حل تمارين الدالة الأسية السلسلة رقم 02

التمرين 7 : g دالة عددية معرفة على R كما يلي :

$g(x) = 1 + 4xe^{2x}$ أدرس اتجاه تغير الدالة g

بين أن $g\left(-\frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{2}{e}$ ، ثم تحقق أن $g\left(-\frac{1}{2}\right) > 0$

، استنتج أن g موجبة على R

f دالة عددية معرفة على R كما يلي :

$f(x) = x + 1 + (2x - 1)e^{2x}$ ، (C_f) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى م م وم الوحدة 2 cm

1. تحقق أنه من اجل كل x من R لدينا: $f(\ ) = g(x)$ ، ثم أدرس تغيرات الدالة f
2. أحسب $\frac{f(x)}{x}$ ماذا تستنتج ؟
3. أحسب $[f(x) - x - 1]$ ماذا تستنتج ؟ أدرس وضعية (C_f) و (Δ) حيث (Δ) المستقيم ذي المعادلة $y = x + 1$
4. أكتب معادلة المماس (T) للمنحني (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 0
5. بين أن لـ (C_f) نقطة انعطاف يطلب تعيين إحداثياتها
6. أرسم (T) و (Δ) و (C_f)

الحل :

دراسة تغيرات الدالة g

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(1+4xe^{2x}\right) = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(1+4xe^{2x}\right)$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\left(1+2\left(2xe^{2x}\right)\right) = 1$$

لأن $\lim_{x\to-\infty} 2xe^{2x} = 0$

2- الدالة g قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا :

$$g'(x) = 4e^{2x} + 8xe^{2x} = 4e^{2x}(1+2x)$$

إشارة $g'(x)$ من نفس إشارة $1+2x$ لأن : $4e^{2x} > 0$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
g	$-\infty$	↘	$g\left(-\frac{1}{2}\right)$	↗	$+\infty$

$$g\left(-\frac{1}{2}\right) = 1 - 2e^{-1} = 1 - \frac{2}{e} > 0$$

من جدول التغيرات نستنتج أن $g(x) > 0$

$f(x) = x + 1 + (2x - 1)e^{2x}$ II)

$$f'(x) = 1 + 2e^{2x} + 2e^{2x}(2x-1)$$
$$= 1 + 2e^{2x} + 4xe^{2x} - 2e^{2x}$$
$$= 1 + 4xe^{2x} = g(x)$$

النهايات :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(x+1+(2x-1)e^{2x}\right)$$
$$= \lim_{x\to-\infty}\left(x+1+2xe^{2x}-e^{2x}\right) = -\infty$$

لأن $\lim_{x\to-\infty} 2xe^{2x} = 0$ و $\lim_{x\to-\infty} e^{2x} = 0$ و $\lim_{x\to-\infty} x+1 = -\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(x+1+(2x-1)e^{2x}\right) = +\infty$$

الدالة المشتقة : بما أن $f'(x) = g(x)$ فإن $f'(x) > 0$ ومنه الدالة متزايدة تماما على $\mathbb{R}$

جدول التغيرات :

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
f	$-\infty$	↗	$+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+1+(2x-1)e^{2x}}{x}\right)$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+1}{x} + \frac{(2x-1)}{x}e^{2x}\right) = +\infty$$

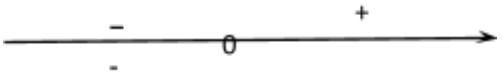
(2

نستنتج أن (C_f) يقبل فرعا مكافئ في إتجاه محور التراتيب

3) نستنتج أن (C_f) يقبل مستقيما مقلربا مائلا (Δ) معادلته $y=x+1$

دراسة الوضعية : $f(x)-x-1=(2x-1)e^{2x}$

إشارة $(2x-1)e^{2x}$ من نفس إشارة $2x-1$ لأن : $e^{2x}>0$



4) كتابة معادلة المماس (T) للمنحني (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 0

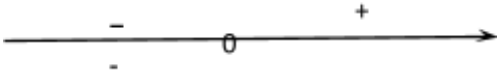
معادلة المماس هي : $y=f'(0)(x-0)+f(0)$ ومنه $y=x$

5) تبيين أن لـ (C_f) نقطة انعطاف يطلب نعيين إحداثياتها

لدينا : $f'(x)=1+4xe^{2x}$ ومنه

$$f''(x)=4e^{2x}+8xe^{2x}=4e^{2x}(1+2x)$$

إشارة $4e^{2x}(1+2x)$ من نفس إشارة $1+2x$ لأن : $e^{2x}>0$

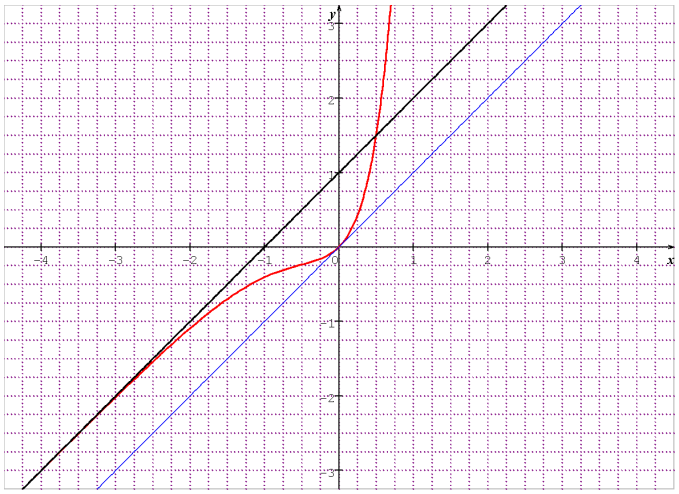


الدالة المشتقة الثانية تنعدم عند $-\frac{1}{2}$ وغير إشارتها ومنه النقطة

$A\left(-\frac{1}{2};f\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$ هي نقطة إنعطاف لـ (C_f)

$$f\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}-2e^{-1}=\frac{1}{2}-\frac{2}{e}$$

الرسم :



x	$-\infty$ $-\frac{1}{2}$ $+\infty$
$g(x)$	$-$ 0 $+$
$g'(x)$	

x	$-\infty$ $+\infty$
$f(x)$	$+$
$f'(x)$	

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f(x)-x-1$				
الوضعية	(C_f) تحت (Δ)	يقطع	(C_f) فوق (Δ)	

التمرين 10: نعتبر الدالة g المعرفة كما يلي :

$$g(x)=\left(2x^2-3x\right)e^x$$

- أدرس تغيرات الدالة g ، ثم بين أن (C_g) يقبل نقطتي انعطاف يطلب نعيين إحداثياتهما
- أكتب معادلة المماس(Δ) للمنحني (C_g) في النقطة ذات الفاصلة 0
- أنشئ (Δ) و(C_g)

لتكن h الدالة المعرفة بالشكل : $h(x)=\left(2x^2+ax+b\right)e^x$

- ما هو الشرط على a و b حتى تقبل h قيمتين حديتين كبرى وصغرى

الحل :

1) دراسة تغيرات الدالة g

النهايات :

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} (2x^2-3x)e^x$$
$$= \lim_{x\to-\infty} (2x^2e^x - 3xe^x) = 0$$

لأن $\lim_{x\to-\infty} x^2e^x = 0$

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} (2x^2-3x)e^x = +\infty$$ لأن :

$$\lim_{x\to+\infty} (2x^2-3x) = +\infty$$ و $$\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$$

الدالة المشتقة :

- الدالة g قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا :

$$g'(x) = (4x-3)e^x + (2x^2-3x)e^x$$
$$= e^x(2x^2-3x+4x-3) = (2x^2+x-3)e^x$$

إشارة $g'(x)$ من نفس إشارة $2x^2+x-3$ لأن : $e^x > 0$

إشارة $2x^2+x-3$ $\Delta = 25$ $x_1 = -\frac{1}{2}$ $x_2 = 1$



جدول التغيرات :



$g(1) = -e$ و $g\left(-\frac{3}{2}\right) = 9e^{-\frac{3}{2}}$

$$g''(x) = (4x+1)e^x + (2x^2+x-3)e^x$$
$$= (2x^2+x-3+4x+1)e^x = (2x^2+5x-2)e^x$$

إشارة $g''(x)$ من نفس إشارة $2x^2+5x-2$ لأن : $e^x > 0$

إشارة $2x^2+5x-2$

$\Delta = 41$ $x_1 = \frac{-5-\sqrt{41}}{4} = -2.85$ و $x_2 = \frac{-5+\sqrt{41}}{4} \simeq 0.35$



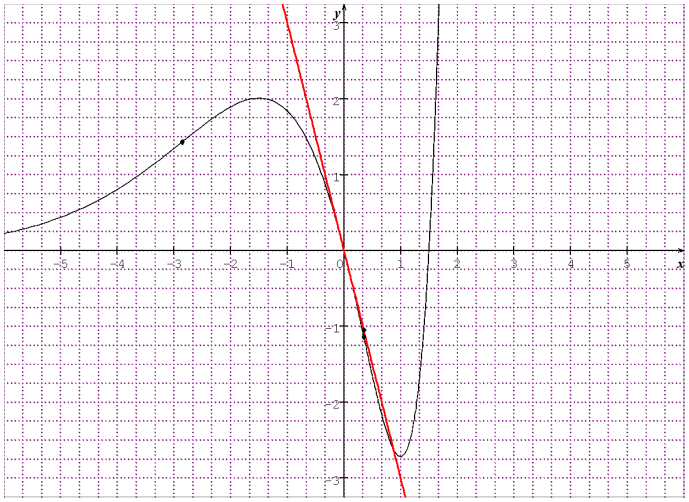
بما ان الدالة المشتقة الثانية تنعدم مرتين مغيرة إشارتها فإن (C_g) يقبل نقطتي انعطاف هما $A(x_1; g(x_1)); B(x_2; g(x_2))$

كتابة معادلة المماس (Δ) للمنحني (C_g) في النقطة ذات الفاصلة 0

معادلة المماس هي : $y = g'(0)(x-0)+g(0)$ ومنه $y = x$

$g'(0) = -3$ و $g(0) = 0$ ومنه $y = -3x$

الرسم :



x	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$	1	$+\infty$
$g(x)$	+	o	-	
$g'(x)$				

الشرط على a و b حتى تقبل h قيمتين حديتين كبرى وصغرى هو $\Delta > 0$ حيث :

$$h'(x)=\left(2x^2+ax+b\right)e^x+\left(4x+a\right)e^x$$
$$=\left(2x^2+\left(a+4\right)x+a+b\right)e^x$$

$$\Delta=\left(a+4\right)^2-8\left(a+b\right)$$

$$\Delta=a^2+8a+16-8a-8b=a^2-8b+16$$

$\Delta\succ 0$ معناه $a^2-8b+16\succ 0$ أي $a^2\succ 8b-16$