x) - 2 \sin \sin(x))$$

II. Résoudre l'équation différentielle

$$y'' - 2 \tan(x) y' - y = \frac{1}{x \cos(x)}$$

Résolvons l'équation différentielle

$$y'' - 2 \tan(x) y' - y = \frac{1}{x \cos(x)} \quad (1)$$

Remarquons que l'équation n'est pas définie si

$$x \in U = \{0\} \cup \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Soit I un intervalle de $\mathbb{R} \setminus U$. Soit $x \in I$,

$$(1) \Leftrightarrow \cos(x) y''(x) - 2 \sin(x) y'(x) - \cos(x) y(x) = \frac{1}{x}$$

posons

$$f(x) = \cos(x) y(x)$$

f est deux fois dérivable sur I en tant que produit de fonctions deux fois dérivables sur I .

$$\forall x \in I, f'(x) = \cos(x) y'(x) - \sin \sin(x) (x)$$

$$\forall x \in I, f''(x) = \cos(x) y''(x) - 2 \sin \sin(x) (x) - \cos \cos(x) y(x)$$

Ainsi,

$$(1) \Leftrightarrow f''(x) = \frac{1}{x}$$

$$(1) \Leftrightarrow \exists C \in \mathbb{R}, f'(x) = \ln \ln |x| + C$$

$$(1) \Leftrightarrow f(x) = x \ln \ln |x| - x + Cx + c_2$$

$$(1) \Leftrightarrow \exists c_2 \in \mathbb{R}, f(x) = x \ln \ln |x| + (C - 1)x + c_2$$

En posant $c_1 = C - 1$, il existe donc $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall x \in I, y(x) = \frac{x \ln \ln |x| + c_1 x + c_2}{\cos(x)}$$

Les solutions ne peuvent être raccordées sur $\mathbb{R}$ car y diverge sur U .

III. Soit $f: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe et $g: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$g(x) = \frac{f(x)}{x}$$

1. Montrer que si g est décroissante, alors f est sous-additive :

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}_+^{*2}, f(a + b) \leq f(a) + f(b)$$

2. Montrer que si f est convexe et sous-additive, alors g est décroissante.