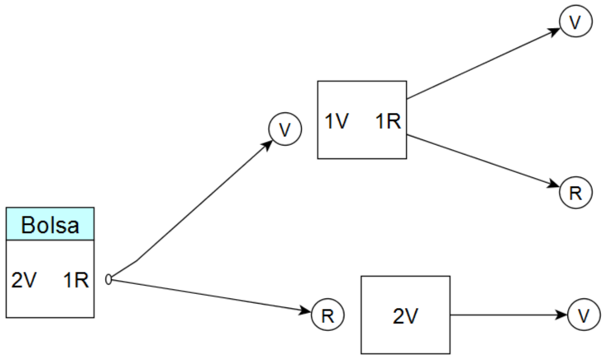

Probabilidad en experimentos compuestos

1) Una caja tiene 2 bolas verdes y 1 roja. Sacamos sucesivamente 2 bolas sin devolución.
Hallemos el espacio muestral usando diagrama de árbol



E = {VV, VR, RV}

Por ejemplo, el suceso contrario de A = "las dos bolas son verdes" es
A^c = "alguna bola no es verde" = {VR, RV} y su probabilidad es

$p(A^c) = \frac{2}{3} = 0,6666... \xrightarrow{.\,100} 66,7\%$, aproximadamente 2/3

2) En un hospital se han producido 200 nacimientos en un mes. De ellos, 105 son varones y, de éstos, 21 tienen los ojos azules. También se ha observado que 57 de las niñas nacidas en ese mes no tienen los ojos azules.
Organicemos los datos en una tabla (llamada tabla de contingencia)

	varones	hembras	Total
tienen ojos azules	21	38	59
no tienen ojos azules	84	57	141
Total	105	95	200

Si se elige una persona al azar, usando la tabla, podemos calcular, por ejemplo, las siguientes probabilidades:
p(de que sea hembra) = 95/200 = 0,475 = 47,5%

p(de que sea varón con ojos azules) = 21/200 = 0,105 = 10,5%

p(de que no tenga los ojos azules) = 141/200 = 0,705 = 70,5%

3) En cierta región de España se sabe que la probabilidad de que llueva el viernes es 70%, de que llueva el sábado es 40% y de que llueva el domingo es 80%.
Entonces, por ejemplo, podemos calcular las siguientes probabilidades:

p(de que llueva el fin de semana) = 0,7 . 0,4 . 0,8 = 0,224 = 22,4%

p(de que llueva el viernes, el domingo y no el sábado) = 0,7 . 0,8 . 0,6 = 0,336 = 33,6%

Probabilidad condicionada

Dados dos sucesos, A y B, con $p(B) \neq 0$, se llama probabilidad de A condicionada a B a la probabilidad de que ocurra A sabiendo que ha ocurrido B.

La probabilidad de A condicionada a B se representa por p(A / B) y se puede calcular usando la fórmula:

$$\boxed{p(A / B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}}$$

Si despejamos $p(A \cap B)$ de la fórmula anterior se obtiene: $p(A \cap B) = p(A/B) \,.\, p(B)$

Razonando de forma análoga para B condicionado a A: $\boxed{p(B / A) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}}$

$$p(A \cap B) = p(B/A) \,.\, p(A)$$

Sucesos independientes

Dos sucesos A y B son independientes si $p(A/B) = p(A)$ y $p(B/A) = p(B)$

Por tanto, si A y B son independientes $\mathbf{p(A \cap B) = p(A) \,.\, p(B)}$

Propiedades

Si A y B son independientes

$$p(A \cap B^C) = p(A) - p(A \cap B) \xrightarrow{\text{como A y B son independientes}} p(A) - p(A) \,.\, p(B)$$

Sacando factor común: $p(A).\,[1 - p(B)] = p(A) \,.\, p(B^C) \Rightarrow$ A y B^C son independientes

Ten en cuenta que
$$\begin{cases} p(A / B^C) = \dfrac{p(A \cap B^C)}{p(B^C)} = \dfrac{p(A) - p(A \cap B)}{1 - p(B)} \\ p(A^C / B) = \dfrac{p(A^C \cap B)}{p(B)} = \dfrac{p(B) - p(A \cap B)}{p(B)} \\ p(A^C / B^C) = \dfrac{p(A^C \cap B^C)}{p(B^C)} = \dfrac{p(A \cup B)^C}{1 - p(B)} = \dfrac{1 - p(A \cup B)}{1 - p(B)} \end{cases}$$

Dos sucesos son independientes si la ocurrencia o no de uno de ellos no modifica la probabilidad del otro. En otro caso se dice que son dependientes.

Por ejemplo. Una bolsa contiene 2 bolas rojas y 3 negras. Sacamos 2 bolas con reemplazamiento.
Los sucesos A_1 = "la primera bola es roja" A_2 = "la segunda bola es negra" son dos sucesos independientes pues:
- Si ocurre A_1, entonces $p(A_2) = 3/5$
- Si no ocurre A_1, entonces $p(A_2) = 3/5$

Pero si sacamos dos bolas sin reemplazamiento.
Los sucesos A_1 = la primera bola es roja, A_2 = la segunda bola es negra son dos sucesos dependientes pues:
- Si ocurre A_1, entonces $p(A_2) = 3/4$
- Si no ocurre A_1, entonces $p(A_2) = 2/4$

Otro ejemplo de sucesos independientes: Lanzamos al aire una moneda 2 veces, sea el suceso A = "en la 2ª tirada sale cruz" B = "en la 1ª tirada sale cara"
Observa que son sucesos independientes, pues $P(A/B) = P(A)$.

Vamos a comprobar que se cumple la fórmula
$E = \{ CC,CX,XC,XX\}$ $A = \{CX,XX\}$ $B = \{CX,CC\}$ $A \cap B = \{CX\}$

$P(A) = 2/4$ $P(B) = 2/4$ $P(A \cap B) = 1/4$

Luego, $P(A) . P(B) = 2/4 . 2/4 = 4/16 = 1/4 = P(A \cap B)$

Dos sucesos A y B son independientes si $p(A/B) = p(A)$ y $p(B/A) = p(B)$

Se aquí se deduce que $\boxed{\text{A y B son independientes} \Leftrightarrow p(A \cap B) = p(A).p(B)}$

Para tres sucesos se cumpliría $\boxed{\text{A, B y C son independientes} \Leftrightarrow p(A \cap B \cap C) = p(A).p(B).p(C)}$

Análogamente si hubiese más de tres sucesos $p(A \cap B \cap C \ldots.) = p(A) . p(B) . p(C)\ldots\ldots$

Se puede demostrar que si A y B son independientes, entonces también son independientes
A y B^c, A^c y B , A^c y B^c

Por ejemplo,
$$p(A \cap B^C) = p(A) - p(A \cap B) \xrightarrow{\text{como A y B son independientes}} p(A) - p(A) . p(B)$$
$$\text{Sacando factor común: } p(A).[1 - p(B)] = p(A) . p(B^C) \Rightarrow \text{A y } B^C \text{ son independientes}$$

Ten en cuenta que
$$\begin{cases} p(A / B^C) = \dfrac{p(A \cap B^C)}{p(B^C)} = \dfrac{p(A) - p(A \cap B)}{1 - p(B)} \\[2ex] p(A^C / B) = \dfrac{p(A^C \cap B)}{p(B)} = \dfrac{p(B) - p(A \cap B)}{p(B)} \\[2ex] p(A^C / B^C) = \dfrac{p(A^C \cap B^C)}{p(B^C)} = \dfrac{p(A U B)^C}{1 - p(B)} = \dfrac{1 - p(A U B)}{1 - p(B)} \end{cases}$$

1) Sean A y B dos sucesos aleatorios tales que: $p(A) = 0,4$, $p(B) = 0,5$ y $p(A \cap B) = 0,2$
a) Calcula $p(A U B)$, $p(A/B)$ y $p(B/A)$

Sol: p(A U B) = 0,4 + 0,5 – 0,2 = 0,7 $p(A/B)=\dfrac{p(A\cap B)}{p(B)}=\dfrac{0,2}{0,5}=0,4$ $p(B/A)=\dfrac{p(A\cap B)}{p(A)}=\dfrac{0,2}{0,4}=0,5$

b) ¿Son A y B incompatibles? *Sol*: No, porque p(A ∩ B)= 0,2 ≠ 0

$$\begin{cases} p(A\cap B)=0,2 \\ p(A)\,.\,p(B)=0,4\,.\,0,5=0,2 \end{cases} \rightarrow Luego\;\; p(A\cap B)=p(A)\,.\,p(B)$$

c) ¿Son independientes? *Sol*: *Por tanto son independientes*

2) Sean A y B dos sucesos de un espacio muestral, de los que se conocen las probabilidades

p(A) = 0,6 p(B) = 0,25 y p(A / B) = 0,4

a) Calcula p(A ∩ B)

$$\underline{Sol}.: Como\;\; p(A/B)=\frac{p(A\cap B)}{p(B)}\Rightarrow 0,4=\frac{p(A\cap B)}{0,25}\Rightarrow p(A\cap B)=0,4\,.\,0,25=\boxed{0,1}$$

b) Halla p(A U B) $\underline{Sol}.:\; p(A\cup B)=p(A)+p(B)-p(A\cap B)=0,6+0,25-0,1=\boxed{0,75}$

c) Explica si A y B son dependientes o independientes

$$\underline{Sol}.: \begin{cases} p(A\cap B)=0,1 \\ p(A)\,.\,p(B)=0,6\,.\,0,25=0,15 \end{cases}, luego\;\; A\;\; y\;\; B\;\; son\;\; dependientes\;\; porque\;\; p(A\cap B)\neq p(A)\,.\,p(B)$$

3) Sean dos sucesos, A y B, tales que p(A) = 0,5 p(B) = 0,4 y p(A/B) = 0,5

a) Halla la probabilidad de que se verifique alguno de los dos sucesos.

Sol: p(A U B) = p(A) + p(B) – p(A ∩ B)

$$Por\;\; otra\;\; parte\;\; p(A/B)=\frac{p(A\cap B)}{p(B)}\rightarrow 0,5=\frac{p(A\cap B)}{0,4}\rightarrow p(A\cap B)=0,2$$

Luego, p(A U B) = 0,5 + 0,4 – 0,2 = 0,7

b) ¿Son independientes los sucesos A y B? Razona la respuesta.

$$\begin{cases} p(A\cap B)=0,2 \\ p(A)\,.\,p(B)=0,5\,.\,0,4=0,2 \end{cases} \rightarrow Luego\;\; p(A\cap B)=p(A)\,.\,p(B)$$

Sol: *Por tanto son independientes*

En el experimento aleatorio de lanzar una moneda tres veces se consideran los siguientes sucesos: A: “sacar al menos dos caras”. B: “sacar una cara en el primer lanzamiento”.

a) Determina las probabilidades de los sucesos A, B, A ∩ B, A^c y A U B

c) ¿Son incompatibles los sucesos A y B? d) Calcula la probabilidad de A/B y de B/A

e) Averigua si los sucesos A y B son dependientes o independientes

<u>Solución</u>

a) Nº de casos posibles: 8 A = {ccx, cxc, xcc, ccc} B = {ccc, ccx, cxc, cxx}

A U B = {ccx, cxc, xcc, ccc, cxx} A ∩ B = {ccx, cxc, ccc}

$$p(A)=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}\quad p(B)=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}\quad p(A\cap B)=\frac{3}{8}\quad p(A^c)=1-p(A)=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

$$p(AUB)=p(A)+p(B)-p(A\cap B)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{3}{8}=\frac{5}{8}$$

p(A) =

$$p(A/B)=\frac{p(A\cap B)}{p(B)}=\frac{3/8}{1/2}=\frac{3}{4}\qquad p(B/A)=\frac{p(B\cap A)}{p(A)}=\frac{3/8}{1/2}=\frac{3}{4}$$

b) No, porque p(A ∩ B) ≠ 0 c)

---

c) $\begin{cases} p(A \cap B) = \frac{3}{8} \\ p(A).p(B) = \frac{1}{2}.\frac{1}{2} = \frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow p(A \cap B) \neq p(A).p(B) \Rightarrow \text{A y B son dependientes}$

En el experimento aleatorio de lanzar una moneda tres veces se consideran los siguientes sucesos:
A: "sacar al menos una cara y una cruz". B: "sacar a lo sumo una cara".

a) Determina el espacio muestral asociado a ese experimento y los sucesos A y B.

$E = \{ccc, ccx, cxc, cxx, xcc, xcx, xxc, xxx\}$ $A = \{ccx, cxc, cxx, xcc, xcx, xxc\}$ $B = \{cxx, xcx, xxc, xxx\}$

b) ¿Son incompatibles los sucesos A y B?

No, pues $A \cap B = \{cxx, xcx, xxc\}$

c) Determina los sucesos contrarios de A y B

$A^C = \{ccc, xxx\}$ $B^C = \{ccc, ccx, cxc, xcc\}$

d) Determina A U B

A U B = {ccx, cxc, cxx, xcc, xcx, xxc, xxx}

e) Calcula las probabilidades de A , B , A U B , A ∩ B , A^c y A/B

p(A) = 6/8 = 3/4 p(B) = 4/8 = 1/2 p(AUB) = 7/8 $p(A \cap B) = 3/8$

$$p(A^c) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} \qquad p(A/B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{3/8}{1/2} = \frac{3}{4}$$

Tenemos dos bolsas, A y B, con el siguiente contenido:

	Bolas bancas	Bolas negras	Bolas rojas
Bolsa A	10	15	20
Bolsa B	15	20	20

Si extrajéramos al azar una bola de cada bolsa, ¿en cuál sería más probable que fuera roja?
a) Es igual de probable en las dos bolsas.
b) En la bolsa A.
c) En la bolsa B.
d) Es imposible que extraigamos una bola roja.
****

Sean A y B dos sucesos de un espacio muestral, de los que se conocen las probabilidades
p(A) = 0,18 p(B) = 0,45 y p(B/A) = 0,7
a) Calcula p(A ∩ B) b) Halla p(A U B) c) Averigua si A y B son dependientes o independientes

Solución

a) Como $p(B/A) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)} \Rightarrow p(A \cap B) = p(A).p(B/A) = 0{,}18.0.7 = 0{,}126$

b) $p(AUB) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = 0{,}18 + 0{,}45 - 0{,}126 = 0{,}504$

c) $\begin{cases} p(A \cap B) = 0{,}126 \\ p(A).p(B) = 0{,}8.0{,}45 = 0{,}081 \end{cases} \Rightarrow p(A \cap B) \neq p(A).p(B) \Rightarrow \text{A y B son dependientes}$

Se tiene un dado trucado de forma que la probabilidad de cada resultado par es $\frac{1}{9}$ y todos los resultados impares son equiprobables. Si se tira el dado, ¿cuál es la probabilidad de que salga un número menor que 4?

Resultado	Probabilidad
1	x
2	$\frac{1}{9}$
3	x
4	$\frac{1}{9}$
5	x
6	$\frac{1}{9}$
Suma total	1

$$\frac{3}{9}+3x=1 \;\rightarrow\; x=\frac{2}{9} \qquad p(\text{nº} < 4) = p(1) + p(2) + p(3) = \frac{2}{9}+\frac{1}{9}+\frac{2}{9}=\frac{5}{9}$$

Un jugador lanza a la vez un dado y una moneda.
a) Construye el espacio muestral de este experimento aleatorio.
b) Determina la probabilidad del suceso A: "El jugador obtiene un número par en el dado y cruz en la moneda".
c) Si sabemos que en la moneda ha salido cara, ¿cuál es la probabilidad de que en el dado haya salido más de 3 puntos?

En el experimento aleatorio de lanzar una moneda tres veces se consideran los siguientes sucesos:
A: "sacar al menos dos caras". B: "sacar una cara en el primer lanzamiento".
a) Determina las probabilidades de los sucesos A, B, A U B , A ∩ B y A^c

Sol.: $p(A)=1/2 \quad p(B)=1/2 \quad p(A\cup B)=5/8 \quad p(A\cap B)=3/8 \quad p(A^c)=1/2$

c) ¿Son incompatibles los sucesos A y B? Sol.: No

d) Calcula la probabilidad de A/B y de B/A Sol.: $3/4$, ambas

e) ¿Son independientes los sucesos A y B? Sol.: No, porque $p(A\cap B)\neq p(A).p(B)$

Sea el experimento aleatorio consistente en lanzar 3 veces una moneda y observar el resultado.
a) Escribe el espacio muestral asociado y las probabilidades de los sucesos elementales.
b) Sean los sucesos A: "obtener al menos una cara", B: "obtener cara en solo uno de los tres lanzamientos". Calcula p(A) y p(B). ¿Son independientes A y B ?

Sean A y B dos sucesos de un espacio muestral, de los que se conocen las probabilidades

---

$$p(A) = 0{,}6 \qquad p(B) = 0{,}25 \quad \text{y} \quad p(A / B) = 0{,}4$$

a) Calcula $p(A \cap B)$

$$\underline{Sol.}: Como \ \ p(A/B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} \Rightarrow 0{,}4 = \frac{p(A \cap B)}{0{,}25} \Rightarrow p(A \cap B) = 0{,}4 \,.\, 0{,}25 = \boxed{0{,}1}$$

b) Halla $p(A \cup B)$

$$\underline{Sol.}: \ p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = 0{,}6 + 0{,}25 - 0{,}1 = \boxed{0{,}75}$$

c) Explica si A y B son dependientes o independientes

$$\underline{Sol.}: \begin{cases} p(A \cap B) = 0{,}1 \\ p(A)\,.\,p(B) = 0{,}6\,.\,0{,}25 = 0{,}15 \end{cases}, luego \ A \ y \ B \ son \ dependientes \ porque \ p(A \cap B) \neq p(A)\,.\,p(B)$$

Una urna A contiene siete bolas numeradas del 1 al 7.
Otra urna B contiene cinco bolas numeradas del 1 al 5.
Lanzamos una moneda equilibrada, de forma que, si sale cara, extraemos una bola de la urna A, y, si sale cruz, la extraemos de la urna B. Después miramos si la bola es par o impar.
a) Haz un diagrama de árbol de probabilidades de la situación.

b) Calcula la probabilidad de que la bola haya sido extraída de la urna A y el número sea par. $\underline{Sol.}: {}^{3}\!/_{14}$

c) Calcula la probabilidad de que la bola se haya sacado de la urna A sabiendo que es par
b) "El número de la bola extraída sea par".

Lanzamos un dado, si sale 5 o 6 extraemos una bola de una urna A, que contiene 6 bolas blancas y 4 negras. Si sale otro resultado se extrae una bola de la urna B, que contiene 3 bolas blancas y 7 negras.
Calcula:
a) La probabilidad de que la bola extraída sea negra.

b) La probabilidad de que la bola sea negra y de la urna B.

c) La probabilidad de que haya salido menos de 5 si la bola extraída ha sido blanca.

Un cajón contiene 10 piezas, de las cuales, 4 son tornillos, 3 son tuercas y 3 son púas. Se extraen dos piezas al azar sin reemplazamiento. Halla la probabilidad de
a) que la primera pieza sea una tuerca.
b) sacar 2 tuercas.
****

Lanzamos un dado, si sale 5 o 6 extraemos una bola de una urna A, que contiene 6 bolas blancas y 4 negras. Si sale otro resultado se extrae una bola de la urna B, que contiene 3 bolas blancas y 7 negras.
a) Haz un diagrama de árbol de probabilidades de la situación.

b) Halla la probabilidad de que la bola extraída sea blanca y de la urna B. $\underline{Sol.}: {}^{1}\!/_{5}$

c) Calcula la probabilidad de que la bola sea negra y de la urna A. $\underline{Sol.}: {}^{2}\!/_{15}$

Una urna A contiene tres bolas azules y cuatro rojas y otra urna B contiene dos bolas azules, dos rojas y dos negras. Se elige una urna al azar y se saca una bola.
a) Haz un diagrama de árbol de probabilidades de la situación.

b) Calcula la probabilidad de que la bola sea de la urna B y roja. Sol.: $1/6$

c) Halla la probabilidad de que la bola sea azul y proceda de la urna A Sol.: $3/14$

d) Halla la probabilidad de que la bola sea negra Sol.: $1/6$

Una urna A contiene tres bolas azules y cuatro rojas y otra urna B contiene dos bolas azules, dos rojas y dos negras. Se extrae, al azar, una bola de una de las urnas.

a) Calcula la probabilidad de que la bola extraída sea roja.

b) Si la bola extraída resulta ser azul, ¿cuál es la probabilidad de que proceda de la urna B?

Usando combinatoria

De todos los números de 3 cifras que se pueden formar con las cifras 2, 4, 5 y 6 se elige un número. ¿Cuál es la probabilidad de que todas sus cifras sean distintas?
****
Se forman todos los números de 4 cifras distintas con los dígitos 1, 2, 3, 4, 5 y 6 . Si se elige un número al azar, ¿cuál es la probabilidad de que termine en 35?
****
Se forman todos los números de 3 cifras con los dígitos 1, 2, 3, 4, 5 y 6 . Si se elige un número al azar, ¿cuál es la probabilidad de que termine en 66?
****
Calcular cuántos números de tres cifras se pueden construir considerando los dígitos del 3 al 7, ambos incluidos. Considerar la posibilidad de repetir cifra y de no repetirla. Calcular la probabilidad de elegir desde una caja en que estén todos esos números, aquéllos que tienen todos sus dígitos iguales
****
Se dispone de cinco bolas con los números 5, 6, 7, 8 y 9. Si se eligen al azar tres de ellas para formar un número de tres cifras distintas, ¿cuál es la probabilidad de que las 3 cifras sean impares?
****
La probabilidad de que un número de tres cifras elegido al azar sea capicúa, ¿es igual que la de elegir un número de tres cifras que acabe en 3?

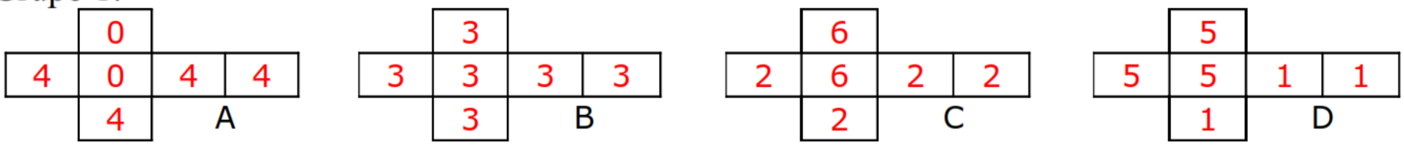
Dados

Calcula la probabilidad de que al lanzar un dado octaédrico al aire se obtenga:
a) Un número impar. b) Un número mayor que 4.
c) Un número menor o igual que 3. d) Un múltiplo de 7.
e) Un número menor que 7 f) Un múltiplo de 4
****
Pedro y Juan juegan con un dado. Pedro gana un euro si sale 2, 3, 4, o 5. Si sale un 1 gana Juan. ¿Cuánto debería ganar Juan cuando obtiene un 1 para que el juego sea justo?
****
Sobre las caras de cada cubo escribe los números que se indican en la figura.
El primer jugador elige uno de los cuatro cubos y el segundo elige otro cubo.
Cada persona lanza su cubo y gana la que saque un número mayor.

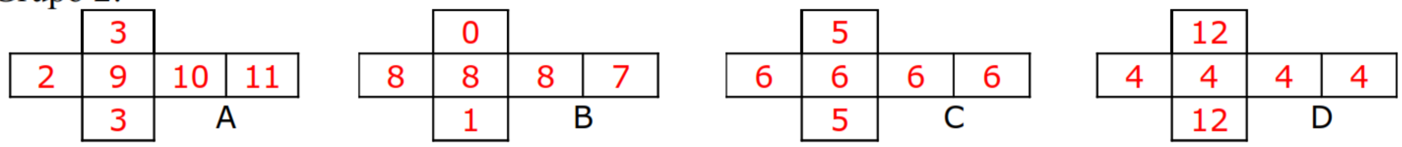
Para cada uno de los tres grupos de cubos, calcula la probabilidad de ganar en cada una de las posibles elecciones: A-B; B-C; C-D; D-A.

A B C D

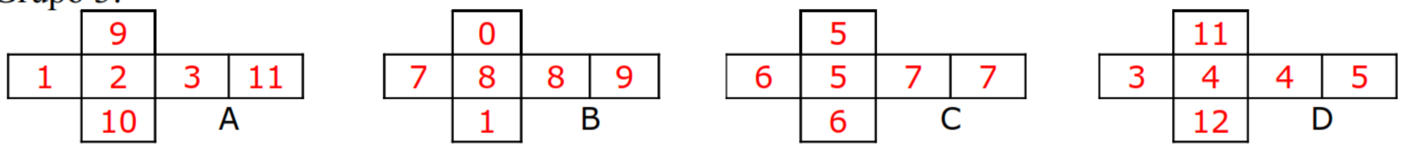
Grupo 1:



Grupo 2:



Grupo 3:



Grupo 1: A_B: p(A)= 24/36; B_C: p(B) = 24/36; C_D: p(C) = 24/36; D_A: p(D)= 24/36.
Grupo 2: A_B: p(A)= 24/36; B_C: p(B) = 24/36; C_D: p(C) = 24/36; D_A: p(D)= 24/36.
Grupo 3: A_B: p(A)= 11/17; B_C: p(B) = 11/17; C_D: p(C) = 11/17; D_A: p(D)= 11/17.
Conclusión: la persona que elige en segundo lugar tiene más probabilidad de ganar.
A es mejor que B; B es mejor que C; C es mejor que D; D es mejor que A.

****

<u>tipo cajas</u>

En una caja hay 8 bolas negras, 7 rojas y 5 blancas.
Se saca una bola al azar. Halla la probabilidad de que la bola:
a) Sea roja b) Sea blanca o negra c) No sea negra d) Sea roja y blanca e) Sea blanca, negra o roja

****

En una urna hay 3 bolas blancas, 2 negras y 5 azules.
Se saca una bola al azar. Calcula la probabilidad de que:
a) Sea negra b) Sea negra o azul
c) No sea azul d) Sea blanca y negra
e) Sea blanca, negra o azul f) Sea roja

****

En una bolsa tenemos bolas de colores. No sabemos cuántas bolas hay ni qué colores tienen.
Una experiencia consiste en sacar una bola, anotar el color y devolverla a la bolsa. Hacemos 200 extracciones y conseguimos 124 bolas blancas, 58 bolas rojas y 18 negras.
a) ¿Cuál es la probabilidad de roja? ¿Y la de no roja?
b) Ahora nos dicen que en la bolsa hay 10 bolas. ¿Podremos afinar más en la asignación de probabilidades?

****

<u>Tipo números</u>

Se saca una bola de una urna que contiene 14 bolas numeradas del 1 al 14. Calcula la probabilidad de que el número sea: a) múltiplo de 4 b) mayor que 9 c) menor o igual que 14

****

Una bolsa contiene 120 fichas numeradas del 1 al 120. ¿Cuál es la probabilidad de que al sacar una ficha ésta sea un múltiplo de 9?

****

Tienes 10 tarjetas numeradas desde 1 al 10. Sacas una al azar, ¿cuál es la probabilidad de que salga un número primo?

****

Calcula la probabilidad de que la matrícula de un coche de 4 dígitos: a) Termine en 87 b) Sea múltiplo de 4 c) Sólo tenga cifras pares d) Tenga las cuatro cifras iguales

****

Una empresa desea contratar 25 operarios y al llamado concurren 80 postulantes. Se aplica un examen de admisión el cual da como resultado los siguientes puntajes:

290	299	300	328	294	323	295	298	295	291
294	308	397	305	297	295	304	320	311	320
301	299	300	324	324	299	300	304	320	304
302	322	307	318	314	311	306	317	312	310
303	313	308	322	310	312	301	323	317	310
319	310	318	311	307	318	306	314	317	319
317	315	314	313	319	310	311	309	316	314
313	306	308	309	312	305	315	319	319	312

Ordena los datos en una tabla de frecuencias y agrúpalos en intervalos de 15 de magnitud. Realiza los siguientes cálculos
Calcula la probabilidad de tener puntaje entre 300 y 310.
Qué porcentaje representa los puntajes entre 320 y 325.
¿Cuál es la probabilidad de obtener menos de 300 puntos?

****

Mª José y Juanma van a comprar un billete de lotería y sólo quedan dos números: el 12345 y el 35915, Mª José prefiere jugar al primero, porque dice que es más fácil que en un sorteo resulten los números consecutivos. Juanma, por el contrario, opina que la lotería es algo azaroso y, por tanto, el número 35915 tiene más posibilidades de salir, ¿cuál es tu opinión al respecto?

Barajas

Se extrae al azar una carta de la baraja española de 40 cartas. Sean los sucesos:
A = salir una carta de espadas B = salir una figura C = salir un oro y un basto D = salir copa, oro, basto o espada
a) Calcula la probabilidad de cada suceso
b) Explica si los sucesos A y B son compatibles
c) Describe el suceso contrario de B y calcula su probabilidad

****

Se saca una carta de la baraja española de 40 cartas.
Halla la probabilidad de que: a) Sea una espada b) Sea una figura c) Sea el rey de bastos d) Sea una figura y un oro e) Sea una copa o un basto f) Sea una copa y un oro g) Sea un rey h) No sea un as i) No sea una copa

****

Extraemos tres cartas de una baraja española: halla la probabilidad de obtener tres ases.
(La baraja española tiene 40 cartas, 4 de ellas son ases).

****

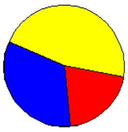
Ruleta

Si se hace girar la ruleta, ¿cuál es la probabilidad de obtener un número primo?

* Si se hace girar la ruleta, ¿cuál es la probabilidad de obtener rojo o amarillo?

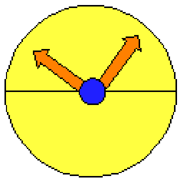
****

Estima, utilizando un transportador de ángulos, la probabilidad de cada sector.
Si Pablo apuesta 120 por el azul, ¿cuánto he de apostar por el amarillo?



****

Las dos agujas están unidas formando un ángulo de 90º. Se lanza la ruleta, ¿cuál es la probabilidad de que caigan en el mismo semicírculo? ¿Y si estuvieran separadas n grados?



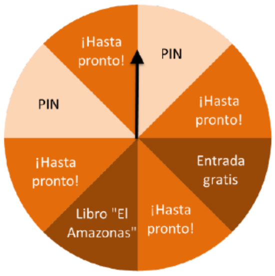
Sabemos que una ruleta se para en rojo el 35% de las veces.
a) Calcula la probabilidad de que se pare en dicho color.
b) Calcula la amplitud de dicho sector.
****

En una ruleta hay tres sectores: rojo, verde y azul. La probabilidad de que se pare en rojo es de 0.35; la amplitud del sector azul es de 45º. ¿Qué probabilidad tiene de pararse en azul?
****

La probabilidad de un color es directamente proporcional al área que ocupa (o lo que es igual, a la amplitud del sector)
Una ruleta tiene tres sectores. El blanco de 150º, el azul de 60º y el rojo. Calcula la probabilidad de que se pare en cada uno de ellos.
En una ruleta de dos colores, rojo y azul, el sector rojo tiene una amplitud 5 veces mayor que el azul.
¿Cuál es la amplitud de cada sector?
¿Cuál es la probabilidad de que se pare en cada uno de los colores?
****

Juan ha conseguido 250 bonos de detergente X y Pedro 1000 bonos. La marca X otorga un premio a quien consigue 1250 bonos y, por esto, deciden jugarse los mismos para que alguien salga beneficiado.
Diseña una ruleta de manera que el juego sea equitativo.
Si disponen de un juego de lotería con las bolas numeradas del uno al cien, establece un sorteo equitativo.
Contesta a las preguntas anteriores en el caso de Juan tuviera 1000 bonos y Pedro 500.
****

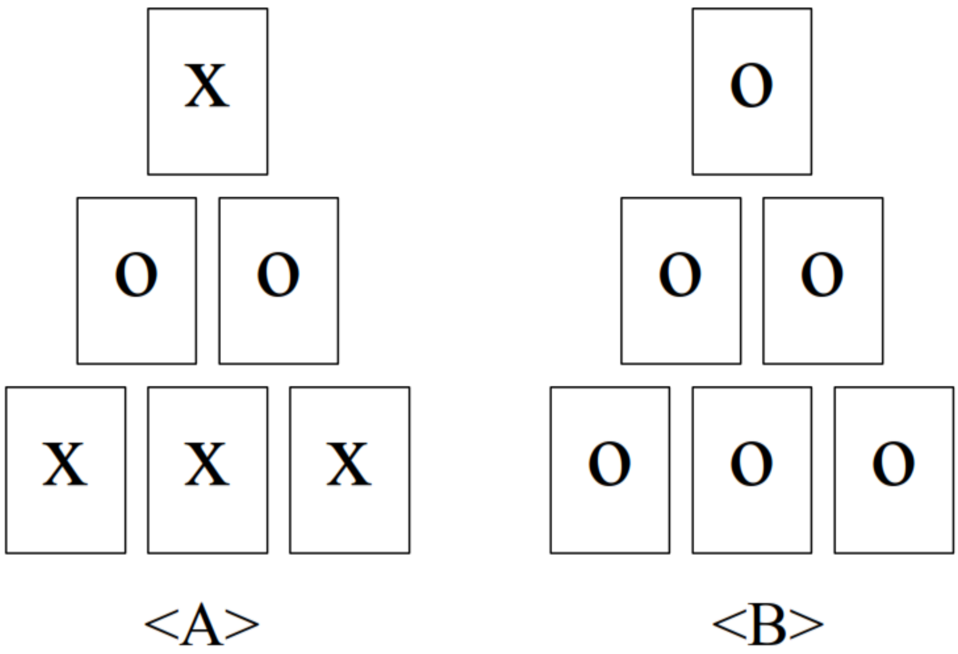
Al finalizar la visita al Museo de Ciencias Naturales hay un juego que consiste en hacer girar una ruleta.
Puedes obtener diferentes premios o ¡nada!
Hacemos girar la ruleta. ¡Prueba tu suerte!



De las siguientes afirmaciones ¿Cuál es la correcta?
A. La probabilidad de conseguir un pin es 1/4
B. La probabilidad de que no tengamos premio es 3/8
C. La probabilidad de conseguir un libro es 2/8
D. La probabilidad de conseguir premio es 3/4
****

Varios

¿Cuántas cartas con X debemos pasar del montón A al B para que, puestas todas las cartas cara abajo (sus dorsos son todos iguales), si elegimos una carta al azar en el montón A la probabilidad de que sea una carta X es la misma que si la elegimos en el montón B? Expón tus razonamientos.



****
Observe estas cinco pajitas...

Para más información les diré que están separadas entre si 4 centímetros. Ahora cojo una aguja de mi madre que resulta tener 2 centímetros de longitud. Y pienso... (buen deporte)... "Si tirase la aguja entre las cinco pajitas (muy largas, por cierto, de manera que para el problema las creeremos de longitud infinita) ¿Cual sería la probabilidad de que la aguja tocase alguna de las pajitas?"
SOLUCIÓN
Se trata de un simple problema de cálculo de probabilidades:

Supongamos que la distancia entre las pajillas es D, y consideremos el centro de una aguja que supondremos de longitud l; la probabilidad de que caiga entre una distancia x y x+dx del punto medio entre dos pajillas es P(l)· dl = dl/D . Por otra parte la aguja formará un ángulo comprendido entre 0 y α con la dirección de las pajillas. La probabilidad de que este ángulo esté comprendido entre α y α +d α es: P(α)· d α = d α /π .

Como son sucesos independientes: P(l, α)= dl· d α/(π D. El centro de la aguja debe encontrarse a una distancia d< l/2 ·sen α). Así pués:

$$P = 2\int_0^{\pi}\int_0^{\frac{l\,\mathrm{sen}\,\alpha}{2}} \frac{dl\cdot d\alpha}{\pi D} = \frac{2}{\pi D}\int_0^{\pi}\frac{l}{2}\,\mathrm{sen}\;\alpha d\alpha = \frac{2l}{\pi D}$$

Como en este caso 2l =D, La probabilidad pedida es sencillamente 1/π).

La probabilidad de que la aguja toque a una pajita puede también analizarse mediante el esquema de la figura. El él se representan todas las formas de caer que tiene la aguja mediante dos coordenadas: La posición centro con relación a la distancia media entre dos pajitas (en vertical) y el ángulo que la aguja forma con la dirección de las pajitas(en horizontal).

Todas las posibles posiciones de la aguja están representadas por los puntos del rectangulo; cuya superficie es D· π .Por ejemplo: El punto situado en (π/4,-D/4) representa la posición de la aguja cuando su centro cae a D/4 por debajo del centro entre dos pajitas formando un angulo de π/4 con ellas. En este caso la aguja no a las pajitas ya que el extremo mas lejano del centro estará a una distancia D/4 + D/4 sen(π/4) =D/4 x 1,7071, que es menor de D/2.

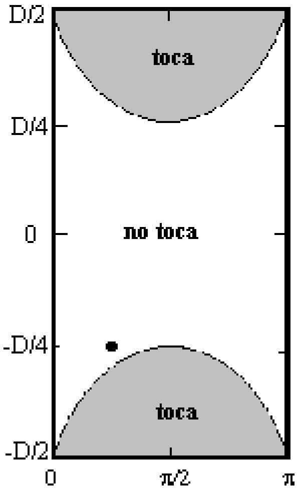
Si el punto que representa la posición de la aguja está en la zona sombreada, la aguja tocará y si está en la zona no sombreada no tocará. Para que la aguja toque es necesario que la (distancia, entre el centro de la aguja y el centro de las pajitas), más (D/4 · sen α) sea mayor que D/2. Con este criterio se deduce la forma de la curva que limita las zonas sombreadas; cuya distancia al borde del rectángulo resulta ser D/4 · sen α)

Para calcular la superficie de una de las areas sombreadas hacemos:

$$S = \int_0^{\pi}\frac{D}{4}\,\mathrm{sen}\;\alpha\cdot d\alpha = \frac{D}{2}$$

Naturalmente la superficie conjunta de las dos zonas sombreadas será el doble: D

La probabilidad pedida será entonces, (Suma de las áreas sombreada) / (área del rectangulo); es decir:



$$\frac{D}{D\,\pi} = \frac{1}{\pi}$$

****

En un pueblo de n+1 habitantes, una persona le rumorea algo a una segunda persona, quien lo repite a una tercera, etc. En cada paso se escoge aleatoriamente al receptor del rumor de entre n personas disponibles.

Encontrar la probabilidad de que el rumor pase r veces sin:

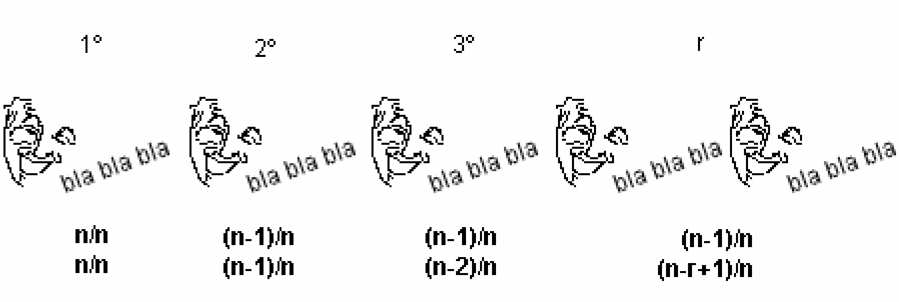
a) regresar al que lo originó.

b) repetírsele a una persona.

SOLUCIÓN

a) Del enunciado parece deducirse que, quien rumorea, repite una sola vez el rumor recibido; aunque si lo vuelve a recibir, vuelve a pasarlo; pero a una sola persona cada vez: de este modo existe un sólo camino de propagación del rumor.
En el esquema inferior se ve la propagación: quien lo origina puede pasárselo a las n personas restantes sin violar la condición impuesta. El resto de los propagantes pude también pasárselo a n personas, pero solo en (n-1) casos se cumple la condición de que no vuelva al origen. La probabilidad de que el paso cumpla la condición será: (n-1)/n
La probabilidad de que el rumor avance r pasos sin regresar al que lo originó será entonces:

$$\left(\frac{n-1}{n}\right)^{r-1} = \left(1-\frac{1}{n}\right)^{r-1}$$



b) Si la condición es que no se repita a ninguna persona que ya lo haya propagado, la probabilidad en cada paso va disminuyendo; así en el paso 3º solo se cumplirá la condición si se le dice a alguna de las (n-2) personas que aún no lo saben, la probabilidad de cumplir la condición será (n-2)/n . La probabilidad de cumplir la condición va disminuyendo hasta llegar al paso r, en que valdrá (n-r+1)/n.
La probabilidad de que todos los pasos cumplan la condición será:
n/n · (n-1)/n · (n-2)/n · (n-3)/n · · · · · · · · (n-r+1)/n

Es decir: $\dfrac{n!}{n^r (n-r)!}$

En una semana ocurren 7 accidentes, ¿cuál es la probabilidad de que ocurra cada día uno?

Solución: $p = \dfrac{7!}{7^7}$

****

Halla la probabilidad de que al lanzar un dado seis veces salgan todas las caras

Solución: $p = \dfrac{6!}{6^6}$

****

Se introducen n bolas en n urnas. Halla la probabilidad de que estén todas ocupadas

Solución: $p = \dfrac{n!}{n^n}$

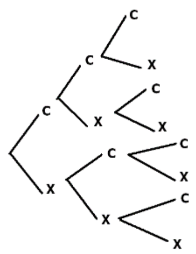
****

Se elige un número natural entre el 1 y el 20 de manera que todos tengan la misma probabilidad de ser escogidos. ¿Cuál es la probabilidad de que el número escogido sea divisible por 2 o por 3?
¿Cuál es la probabilidad de que sea divisible por 3 y no por 6?
****

Si en un experimento aleatorio calculamos la probabilidad de un suceso A, ¿es posible que obtengamos que $p(A) = 2$?
****

Si tenemos dos sucesos A y B de un experimento aleatorio sabemos que $p(A \cap B) = p(A) + p(B) - p(A \cup B)$
a) Verdadero.
b) Falso.
****

Determina el espacio muestral de los siguientes experimentos aleatorios:
a) Elegir al azar una asignatura de 4º ESO de entre Matemáticas, Lengua e Inglés
b) Se lanza un dado dos veces y después se restan los puntos obtenidos
c) Lanzar una moneda 2 veces
d) Lanzar una moneda y luego sacar una bola de una bolsa que tiene 2 bolas (blanca y negra)
a) Lanzar una moneda
b) Lanzar 3 monedas
c) Lanzar una moneda 3 veces



E = { ccc, ccx , cxc , cxx , xcc , xcx , xxc , xxx }

d) Lanzar 3 dados y anotar la suma de los puntos
e) Lanzar un dado que tiene 5 caras con un 6 y 1 cara con un 2
f) Antonio y Jorge eligen cada uno una vocal
g) Se pregunta a 3 personas si fuman o no
a) Lanzar 2 monedas
b) Tirar 3 monedas y anotar el nº de caras y de cruces
c) Lanzar 2 dados y anotar la diferencia de los puntos
d) Tirar un dado que tiene 1 cara roja, 2 caras verdes y 3 caras azules
e) Juan y Luis eligen cada uno un número del 1 al 5
f) Preguntar a 4 personas si consumen o no un determinado producto
g) Tirar 2 dados y anotar el producto de los puntos
h) Sacar una carta de una baraja y observar si es oro, copa, basto o espada
a) Tirar 5 monedas
b) Lanzar un dado 4 veces
c) Extraer al azar con reemplazamiento de 2 cartas de una baraja
d) Extraer al azar sin reemplazamiento de 3 cartas de una baraja
e) Sortear el orden de entrada al cine de Raúl, Luisa, Héctor y Maite
f) Rellenar un bloque de la lotería primitiva
g) Escribir al azar un nº de 5 cifras distintas con las cifras 3, 4, 5 , 6 , 7 y 8
h) Formar al azar un nº de 9 cifras con las cifras del 1 al 9
i) Rellenar una columna de la quiniela de fútbol
j) Elegir al azar 2 sobres de entre 5 sobres

a) Lanzar un dado 3 veces

----
b) Extraer con reemplazamiento 3 cartas de una baraja
c) Sacar 4 cartas de una baraja sin reemplazamiento
d) Posibles ordenaciones, en las 6 primeras posiciones de la clasificación, de los equipos: R. Madrid, F.C. Barcelona, Atco Madrid, Valencia, Sevilla y Villareal
e) Escribir al azar un nº de 5 cifras distintas con los dígitos 1,2,4,5,6,8 y 9
f) Formar un nº de 2 cifras con los dígitos 3,4,5,6 y 7
g) Elegir al azar 3 temas de 50 temas
h) Con las cifras 2 y 3 formar al azar un nº de 4 cifras
a) Elegir al azar una provincia andaluza
b) Extraer sucesivamente dos bolas de una bolsa que contiene 2 bolas rojas y 2 negras.
c) Sumar los puntos obtenidos al tirar un dado dos veces
e) Lanzar una moneda y luego sacar una bola de una bolsa que tiene 3 bolas (roja, verde, azul)
a) Elegir al azar una asignatura de 4º ESO de entre Matemáticas, Lengua e Inglés
b) Se lanza un dado dos veces y después se restan los puntos obtenidos c) Lanzar una moneda 2 veces
d) Lanzar una moneda y luego sacar una bola de una bolsa que tiene 2 bolas (blanca y negra)
Sacamos una bola de una bolsa que contiene 3 bolas negras, 2 blancas y 1 azul; después, sin devolverla a la bolsa, sacamos otra bola.
a) Lanzar una moneda
b) Lanzar 3 monedas
d) Lanzar 3 dados y anotar la suma de los puntos
e) Lanzar un dado que tiene 5 caras con un 6 y 1 cara con un 2
f) Antonio y Jorge eligen cada uno una vocal
g) Se pregunta a 3 personas si fuman o no
h) Una caja tiene 5 tornillos de los cuales 3 son defectuosos. Sacamos al azar tornillos uno tras otro hasta encontrar los defectuosos
a) Lanzar 2 monedas
b) Tirar 3 monedas y anotar el nº de caras y de cruces
c) Lanzar 2 dados y anotar la diferencia de los puntos
d) Tirar un dado que tiene 1 cara roja, 2 caras verdes y 3 caras azules
e) Juan y Luis eligen cada uno un número del 1 al 5
f) Preguntar a 4 personas si consumen o no un determinado producto
g) Tirar 2 dados y anotar el producto de los puntos
h) Sacar una carta de una baraja y observar si es oro, copa, basto o espada
¿Cuál es el espacio muestral de la luz de un semáforo?
a) Rojo, Verde, Amarillo b) Rojo c) Azul d) Amarillo, Verde
****
Calcula el número total de resultados de los siguientes experimentos:
a) Sacar una a una las bolas de una bolsa que contiene 5 bolas rojas, 3 negras y 6 verdes
b) Contestar a un examen tipo test en el que cada pregunta tiene 3 respuestas posibles
c) Colocar a 12 alumnos en 12 sillas
d) Lanzar una moneda 10 veces
e) Sacar 5 cartas de la baraja sin reemplazamiento
f) De un cuadro con los números del 1 al 100, elegir 9 números
g) Mezclar cuatro colores de los siete del arco iris
a) Formar números de 5 cifras distintas a partir de los dígitos 1 , 2 , 5 , 7 , 8 y 9
b) Lanzar a la vez 3 dados de diferente color
c) Sacar 3 cartas a la vez de la baraja
d) Sacar 4 cartas de la baraja con reemplazamiento
e) Tres alumnos eligen una consonante por turno de las 22 posibles (pueden repetir letra)
f) Tres alumnos eligen una consonante por turno de las 22 posibles (no pueden repetir letra)
g) Colocar en una fila las 27 letras del alfabeto
h) Realizar todos los productos de dos factores usando los dígitos 1, 2, 3, 5 y 7 (no se pueden repetir los factores)
i) Realizar todos los productos de dos factores usando los dígitos 1, 2, 3, 5 y 7 (se pueden repetir los

---

factores)
j) Formar números de 7 cifras con los dígitos impares
k) Formar números de 5 cifras a partir de los dígitos 1,2,3,4,5,6,7,8,9
l) Un camarero descansa 10 días cualesquiera del mes de julio. ¿De cuántas formas los puede elegir?
****

De 100 estudiantes universitarios, se conoce que 45 practican fútbol, 20 practican natación, 32 practican tenis; 15 practican fútbol y tenis, 7 practican tenis y natación, 10 practican fútbol y natación, y 30 de los estudiantes no practican ningún deporte. ¿Cuántos estudiantes practican sólo natación?
****

Sea E = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10} el espacio muestral de un experimento aleatorio y sean los sucesos
A = "salir número primo" B = "salir número impar" C = "salir un 1".
a) Calcula la probabilidad de los sucesos: A , B , C , A^c , B^c
$A \cap B$, $A \cup B$, $A^c \cap B^c$, $(A \cap B)^c$, $A - B$ y $B - A$.
b) Comprueba que $C \subset B$ y por tanto $p(C) < p(B)$
c) Comprueba que A y C son incompatibles y por tanto $p(A \cup C) = p(A) + p(C)$
****

Tenemos una urna con nueve bolas numeradas del 1 al 9. Realizamos el experimento, que consiste en sacar una bola de la urna y anotar el número. Calcula los sucesos: a) A ="salir un número primo"
b) B ="salir un número mayor que 3" c) C = "Salir un 0"
d) D = "Salir un número menor que 10" e) $A \cup B$ f) A^c g) B^c . ¿Los sucesos A y B son compatibles?
****

Se lanza un dado de 6 caras. Sean los sucesos: A = salir un número menor que 5 , B = salir un número primo. Calcula $A \cup B$ y $A \cap B$
$A \cup B$ = " Salir menor que 5 o número primo " = { 1 , 2 , 3 , 4 , 5 }
$A \cap B$ = " Salir menor que 5 y primo " = { 2 , 3 }
****

Se lanza un dado dodecaédrico. Sea A = múltiplo de 4 B = múltiplo de 6. Calcula $A \cup B$ y $A \cap B$
****

Lanzamos un dado dodecaédrico (12 caras), describe los sucesos:
a) A = salir un número mayor que 7
b) B = salir un múltiplo de 4
c) C = salir un número menor que 3
d) D = salir un número de dos cifras
e) E = salir un número mayor que 12
f) F = { 2 , 3 , 5 , 7 , 11 } g) G = { 2 , 4 , 6 , 8 , 10 , 12 }
h) H = salir un número menor que 13
i) ¿Cuántos sucesos elementales tiene el experimento?
j) Describe el suceso contrario de los sucesos A , B , D y F
k) Determina si los sucesos B y C son compatibles
l) ¿ Y los sucesos A y B?
****

Los conjuntos A = {1, 3, 5} y B = {2, 4} son sucesos del juego de tirar un dado. Hallar A – B
****

Se saca una carta de la baraja. Sean A = salir un 4 B = salir una espada. Determina los sucesos: A U B ,
$A \cap B$, $\bar{A}$ y $\bar{B}$
****

Un jugador lanza a la vez un dado y una moneda.
a) Construya el espacio muestral de este experimento aleatorio.
b) Determine la probabilidad del suceso A: “El jugador obtiene un número par en el dado y cruz en la moneda”.
c) Si sabemos que en la moneda ha salido cara, ¿cuál es la probabilidad de que en el dado haya salido más de 3 puntos?

Se consideran los sucesos A y B.
a) Exprese, utilizando las operaciones con sucesos, los siguientes sucesos:
1. Que no ocurra ninguno de los dos.
2. Que ocurra al menos uno de los dos.
3. Que ocurra B, pero que no ocurra A.

b) Sabiendo que p(A) = 0,5 p(B) = 0,5 p(A / B) = 0,3 halle p(A U B)

Sea el experimento aleatorio consistente en lanzar 3 veces una moneda y observar el resultado.
a) Escriba el espacio muestral asociado y las probabilidades de los sucesos elementales.

b) Sean los sucesos A: “obtener al menos una cara”, B: “obtener cara en solo uno de los tres lanzamientos”. Calcule p(A) y p(B). ¿Son independientes A y B ?

Considera el siguiente juego para un jugador:
El jugador extrae una carta de una baraja española de 40 cartas; si la carta es una figura, pierde el juego y ha de retirarse; si la carta no es figura, el jugador lanza a continuación una moneda. Si el resultado es cara, pierde el juego y se retira, si el resultado es cruz el jugador gana.
a) Dibuja el árbol correspondiente.
b) Calcula la probabilidad que tiene el jugador de perder el juego.

Una baraja de cartas española se compone de 40 cartas, 10 de cada palo (oros, copas espadas y bastos); en cada palo hay cartas ordenadas : 1,2,…,7, sota, caballo y rey

En un hospital se han producido 200 nacimientos en un mes. De ellos, 105 son varones y, de éstos, 21 tienen los ojos azules. También se ha observado que 57 de las niñas nacidas en ese mes no tienen los ojos azules.
Organicemos los datos en una tabla (llamada tabla de contingencia)

	varones	hembras	Total
tienen ojos azules	21	38	59
no tienen ojos azules	84	57	141
Total	105	95	200

Si se elige una persona al azar, usando la tabla, podemos calcular, por ejemplo, las siguientes probabilidades:
$\text{p(de que sea hembra)} = 95/200 = 0{,}475 = 47{,}5\%$

$\text{p(de que sea varón con ojos azules)} = 21/200 = 0{,}105 = 10{,}5\%$

$\text{p(de que no tenga los ojos azules)} = 141/200 = 0{,}705 = 70{,}5\%$

En un hospital se han producido 40 nacimientos y los datos se han registrado en la siguiente tabla

	varones	hembras	Total
tienen ojos azules	8	7	15
no tienen ojos azules	9	16	25
Total	17	23	40

Si se elige un bebé al azar, ¿cuál es el porcentaje de probabilidad de que sea una hembra con los ojos azules?

La siguiente tabla muestra la distribución de los concejales en función de su experiencia política.

	Experiencia previa	Nuevos en el cargo
Hombre	10	5
Mujer	7	3

a) ¿Qué porcentaje de concejales tienen experiencia en el cargo?
b) ¿Qué porcentaje son mujeres?
c) Del grupo de concejales nuevos en el cargo, ¿qué porcentaje son hombres?
d) Del grupo de las mujeres, ¿qué porcentaje tienen experiencia previa?
****
En un hospital se han producido 100 nacimientos en un mes y los datos se han registrado en la siguiente tabla de contingencia

	varones	hembras	Total
tienen ojos azules	10	15	25
no tienen ojos azules	30	45	75
Total	40	60	100

Si se elige un bebé al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea una hembra con los ojos azules?
****

Para poder atender a las necesidades de sangre generadas por los accidentes de tráfico un hospital ha realizado análisis de sangre a 200 personas para determinar su grupo sanguíneo así como el Rh. Han recogido los datos que se presentan en la siguiente tabla.

	Grupo A	Grupo B	Grupo AB	Grupo O	TOTAL
RH +		12		70	162
RH -	18		1		
TOTAL		15	7		200

a) Completa los datos que faltan en la tabla anterior.
b) ¿Qué porcentaje de personas tiene RH+?
c) De las personas con grupo sanguíneo B, ¿qué porcentaje tiene RH+?

En un estudio realizado en una máquina tragaperras, durante una semana, ha dado los siguientes premios.

PREMIOS	0	1	3	10	60
Nº DE VECES	1500	250	100	75	1

Halla la probabilidad de los siguientes sucesos:
A.- Que la máquina tragaperras no dé ningún premio
B.- Que la máquina tragaperras entregue un premio mayor o igual de 10 €
****
El número de administrativos y obreros que hay en una fábrica según el sexo vienen dados en la siguiente tabla:

	Hombres	Mujeres
Administrativos	4	6
Obreros	70	50

Se desea seleccionar al azar a una persona de ellas, para lo cual se lanza una moneda no trucada. Si sale cara se elige al azar a un administrativo y el caso contrario a un obrero.
a) Calcular la probabilidad de que la persona seleccionada pertenezca al grupo de los administrativos.
b) Calcular la probabilidad de que la persona seleccionada sea una mujer.
c) Calcular la probabilidad de que la persona seleccionada sea un hombre.
d) Calcular la probabilidad de que la persona seleccionada sea mujer y pertenezca al grupo de los obreros.
****
En la siguiente tabla se recoge el número niños y niñas en dos clases de 1º y 2º de E.S.O.

Curso	Niños	Niñas
1º	14	16
2º	18	12

Se lanza un dado no trucado con sus caras numeradas del 1 al 6 y si sale menor que 3 se selecciona un alumno de 1º y en caso contrario uno de 2º. Calcular:
a) Probabilidad de que sea un niño de 1º
b) Probabilidad de que sea un niño de 2º.
c) Probabilidad de que sea niño.
d) Probabilidad de que sea niña.
****
En un edificio viven 120 personas, de las cuales 65 son mujeres y 55 hombres. Se sabe, además, que 42 de estas personas están casadas y 44 son mujeres solteras.
A. Completa la siguiente tabla con los datos anteriores y obtenga los que faltan.

	Casados	Solteros	totales
hombres			55
mujeres		44	65
totales			

Calcule la probabilidad de que al elegir al azar una persona del edificio sea un hombre casado

****
Se conocen los siguientes datos de un grupo de estudiantes, relativos a los resultados de un examen:

	Aprueba	Suspende
Hombre	30	70
Mujer	40	50

Se elige en ese grupo una persona al azar. Calcule la probabilidad de que:

	Aprueba	Suspende	total
Hombre	30	70	100
Mujer	40	50	90
total	70	120	190

a) Suspenda. Soluc : $\frac{120}{190} = \boxed{\frac{12}{19}}$

b) Sea un hombre sabiendo que ha suspendido. Soluc : $\frac{70}{120} = \boxed{\frac{7}{12}}$

c) Sea mujer y apruebe el examen. Soluc : $\frac{40}{190} = \boxed{\frac{4}{19}}$

d) No sea mujer Soluc : $\frac{100}{190} = \boxed{\frac{10}{19}}$

Una urna tiene 200 bolas negras y 100 blancas. Se sabe además que 25 son bolas blancas sin marcar y 175 bolas negras marcadas. Se extrae una bola al azar.

a) Haz la tabla de contingencia. b) Calcula la probabilidad de que sea blanca.

c) ¿Cuál es la probabilidad de que sea blanca sabiendo que está marcada?

d) ¿Cuál es la probabilidad de que sea negra y esté marcada?

e) ¿Son independientes los sucesos A = "sacar bola marcada" y B = "sacar bola blanca"?

Solución

a)

	blancas	negras	Total
marcadas	75	175	250
sin marcar	25	125	150
Total	100	200	300

b) $\frac{100}{300} = \frac{1}{3} \cong 33{,}33\%$

c) $\frac{75}{250} = 30\%$

d) $\frac{175}{300} \cong 58{,}3\%$

e) $\left[\begin{array}{l} p(A \cap B) = \frac{75}{300} = \frac{1}{4} \\ p(A).p(B) = \frac{250}{300} \cdot \frac{100}{300} = \frac{5}{18} \end{array}\right. \Rightarrow p(A \cap B) \neq p(A).p(B) \Rightarrow$ A y B son dependientes

En IES de 400 alumnos, el 45% son chicos. También se sabe que hay 108 chicos que aprueban el curso y 77 chicas que suspenden.

a) Haz la tabla de contingencia

---

	chicos	chicas	total
aprueban	108	143	251
suspenden	72	77	149
total	180	220	400

45% de 400 = 180

b) Si se elige una persona al azar, halla la probabilidad de que esté suspenso sabiendo que hemos elegido un chico

$$p(\text{suspender/chico}) = \frac{72/\cancel{400}}{180/\cancel{400}} = \frac{72}{180} = 40\%$$

a) Calcula la probabilidad de que la persona elegida apruebe el curso $\frac{251}{400} = 62,75\%$

c) Calcula la probabilidad de que sea chica, sabiendo que se ha elegido una persona que suspende

$$\frac{77}{149} = 51,68\%$$

d) ¿Son independientes los sucesos A = aprobar el curso , B = ser chica?

$$\left\{ \begin{array}{l} p(A \cap B) = \dfrac{143}{400} = 0,3575 \\ p(A) \,.\, p(B) = \dfrac{251}{400} \,.\, \dfrac{220}{400} = 0,6275 \,.\, 0,55 = 0,3451 \end{array} \right. \rightarrow Luego\ \ p(A \cap B) \neq p(A) \,.\, p(B)$$

Por tanto son dependientes

Se hace una encuesta en un grupo de 120 personas, preguntando si les gusta leer y ver la televisión. Los resultados son:

- A 32 personas les gusta leer y ver la tele.
- A 92 personas les gusta leer.
- A 47 personas les gusta ver la tele.

Si elegimos al azar una de esas personas:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que no le guste ver la tele?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que le guste leer, sabiendo que le gusta ver la tele?
c) ¿Cuál es la probabilidad de que le guste leer?

Vamos a organizar la información en una tabla de doble entrada, completando los datos que faltan:

	VEN LA TELE	NO VEN LA TELE	
LEEN	32	60	92
NO LEEN	15	13	28
	47	73	120

Llamemos L = "Le gusta leer" y T = "Le gusta ver la tele".

a) $P[\text{no } l] = \frac{73}{120} = 0,61$ b) $P[L/T] = \frac{32}{47} = 0,68$ c) $P[L] = \frac{92}{120} = \frac{23}{30} = 0,77$

La siguiente tabla da el número de alumnos que han acabado sus estudios en las Escuelas Universitarias de Valencia durante el curso 1996/97

	Mujeres	Hombres	Total
Arquitectura Técnica	109	234	343
Informática	84	231	315
Ingeniería Técnica Industrial	102	273	375
Ingeniería Técnica Agrícola	106	149	255

a) Del total de alumnos/ as, se selecciona uno al azar. Calcula la probabilidad de que sea mujer.
b) Entre el total de los alumnos/ as de Informática se selecciona uno al azar.
b1. Calcula la probabilidad de que sea mujer.
b2. Calcula la probabilidad de que sea hombre.
****

En una encuesta sobre hábitos de la juventud se ha entrevistado a 1000 jóvenes entre 16 y 30 años. Una de las preguntas realizada es: ¿tienes coche propio? En la siguiente tabla se muestran los datos recogidos en esta pregunta separados por el sexo del entrevistado:

	Hombres	Mujeres
Sí tiene coche	240	250
No tiene coche	280	230

a) Si se elige una persona de la muestra, ¿qué probabilidad se tiene de que sea mujer?
b) ¿Cuál es la probabilidad de al elegir una persona de la muestra sea mujer y no tenga coche?
c) Entre todas las mujeres, ¿cuál es la probabilidad de que elegida una al azar sí tenga coche?
****

La siguiente tabla muestra la distribución de los mil socios de un club deportivo, según el sexo y si juegan o no a baloncesto. Completa la tabla para contestar las siguientes preguntas.

	Hombres	Mujeres	Total
Juegan al baloncesto	147	135	
No juegan al baloncesto	368	350	
Total			1000

a) ¿Cuál es la probabilidad de que un socio elegido al azar sea un hombre que juega al baloncesto?
b) Entre todos los hombres, ¿cuál es la probabilidad de que uno elegido al azar no juegue al baloncesto?
c) ¿Cuál es la probabilidad de que elegida una persona al azar entre todos los socios, no juegue al baloncesto?
****

Varios aficionados al fútbol organizan un torneo entre los empleados de cuatro empresas asturianas. Entre jugadores, entrenadores y organizadores, se han juntado 60 personas.
El 40% de los aficionados tiene menos de 30 años, el 30% tiene entre 30 y 39 años, el 20% tiene entre 40 y 49 años y el resto tiene 50 años o más.
a) Elabore una tabla de frecuencias absolutas y relativas.
b) Represente en un histograma de frecuencias las edades del grupo.
Los datos de los partidos disputados por el equipo son:

	Casa	Fuera	Total
Ganados		3	
Perdidos	5		
Total		13	28

a) Complete la tabla anterior.
b) ¿Cuál es la probabilidad de que, si juega en casa, pierda?
c) ¿Cuál es la probabilidad de que este equipo gane un partido?
d) Si ha ganado un partido, ¿cuál es la probabilidad de que haya jugado en campo contrario?
****

En una carretera en la que ha habido muchos accidentes en los últimos meses, la DGT colocó un radar para medir la velocidad, en kilómetros por hora, de los vehículos que pasan durante una hora y a partir de esos datos hacer un estudio estadístico y poder extraer conclusiones fiables.
En ese peligroso tramo de carretera el número de accidentes en los últimos meses ha sido muy elevado. Además de la velocidad inadecuada, la DGT baraja otros factores como la alcoholemia.
Los datos obtenidos por la DGT se recogen en la siguiente tabla.

Accidentes	Con víctimas	Sin víctimas	TOTAL
Positivo test alcoholemia	20	8	28
Negativos test alcoholemia	16	36	52
TOTAL	36	44	80

a) ¿En qué porcentaje de los accidentes ha habido víctimas?
b) Si se ha sufrido un accidente, ¿cuál es la probabilidad de dar positivo en el test de alcoholemia?
c) Si no ha habido víctimas, ¿qué probabilidad hay de dar negativo en el test de alcoholemia?
****

Se ha realizado una encuesta entre los clientes de una librería para saber qué producto han comprado.

	DVD	Libro
Hombre	8	4
Mujer	12	6

Calcule la probabilidad de que, al elegir una persona al azar:
a) Sea hombre.
b) Haya comprado un libro.
c) Sea una mujer que ha comprado un DVD.
d) Sabiendo que es un hombre, haya comprado un libro.
****

En una localidad asturiana viven 3000 personas entre 25 y 55 años. En la siguiente tabla se recogen datos sobre las que son donantes.

	DONANTES	NO DONANTES	TOTAL
Hombres		400	
Mujeres	1200		
TOTAL		1000	3000

a) Complete la tabla.
b) ¿Qué porcentaje de personas son donantes?
c) ¿Cuál es la probabilidad de que una persona no donante sea hombre?
d) ¿Cuál es la probabilidad de que una persona, sabiendo que es mujer, sea donante?
****

En el último año se han presentado en esta autoescuela a las pruebas para obtener el carné de conducir 100 personas, de la cuales 55 son mujeres y de estas, aprobaron a la primera 44. De los hombres que se examinaron, aprobaron a la primera 36. El resto de las personas superaron la prueba en la segunda convocatoria.
a) Con los datos anteriores complete la siguiente tabla.

	Mujeres	Hombres	Total
Aprobaron 1ª convocatoria			
Aprobaron 2ª convocatoria			
Total			

b) A la vista de los datos, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es correcta? Señale la respuesta correcta.
A. El porcentaje de aprobados en la primera convocatoria ha sido mayor en el caso de las mujeres.
B. El porcentaje de aprobados en la primera convocatoria ha sido mayor en el caso de los hombres.
C. El porcentaje de aprobados en la primera convocatoria ha sido igual en el caso de las mujeres que de los hombres.

c) Calcula la probabilidad de que, si se elige una persona al azar, haya aprobado en la segunda convocatoria.
d) Calcula la probabilidad de que, si se elige una persona al azar entre las que han aprobado en la primera convocatoria, sea hombre.
****

Han encargado una encuesta para conocer qué suplementos leen los hombres y cuales las mujeres en la zona central de Asturias. Los resultados se recogen en la siguiente tabla:

	HOMBRES	MUJERES	TOTAL
DEPORTES	30		
ECONOMÍA		60	100
CULTURA			78
TOTAL	100		220

a) Completa la tabla.
b) Si se escoge un lector al azar, ¿cuál es la probabilidad de que lea los Deportes? Redondee el resultado a las centésimas.
c) Si se escoge un lector al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer? Redondee el resultado a las centésimas.
d) Si se escoge un lector al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer y lea el suplemento de Economía? Redondee el resultado a las centésimas.
e) Si se escoge un lector al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea hombre sabiendo que lee el suplemento de Cultura? Redondee el resultado a las centésimas.
****

En una encuesta se preguntaba a 100 personas su edad y sus hábitos de reciclaje.

	Mayor de 30 años	Menor de 30 años	TOTAL
Recicla	45	25	70
No recicla	20	10	30
TOTAL	65	35	100

a. ¿Cuál es la probabilidad de que una de esas personas elegida al azar recicle?
b. Si, entre las personas encuestadas, se elige al azar una persona de más 30 años, ¿cuál es la probabilidad de que recicle? Redondee el resultado a las centésimas.
****

Suponemos que la salud es independiente del sexo:
A. Completa la siguiente tabla con los resultados de las personas encuestadas y halla la tabla de probabilidades asociada:

Persona	Sana	Enferma	**Total**
Mujer	50	40	90
Hombre			
Total	130	70	

Probabilidades:

Persona	Sana	Enferma	**Total**
Mujer			
Hombre			
Total			1

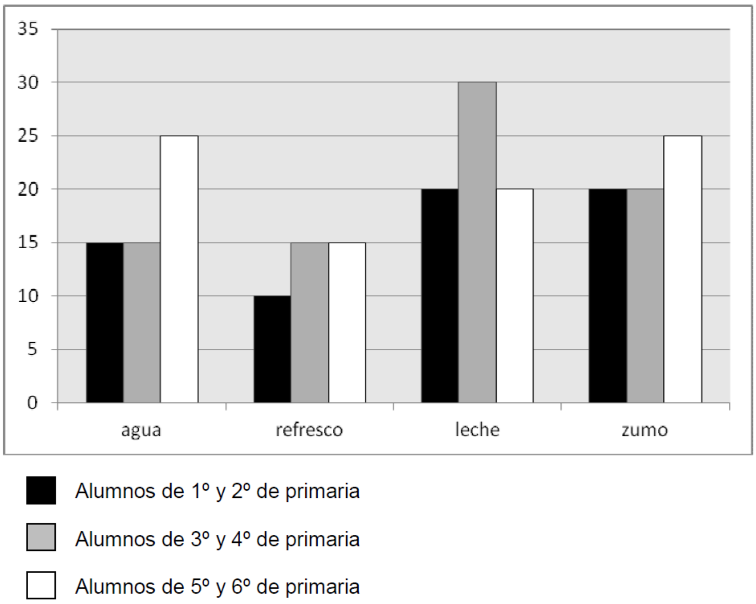
B. Calcula la probabilidad de que una persona sana sea mujer.

C. Averigua la probabilidad de que, siendo hombre, esté enfermo.

Participas en un sorteo en el que puedes ganar un ordenador de sobremesa o un portátil. Para ello, se introducen en una urna, 50 papeletas.
Tres de ellas tienen dibujado un ordenador de sobremesa, 4 un portátil y el resto están en blanco.
a. ¿Qué probabilidad hay de que en una extracción pueda llevarse un ordenador de sobremesa? y ¿un portátil?
b. ¿Qué probabilidad de hay de que al sacar dos papeletas con devolución, obtengamos dos portátiles?

En la fábrica de focos A, se sabe que la producción tiene un 20% de focos defectuosos; mientras que la de la fábrica B tiene un 25%. Si se junta el mismo número de focos de cada fábrica y se escoge uno al azar, ¿cuál es la probabilidad de que el foco escogido sea de la fábrica A y no tenga defecto?

En el siguiente gráfico se representa en el eje vertical el número de niños de un colegio que beben cada una de las bebidas indicadas en su casa para cenar:



a) ¿Cuántos niños hay en el colegio de 5º y 6º de primaria?
b) ¿Qué porcentaje de los niños de 1º y 2º de primaria bebe leche en la cena?
c) Representa en un diagrama de sectores los porcentajes totales de los niños que beben cada bebida.
d) ¿Qué probabilidad se tiene de elegir un niño del colegio al azar y que sea de 3º y 4º de primaria y que beba zumo en la cena?
e) De los niños que beben agua para la cena, ¿qué porcentaje son de 3º y 4º de primaria?
****

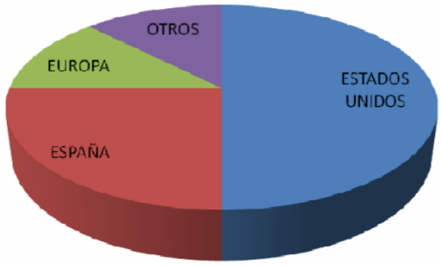
A un instituto de secundaria le han premiado con un viaje para una de sus clases. Para decidir qué alumnos van al viaje, optan por un sorteo público, que consiste en insertar en un tarro papeletas con el curso (1º, 2º, 3º y 4º) y en otro papeletas con el grupo (A, B, C, D y E), y que una mano inocente haga una extracción de cada urna.

A. Escribe el espacio muestral asociado al experimento elegir a los premiados.
B. Calcula la probabilidad de que el premio lo reciban alumnos del primer ciclo de la ESO (1º o 2º).
C. Calcula la probabilidad de que el premio recaiga sobre 3ºA.
D. Calcula la probabilidad de que sea un grupo de la letra B el premiado.
E. Calcula la probabilidad de que el premiado sea un grupo con vocal y del segundo ciclo (3º o 4º).

****

El cine es uno de los grandes inventos del siglo pasado. Nació como espectáculo y diversión pero también ha sido siempre un arte, un documento de la vida de la época y una gran industria que mueve mucho dinero.

En unos cines asturianos se han exhibido este año 392 películas. El siguiente gráfico muestra la distribución de esas películas clasificadas por su país de origen.



a) Completa la siguiente tabla

	% películas exhibidas	Número de películas
Estados Unidos		
España		
Europa		
Otros países		

b) ¿Cuál es la probabilidad de que si va al cine y elige una película al azar un día cualquiera, esa película sea española?

A. 0,15
B. 0,25
C. 0,50
D. 0,90

****

En un pueblo hay 100 jóvenes; 40 de los chicos y 35 de las chicas juegan al tenis. El total de chicas en el pueblo es de 45. Si elegimos un joven de esa localidad al azar:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que sea chico?
b) Si sabemos que juega al tenis, ¿cuál es la probabilidad de que sea chica?
c) ¿Cuál es la probabilidad de que sea un chico que no juegue al tenis?

En un viaje organizado por Europa para 120 personas, 48 de los que van saben hablar inglés, 36 saben hablar francés, y 12 de ellos hablan los dos idiomas.

Escogemos uno de los viajeros al azar.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que hable alguno de los dos idiomas?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que hable francés, sabiendo que habla inglés?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que solo hable francés?

En una empresa, el 60% de sus empleados habla inglés, y de éstos, el 40% habla también alemán. De los que no hablan inglés, el 25% habla alemán. Se escoge un empleado al azar:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que hable ambos idiomas?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que hable alemán?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que, sabiendo que habla alemán, hable también inglés?

En una cadena de televisión se hizo una encuesta a 2 500 personas para saber la audiencia de un debate y de una película que se emitieron en horas distintas: 2 100 vieron la película, 1 500 vieron el debate y 350 no vieron ninguno de los dos programas. Si elegimos al azar a uno de los encuestados:
a) ¿Cuál es la probabilidad de que viera la película y el debate?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que viera la película, sabiendo que no vio el debate?
c) Sabiendo que vio la película, ¿cuál es la probabilidad de que viera el debate?

En una clase de bachillerato hay 19 chicos y 16 chicas, de ellos 4 chicos y 3 chicas son zurdos y el resto diestros. Seleccionamos un alumno al azar, calcule las siguientes probabilidades:
a) Que sea un chico.
b) Que sea una chica.
c) Que sea chica y zurda.
d) Sabemos que es chico, ¿cuál es la probabilidad de que sea diestro?
****

En cierta región de España se sabe que la probabilidad de que llueva el viernes es 70%, de que llueva el sábado es 40% y de que llueva el domingo es 80%.
Entonces, por ejemplo, podemos calcular las siguientes probabilidades:

p(de que llueva el fin de semana) = 0,7 . 0,4 . 0,8 = 0,224 = 22,4%

p(de que llueva el viernes, el domingo y no el sábado) = 0,7 . 0,8 . 0,6 = 0,336 = 33,6%

En una localidad se han estimado las siguientes probabilidades respecto al tiempo durante el primer fin de semana del mes de junio:
P(día soleado)= 0,4 P(día nublado)= 0,25 P(día lluvioso)= 0,35
a) Determina la probabilidad de que sábado y domingo luzca el sol.
b) Determina la probabilidad de que un día haga sol y otro llueva.
c) Determina la probabilidad de que ninguno de los días sea soleado.
****
En el primer curso de un ciclo formativo de grado superior de un I.E.S. se han matriculado 20 chicas y 10 chicos. Sabiendo que el 25% de las chicas usan diariamente el transporte público para asistir a clase y que también lo usan el 40% de los chicos.
a) Realizar el diagrama de árbol o la tabla de datos correspondiente.
b) Determinar la probabilidad de que al seleccionar un alumno al azar de dicho ciclo utilice el transporte público para asistir a clase.
c) Determinar la probabilidad de que al seleccionar un alumno al azar de dicho ciclo sea chica y utilice diariamente el transporte público para asistir a clase.
****

Usando combinatoria

Entre 5 amigos, Ana, Juan, Maite, Luis y Susana se sortea el orden de entrada al cine. ¿Cuál es la probabilidad de que las mujeres entren antes que los hombres?
****

Entre los colores rojo, verde, azul, blanco y negro se eligen al azar 2 colores. ¿Cuál es la probabilidad de que los colores elegidos sean el blanco y el negro?
****

En una fila con 7 sillas se sientan arbitrariamente Juan, María, Luis, Alfredo, Susana, Marta y Eva. ¿Cuál es la probabilidad de que los hombres queden intercalados entre las mujeres?
****

10 personas se ordenan aleatoriamente, y se supone que todas las ordenaciones posibles tienen la misma probabilidad. Hállese la probabilidad de que 2 personas determinadas estén contiguas si se ordenan: a) en una hilera b) en un círculo.

SOLUCIÓN

a) En hilera:

Hay 9 formas distintas de ocupar dos sillas en un total de 10 dispuestas en hilera. En efecto: una es ocupar las dos de la izquierda dejando libres las 8 restantes, después se va avanzando hasta el extremo derecho lo que hace un total de 9 posiciones.

Si distinguimos la posición relativa de los sedentes se tiene un total de 18 posiciones. Las 8 sillas restantes pueden ser ocupadas por las 8! permutaciones posibles. En conclusión: existen $18 \cdot 8! = 2 \cdot 9!$ Formas de que dos personas determinadas se sienten juntas. Como hay 10! Formas de acoplar a las 10 personas, la probabilidad pedida es: $2 \cdot 9! / 10! = 1/5$

b) En corro:

Ahora hay 10 formas distintas de ocupar dos sillas contiguas. Calculando como antes se obtiene: $20 \cdot 8!/10! = 2 \cdot 8!/9! = 2/9$
****

¿Cuál es la probabilidad de que toque el gordo de la Lotería de Navidad?
****

La Lotería Primitiva de España es un juego de azar que consiste esencialmente en elegir 6 números diferentes entre 1 y 49, y posteriormente comprobar cuáles de ellos coinciden con los números de 6 bolas extraídas de un bombo de 49, numeradas del 1 al 49. Es evidente que es un juego de azar puro y que no hay estrategias que valgan.

Si observamos la probabilidad de acertar los 6 números, es decir, la combinación ganadora, y teniendo en cuenta, mediante un sencillo cálculo, que el número del total de apuestas posibles es el número de combinaciones de 49 números tomados en grupos de 6, o sea, (49 . 48 . 47 . 46 .45 . 44) : (6 . 5 . 4 . 3 . 2) = 13.983.816 , nos encontramos con que dicha probabilidad es mínima, en concreto de 1 entre 13.983.816 . No es extraño, por lo tanto, que a veces ocurra que no haya nadie que obtenga el pleno de 6 aciertos.

Lógicamente, la probabilidad de acertar 5, 4 ó 3 números, que también obtienen premios acordes con la dificultad, va aumentando a medida de que el número de aciertos sea menor. Pero lo verdaderamente curioso es que la mayoría de las apuestas que se realizan (casi el 90%) sólo coinciden con la apuesta ganadora en un número o en ninguno. Es más, incluso puede resultar sorprendente que lo más probable es no acertar ni un solo número. En concreto, y con sencillos cálculos de combinatoria tenemos que la probabilidad de no tener premio es:

-Aproximadamente un 43,60 % , la de no tener acierto alguno.

-Alrededor de un 41,30%, la de tener sólo un acierto.

-Y un 13,24 % sería la probabilidad de tener justo dos aciertos.
****

Una caja contiene 2 medias blancas, 2 medias azules y dos medias rojas. Se sacan 2 medias al azar. Encuentre la probabilidad de que sean pareja (del mismo color).

Un estudiante es seleccionado al azar para representar una clase con 5 alumnos de 3º ESO, 4 alumnos de 4º ESO, 8 alumnos de 1º Bachillerato y 3 alumnos de 2º Bachillerato. Encuentre la probabilidad de que el estudiante esté:

a) en 3º ESO b) en 1º Bachillerato c) en 4º ESO o en 2º Bachillerato

****

Varios

La información del Instituto Nacional de Estadística (INE) señala que, en el año 1990, la población en Chile era de 13 099 513 habitantes; en ese mismo año la fuerza de trabajo era de 4 805 762 personas. ¿Cuál es la probabilidad en ese año de que, al seleccionar una persona al azar, ésta pertenezca a la fuerza de trabajo? Si la tasa de participación de la mujer en la fuerza de trabajo era de 30,5%, y el total de mujeres era de 6 627 601, ¿cuál es la probabilidad, en ese año de que, al seleccionar una persona al azar, ella sea mujer y pertenezca a la fuerza de trabajo?

****

Escribo tres cartas y los tres sobres correspondientes. Introduzco cada carta en un sobre al azar, es decir sin mirar el destinatario. Averiguar razonadamente cuál es la probabilidad de que haya introducido sólo una carta en el sobre correcto.

****

A una secretaria, de una importante organización empresarial, le entregan separadamente un número determinado de cartas y sus sobres correspondientes indicándole que debía introducir cada carta en su sobre, franquearlas y enviarlas al correo.

Como era de esperar; la secretaria, que parlotea continuamente con su compañera, confunde cartas y sobres y acaba introduciendo todas las cartas en sobres equivocados, de manera que ningún destinatario recibió la carta que le correspondía.

¿Cuál es la probabilidad de no introducir ni una sola carta en su sobre correspondiente para cualquier número n de cartas? ¿Cuánto vale dicha probabilidad cuando n tiende a infinito?

SOLUCIÓN

La probabilidad de equivocarse con todas las cartas (P_E) es igual a 1 menos la probabilidad de acertar "al menos" con una carta (P_A)

Recordando que la definición clásica de probabilidad es "Casos favorables de que se produzca un suceso dividido por los casos posibles", la probabilidad de acertar "al menos" una carta teniendo n cartas será:

Casos posibles: Permutaciones de n = n!

Casos favorables: los de acertar una carta (F_1) a los que deberemos restar los de acertar dos cartas (F_2) (ya que si hemos acertado dos cartas, la "i" y la "j" habremos contado como acierto, en la misma combinación, el acierto de la "i" y el acierto de la "j". Lo mismo nos ocurre con F_2 al que deberemos restar F_3 , y así sucesivamente por lo que:

$$F_A = F_1 - (F_2 - (F_3 - (F_4 - (\ldots\ldots) + (-1)^{n+1}F_n)))$$

$$F_A = F_1 - F_2 + F_3 - F_4 + \ldots\ldots + (-1)^{n+1}F_n$$

Siendo $F_1 = \binom{n}{1}(n-1)! = n!$

$$F_2 = \binom{n}{2}(n-2)! = \frac{n!}{2!}$$

(…)

$$F_n = \binom{n}{n}(n-n)! = 1$$

Y por tanto,

$$P_A = F_1 - F_2 + F_3 - F_4 + \ldots + (-1)^{n+1} F_n = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \ldots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n!}$$

Siendo la probabilidad pedida:

$$P_F = 1 - P_A = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n!}$$

Serie que cuando n tiende a infinito converge a $\frac{1}{e}$, por lo que

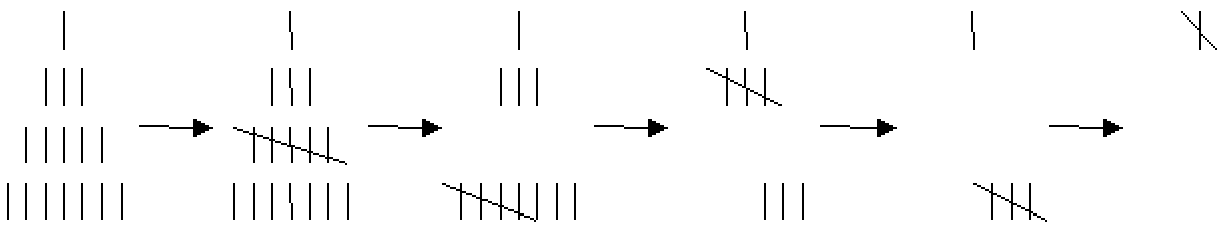
$P_n = 0{,}3678794$

****

Se quieren repartir 1000 pesos entre el primer, segundo y tercer puesto de un concurso. Los tres premios deben ser distintos, sin centavos, y obviamente el primero debe recibir más que el segundo, etc. ¿De cuántas formas distintas es posible hacer esto?

****

El Nim es un popular juego para dos jugadores, que tiene muchas variantes. En la que prefiere Pablo el "tablero" inicial consiste en 4 filas. Los jugadores juegan alternadamente por turnos. En su turno, un jugador elige una fila y tacha de ella una cierta cantidad de palitos, empezando desde la izquierda. Siempre se debe tachar al menos un palito. Los palitos tachados deben ser contiguos y estar todos en la misma fila (y estar pegados al extremo izquierdo). La figura muestra una partida posible.



Gana el jugador que tacha el último palito, o sea que pierde el que ya no puede tachar ningún palito.

a) Contar cuántas posibles partidas hay cuando el tablero inicial es 1-2-3-4.

b) Contar cuántas posibles partidas hay cuando el tablero inicial es 1-3-5-7.

Suponiendo que los dos jugadores son realmente muy astutos y nunca se equivocan:

c) Decidir quién de los dos jugadores (el primero o el segundo) gana la partida, por más que su oponente no se equivoque nunca, cuando el tablero inicial es 1-2-3-4 .

d) Decidir quién de los dos jugadores (el primero o el segundo) gana la partida, por más que su oponente no se equivoque nunca, cuando el tablero inicial es 1-3-5-7.

En un monedero de piel (A) hay 4 monedas de níquel y 5 de cobre, en otro monedero de tela (B) hay 8 monedas de níquel y 3 de cobre. Tiramos un dado al aire. Si sale 2 ó 6 sacamos moneda del monedero de tela y en caso contrario del otro. Hallar la probabilidad de sacar una moneda de níquel.

****

Carlos ha olvidado el código pin de su teléfono móvil. Sólo recuerda que comenzaba por 77 y que este número no volvía a aparecer.

a) Piensa si será posible recuperarlo a base de llevar a cabo suficientes combinaciones de números.

b) Calcula la probabilidad de hallar un código de cuatro dígitos, siendo los dos primeros dos sietes (de modo que el siete no se vuelva repetir), de entre todos los códigos de cuatro dígitos posibles.

****

Halla la probabilidad de que dos alumnos determinados tengan la misma fecha de nacimiento. Nota: se supone que el margen de edad está entre 15 y 20 años, ambos inclusiva.

Solución: $$p = \frac{6.365}{(6.365)^2}$$

****

Cierto profesor lleva siempre en el bolsillo dos cajas de n cerillas. Cada vez que necesita una cerilla toma una caja al azar. Al cabo de cierto tiempo una de las cajas está vacía. Halla la probabilidad de que la otra caja tenga r cerillas suponiendo que

a) descubre que la caja está vacía al tomar la última cerilla

b) descubre que la caja está vacía al ver que no tiene cerillas

****

Dos testigos A y B prestan declaración. Se sabe razonadamente que las afirmaciones de B tienen doble probabilidad de ser verdad que las de A. ¿Cuál es la probabilidad de que digan la verdad si los dos dicen lo mismo?

Solución:

$M = \{VV, FF\}$, $p(VV) = p.2p$ $p(FF) = (1-p)(1-2p)$

$$\text{probabilidad} = \frac{2p^2}{2p^2 + (1-p)(1-2p)} = \frac{2p^2}{4p^2 - 3p + 1}$$

El aparcamiento de un centro comercial está organizado por colores (rojo, verde y naranja) y por sectores (F, G, H, I). Además, sabemos que hay el mismo número de plazas de cada color y en cada sector.

A. Escribe el espacio muestral asociado al experimento “Aparcar el coche en un sector y en un color”.

B. Calcula la probabilidad de aparcar en una plaza roja del sector G.

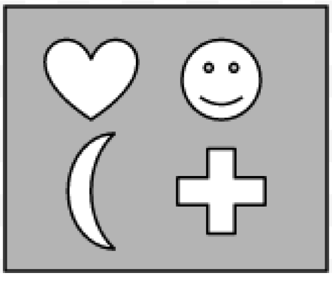
C. Calcula la probabilidad de aparcar en el sector F.

D. Calcula la probabilidad de no aparcar en una plaza verde.

E. Por último, estudia la probabilidad de aparcar en el sector F o de color naranja.

****

Una caja de cereales contiene copos con las siguientes formas:



A. Si extraemos un cereal de la caja y nos fijamos en la forma que tiene, indica todos los sucesos elementales posibles. ¿En algún caso la probabilidad de la intersección de dos de esos sucesos elementales puede ser distinta de 0?
B. Si la caja hay 150 copos con forma de corazón, 80 con forma de luna, 110 con forma de carita sonriente, y 50 con forma de cruz, ¿qué probabilidad hay de extraer un corazón? ¿Y de no extraer una carita sonriente?
****

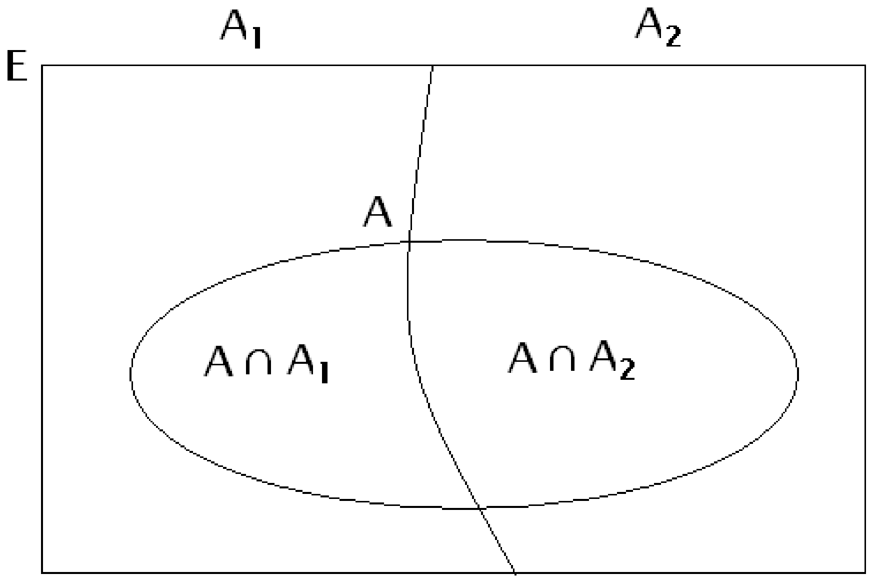
En una clase de Bachillerato la mitad son chicas y la otra chicos, el 30% de las chicas, y el 40% de los chicos han optado por la asignatura de Biología. Elegido un alumno al azar, calcula la probabilidad de que:
a) Estudie Biología.
b) Sea chica y no haya elegido Biología.

Dos jugadores A y B disputan tres partidas independientemente del resultado de la anterior. Se sabe que A gana cada partida con una probabilidad de 0,6 y que no hay empates. Se piden las siguientes probabilidades:
a) A gana las tres partidas disputadas.
b) A gana al menos una de las tres partidas.
c) A sólo gana la segunda partida.

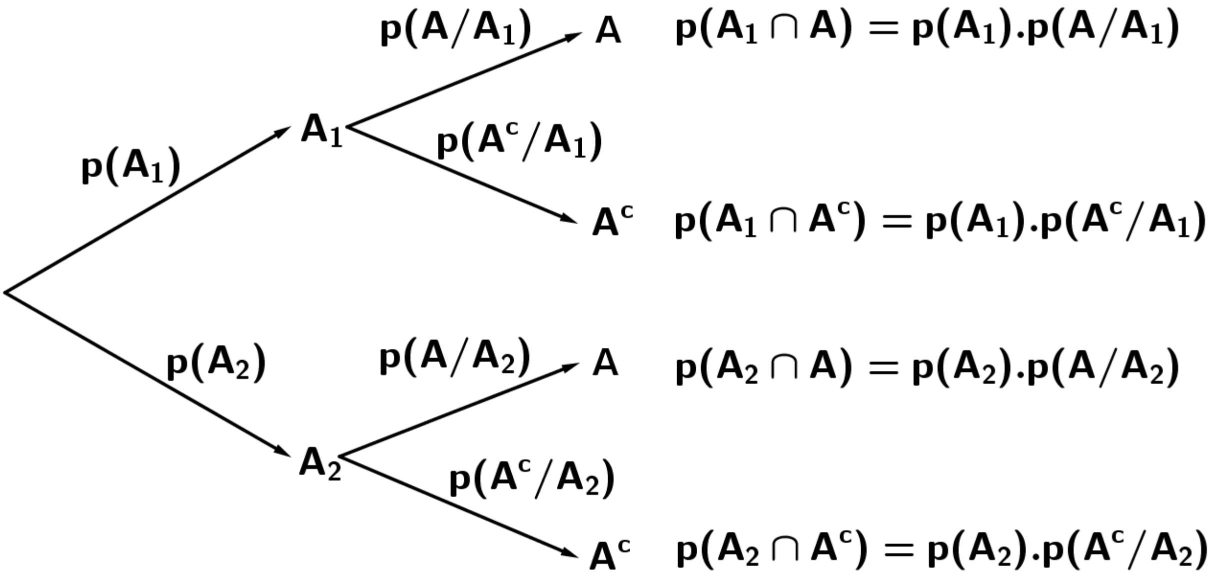
Uno de los momentos centrales del juego del TEG es el combate. Consideremos algo que pasó una vez, China ataca a Kamtchatka.
El atacante (China) usa 3 dados. El defensor (Kamtchatka) usa 2 dados. El atacante y el defensor tiran cada uno sus dados, y los ordenan de mayor a menor por puntaje obtenido. Luego comparan los dados, el mayor con el mayor, el siguiente con el siguiente, etc., descartando el dado sin pareja.
Si cierto dado del atacante es estrictamente mayor que el correspondiente dado del defensor, le corresponde un éxito al atacante. Si fuera menor o igual, le corresponde un éxito al defensor.
Ejemplo: China tira y obtiene 3,1,6; Kamtchatka 4,3. Se comparan los dados:
China 6 vs Kamtchatka 4: éxito para China.
China 3 vs Kamtchatka 3: éxito para Kamtchatka.
El tercer dado de China se descarta.
Calcular la probabilidad de que China obtenga 2 éxitos.
Nota: la probabilidad es casos favorables / casos totales. Por ejemplo con un dado cada uno, hay 15 casos favorables (6 vs 5, 6 vs 4, etc.) y 36 casos totales o posibles, entonces la probabilidad es 15 / 36 $\cong$ 0.41666...
****

Teorema de la probabilidad total

Sean A_1 , A_2 son sucesos incompatibles con $A_1 \cup A_2 = E$ y A es un suceso cualquiera



$$\text{Como } p(A \cap B) = p(B)\,.\,p(A/B) \Rightarrow \begin{cases} p(A \cap A_1) = p(A_1)\,.\,p(A/A_1) \\ p(A \cap A_2) = p(A_2)\,.\,p(A/A_2) \end{cases}$$



$$p(A) = p(A \cap A_1) + p(A \cap A_2) = p(A_1)\,.\,p(A/A_1) + p(A_2)\,.\,p(A/A_2)$$

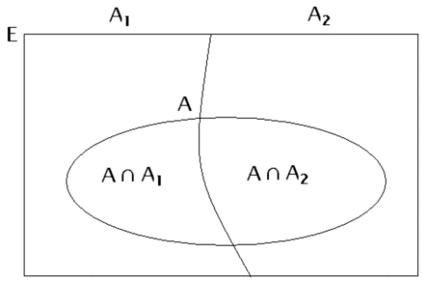
Por tanto, se cumple $\boxed{\underline{\textbf{teorema de la probabilidad total}} : p(A) = p(A_1).p(A / A_1) + p(A_2).p(A / A_2)}$

Ejemplo

Se tira un dado, si sale un 1 , 2 , 3 ó 4 se saca una bola de una urna U_1 que contiene 3 bolas azules y 2 rojas; si sale un 5 ó un 6 se saca una bola de otra urna U_2 que contiene 3 bolas azules y 1 roja. ¿Cuál es la probabilidad de que la bola extraída sea azul?

Sean A_1 = sacar un 1, 2, 3 ó 4 = sacar bola de la urna U_1

A_2 = sacar un 5 ó un 6 = sacar bola de la urna U_2 A = sacar bola azul



Observa que A_1 , A_2 son sucesos incompatibles tales que $A_1 \cup A_2 = E$

Fíjate que $A \cap A_1$, $A \cap A_2$ son también incompatibles y $A = (A \cap A_1) \cup (A \cap A_2)$, luego:

$p(A) = p(A \cap A_1) + p(A \cap A_2) = p(A_1) \cdot p(A/A_1) + p(A_2) \cdot p(A/A_2)$

$p(A_1) = 4/6 = 2/3$; $p(A_2) = 2/6 = 1/3$; $p(A/A_1) = 3/5$; $p(A/A_2) = 3/4$

Luego, $p(A) = 3/5 \cdot 2/3 + 3/4 \cdot 1/3 = 2/5 + 1/4 = 13/20$

Sistema completo de sucesos.

De una manera general, se dice que los sucesos $A_1, A_2, A_3, \ldots A_n$ constituyen un sistema completo de sucesos para un determinado experimento si se verifica:

1º) $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_n = E$.

2º) Los sucesos $A_1, A_2, A_3, \ldots A_n$ son incompatibles dos a dos.

6) Si A y B son sucesos incompatibles, entonces $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$

7) $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$

Ten en cuenta que si A y B son incompatibles, entonces

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - \overbrace{p(A \cap B)}^{\text{vale } 0} \Rightarrow \boxed{\text{si A y B son incompatibles, } p(A \cup B) = p(A) + p(B)}$$

Sucesos incompatibles:

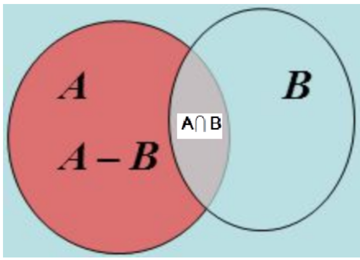
$$E = A \cup A^C \text{ y } A, A^C \text{ son incompatibles} \Rightarrow \overset{\text{vale } 1}{p(E)} = p(A \cup A^C) = p(A) + p(A^C)$$

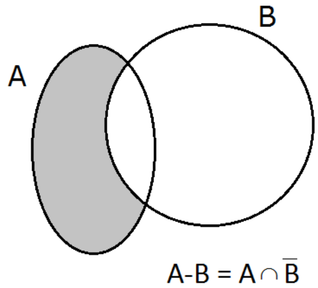
Ten en cuenta:

$$\text{Luego, } p(A) + p(A^C) = 1 \Rightarrow \begin{cases} \boxed{p(A^C) = 1 - p(A)} \\ \boxed{p(A) = 1 - p(A^C)} \end{cases}$$

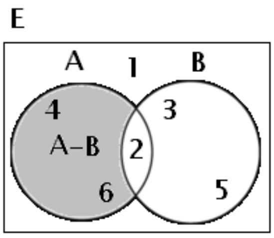
Por ejemplo, si $p(A) = 0{,}3 \rightarrow p(A^c) = 1 - 0{,}3 = 0{,}7$

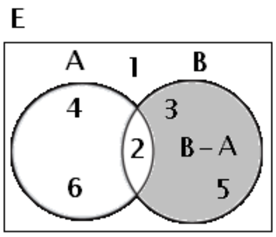
8) Si $A \subseteq B$, entonces $p(A) \leq p(B)$





Por ejemplo, en el lanzamiento de un dado, si $\begin{cases} A = \text{"salir nº par"} = \{2,4,6\} \\ B = \text{"salir nº primo"} = \{2,3,5\} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A - B = \text{"salir nº par no primo"} = \{4,6\} \\ B - A = \text{"salir nº primo no par"} = \{3,5\} \end{cases}$





Propiedades

A – B y A ∩ B son incompatibles y se cumple: A = (A – B) U (A ∩ B)

A – B , A ∩ B y B – A son incompatibles y se cumple: A U B = (A – B) U (A ∩ B) U (B – A)

(tabla)En un grupo de personas hay 8 mujeres fumadoras y 25 no fumadoras y también hay 12 hombres fumadores y 50 no fumadores.
Estos datos los podemos organizar en una tabla (llamada tabla de contingencia)

	Hombre	Mujer	Total
Fuma	12	8	20
No fuma	50	25	75
Total	62	33	95

Si elegimos una persona al azar, ¿Cuál es la probabilidad de que fume sabiendo que es mujer?

Le llamamos A = "la persona fuma" B = "la persona es mujer". Lo que queremos calcular es p(A / B)

Usamos la fórmula: $p(A / B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{P(\text{fume y sea mujer})}{P(\text{sea mujer})} = \dfrac{8/95}{33/95} = \dfrac{8}{33} = 0{,}242 = 24{,}2\%$

****

(tabla)En una empresa figuran en nómina un total de 1000 personas, de las cuales 400 son mujeres. Sabiendo que los transportes públicos son utilizados para acudir al trabajo, por un 40% de los varones, y no son utilizados por el 25% de las mujeres, obtener la probabilidad de que elegida al azar una persona de dicha empresa, resulte ser usuaria de los transportes públicos para acudir a su trabajo.
****

(tabla)La siguiente tabla muestra la distribución de 400 personas según hábito de fumar y presencia de bronquitis.

Hábito de fumar	Bronquitis		Total
	si	no	
Fuma	140	110	250
No fuma	50	100	150
Total	190	210	400

a) Si se elige una persona al azar ¿Cuál es la probabilidad de que: 1) Fume y tenga bronquitis
2) No fume dado de que tiene bronquitis 3) No tenga bronquitis dado que fuma 4) No fume o tenga bronquitis.
b) ¿Los sucesos A = "Fumar" y B = "Tener bronquitis" son independientes?
****

(tabla)En una clase hay 12 chicos y 16 chicas. Las dos terceras partes de los chicos y la mitad de las chicas tienen el pelo moreno y el resto rubio. Se elige una persona al azar. Halla la probabilidad de que:
a) Sea hombre b) Sea mujer morena c) Sea hombre rubio
d) Sea morena y rubia e) Sea morena f) Sea morena sabiendo que se ha elegido una chica
****

(tabla)En una clase de 30 alumnos hay 12 chicos, de los cuales 9 tienen 14 años y el resto 15 años; de las chicas hay 2 con 15 años, otras dos con 16 años y el resto tiene 14 años. Se elige un alumno al azar. Halla la probabilidad de que:
a) Sea un chico de 15 años
b) sea un chico o tenga 14 años
c) Tenga 15 años sabiendo que es chica
d) Tenga 14 años sabiendo que es chico e) Tenga 14 años
****

(tabla)En IES de 400 alumnos, el 45% son chicos. También se sabe que hay 108 chicos que aprueban el curso y 77 chicas que suspenden. Se elige una persona al azar.
a) Construye una tabla de contingencia

	chicos	chicas	total
aprueban	108	143	251
suspenden	72	77	149
total	180	220	400

45% de 400 = 180

b) Calcula la probabilidad de que la persona elegida apruebe el curso
c) Halla la probabilidad de que suspenda, sabiendo que se ha elegido un chico
d) Calcula la probabilidad de que sea chica, sabiendo que se ha elegido una persona que suspende
****

(tabla)En una clínica médica se ha organizado un archivo de los pacientes por sexo y por tipo de hepatitis. Son 45 varones de los cuales 25 tienen hepatitis tipo A y 20, tipo B. Son 35 mujeres con hepatitis tipo A y 20 con hepatitis tipo B. Si se selecciona una de las fichas del archivo al azar, determinar la probabilidad de sacar:
a) Una correspondiente al sexo femenino.

b) Una correspondiente a un caso de hepatitis tipo B.
c) Una correspondiente al sexo masculino y con hepatitis tipo A.

Resolución

V = ser varón A = tener hepatitis A B = tener hepatitis B

	V	V^c	Total
A	25	35	60
B	20	20	40
Total	45	55	100

a) $p(V^c) = 55/100 =$ **0,55**
b) $p(B) = 40/100 =$ **0,4**
c) $p(V \cap A) = 25/100 =$ **0,25**

****

(tabla)En tres cursos de un mismo nivel hay 65 alumnos entre chicos y chicas. En una evaluación los aprobados fueron los siguientes: de las 40 chicas, 20 aprobaron y de los 25 chicos, 15 aprobaron.
Organice los datos en una tabla de contingencia y calcule las probabilidades de que:
a) Un estudiante sea chica y esté aprobada.
b) Un estudiante sea chico y esté aprobado.
c) Un estudiante esté aprobado.
d) Sabiendo que el estudiante elegido está aprobado, sea chica.
e) Sabiendo que el estudiante está aprobado, sea chico.
****

A una comida asisten 28 hombres y 22 mujeres. De los hombres 15 eligen carne y el resto pescado; de las mujeres 12 eligen pescado y el resto carne. Si se elige una persona al azar calcula la probabilidad de que:
a) sea una mujer que elige carne b) elija pescado c) sea un hombre que elige pescado
****

(árbol)Amelia, Javier y Ramón, sortean, al azar, el orden en que van a entrar, de uno en uno, por una puerta.
a) calcula la probabilidad de que los dos últimos en entrar sean hombres.
b) determina si son independientes los sucesos S1 y S2, siendo:
S1 : ”la mujer entra antes que alguno de los hombres”
S2 : ”los dos hombres entran consecutivamente”
****

Una caja con una docena de huevos contiene dos rotos. Se extraen al azar sin reemplazamiento (sin devolverlos después y de manera consecutiva) cuatro huevos.
1. Calcular la probabilidad de extraer los cuatro huevos en buen estado.
2. Calcular la probabilidad de extraer de entre los cuatro huevos, exactamente uno roto.
****

Con el objetivo de recaudar fondos para un viaje, los alumnos de un instituto realizan una rifa con 500 números. Un alumno compra dos números.
1. Si sólo hay un premio, ¿qué probabilidad tiene el alumno de que le toque a él?
2. Si hay dos premios, ¿qué probabilidad tiene el alumno de que le toque al menos uno de ellos?
****

(árbol)En un aparato de radio hay presintonizadas tres emisoras A, B y C que emiten durante todo el día. La emisora A siempre ofrece música, mientras que la B y la C lo hacen la mitad de tiempo de emisión. Al encender la radio se sintoniza indistintamente cualquiera de las tres emisoras.
a) Obtener de forma razonada la probabilidad de que al encender la radio escuchemos música.
b) Si al poner la radio no escuchamos música, calcular de forma razonada cuál es la probabilidad de que esté sintonizada la emisora B.
****

Un alumno realiza un examen tipo test que consta de 4 preguntas. Cada una de las preguntas tiene tres posibles respuestas, de las que solo una es correcta. Si el alumno aprueba contestando correctamente dos o más preguntas, obtener de forma razonada la probabilidad de que apruebe si escoge las respuestas de cada una de las preguntas completamente al azar.

****

En un pedido de 50 bombillas se sabe que hay 4 defectuosas. Si el comprador elige dos (sin reemplazamiento) al azar, ¿Cuál es la probabilidad de que las dos sean defectuosas?

****

Dos tiradores disparan sobre una diana. Uno tiene dos aciertos cada cinco disparos y el otro un acierto cada dos disparos. Si los dos disparan al mismo tiempo, se pide contestar razonadamente a las siguientes preguntas:

a) La probabilidad de que los dos acierten.
b) La probabilidad de que alguno acierte.
c) La probabilidad de que ninguno acierte.
d) La probabilidad de que uno acierte y el otro no.

****

(tabla)Una ciudad ha remodelado su paseo marítimo, y en un periódico ha aparecido una encuesta realizada a 200 personas acerca de si el resultado ha sido satisfactorio o no. De los 200 encuestados, 120 viven en la ciudad. Además, el porcentaje de los que viven en la ciudad y les han gustado las obras es del 30%, el mismo de los que no viven en la ciudad y también les han gustado.

a) Si se elige una encuesta de las 200, y ésta se ha hecho a un habitante de la ciudad, ¿cuál es la probabilidad de que le gusten las obras?
b) Si se elige una encuesta de las 200, y el individuo afirma que le gustan las obras, ¿qué probabilidad hay de que viva en la ciudad?

****

(árbol)En un país de la antigua Europa del Este se ha constituido una comisión parlamentaria integrada por diez miembros, de los cuales siete pertenecen al partido gobernante y el resto al partido de la oposición. Entre los siete miembros del partido gobernante hay cuatro varones y dos, entre los del partido de la oposición. El presidente de la comisión se elige por sorteo entre sus integrantes. Celebrado el sorteo, se sabe que el presidente elegido ha sido un hombre. ¿Qué partido tiene más posibilidades de dirigir la comisión?

****

Seleccionadas 4 personas al azar, calcula la probabilidad de que tengan diferentes fechas de cumpleaños.

****

Si los sucesos A y B representan A = {llueva hoy} y B = {llueva mañana}. Expresa en función de A y B las siguientes situaciones:

a) Llueva hoy pero no mañana b) Llueva los dos días c) Llueva, por lo menos, uno de esos dos días
d) No llueva hoy
e) Llueva sólo uno de los dos días f) No llueva ni hoy ni mañana.

Describe textualmente el significado de los siguientes sucesos: B^c $B - A$ $(A \cap B)^c$ y $(A \cup B)^c$

****

En una ciudad, el 40% de la población tiene cabellos castaños, el 25% tiene ojos castaños y el 15% tiene cabellos y ojos castaños. Se escoge una persona al azar:

a) Si tiene los cabellos castaños, ¿cuál es la probabilidad de que tenga también ojos castaños?
b) Si tiene ojos castaños, ¿cuál es la probabilidad de que no tenga cabellos castaños?
c) ¿Cuál es la probabilidad de que no tenga cabellos ni ojos castaños?

****

En un curso el 40% son hombres, el 30% usan gafas, y 15% son varones y usan gafas. Si seleccionamos al azar un alumno de dicho curso:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que sea mujer y no use gafas?
b) Si sabemos que el alumno seleccionado no usa gafas, ¿qué probabilidad hay de que sea hombre?

****

La probabilidad de que un alumno apruebe lengua española es 4/5, y la probabilidad de que apruebe Matemáticas 7/10. Si aprobar Lengua y aprobar matemáticas son independientes, ¿cuál es la probabilidad de que apruebe al menos una de las dos asignaturas?

****

De 120 estudiantes, 60 están estudiando francés, 50 están estudiando español y 20 están estudiando francés y español. Se elige un estudiante al azar. Encuentre la probabilidad de que el estudiante esté estudiando:
a) francés y español b) francés o español. c) ni francés ni español d) solamente francés
e) exactamente uno de los dos idiomas.
****

En un banco hay dos alarmas A y B. En caso de atraco, la probabilidad de que se activen A, B o alguna de las dos es: p(A) = 0,75 p(B) = 0,85 ; p(A U B) = 0,95. Calcula la probabilidad de que: a) Se activen las dos b) No se active A
c) Se active sólo una de ellas d) No se active B e) Se active sólo A f) Se active sólo B
g) No se active ninguna h) No se activen las dos a la vez
****

De 120 estudiantes, 60 están estudiando francés, 50 están estudiando español y 20 están estudiando francés y español.
Se elige un estudiante al azar. Encuentre la probabilidad de que el estudiante esté estudiando:
a) francés y español b) francés o español. c) ni francés ni español d) solamente francés e) exactamente uno de los dos idiomas. [Solución: a) 1/6 b) 3/4 c) 1/4 d) 1/3 e) 7/12]
****

El despertador de Pedro no funciona bien, pues el 20% de las veces no suena. Cuando suena, Pedro llega tarde a clase con probabilidad 0.2; pero si no suena, la probabilidad de que llegue tarde a clase es 0.9.
a) Calcule la probabilidad de que Pedro llegue a tiempo.
b) Determine la probabilidad de que el despertador haya funcionado bien, si sabemos que Pedro ha llegado tarde a clase.
****

En un determinado lugar hay tres lugares de diversión a los que suelen ir un grupo de tres amigos. Las probabilidades de que vayan al primero, segundo o tercero son, respectivamente, 0.3, 0.5 y 0.7 Halla la probabilidad de que el grupo de amigos vaya:
a) solamente a uno de los lugares.
b) únicamente a dos de los lugares.
c) a los tres lugares.
****

En un videoclub quedan 8 copias de la película A, 9 de la B y 5 de la C. Entran tres clientes consecutivos. Calcúlese la probabilidad de que:
1. Los tres escojan la misma película. 2. Dos escojan la película A y el otro la C.
****

La orquesta musiquera está formada por tres tipos de instrumentos, 30 de madera, 15 de viento y 5 de percusión. La víspera de un concierto se ponen enfermos dos músicos. Calcular la probabilidad de que:
1. Ambos toquen instrumentos de viento.
2. Ambos toquen el mismo tipo de instrumento.
****

Se consideran dos actividades de ocio: A = ver televisión y B = visitar centros comerciales. En una ciudad, la probabilidad de que un adulto practique A es igual a 0; 46; la probabilidad de que practique B es igual a 0,33 y la probabilidad de que practique A y B es igual a 0,15.
1. Se selecciona al azar un adulto de dicha ciudad. ¿Cuál es la probabilidad de que no practique ninguna de las dos actividades anteriores?
2. Se elige al azar un individuo de entre los que practican alguna de las dos actividades. ¿Cuál es la probabilidad de que practique las dos actividades?
****

Dos jóvenes aficionados a los juegos de azar se encuentran realizando un solitario con una baraja española de 40 cartas. Extraen una carta de dicha baraja y desean saber cuál es la probabilidad de ”obtener rey” condicionado al suceso ”obtener figura”. Caracterice ambos sucesos.
****

En un grupo de 100 personas, 50 escucha las noticias por radio, 70 ven las noticias en Tv. y 30 escuchan la radio y ven la Tv. Calcula las probabilidades de los siguientes sucesos:

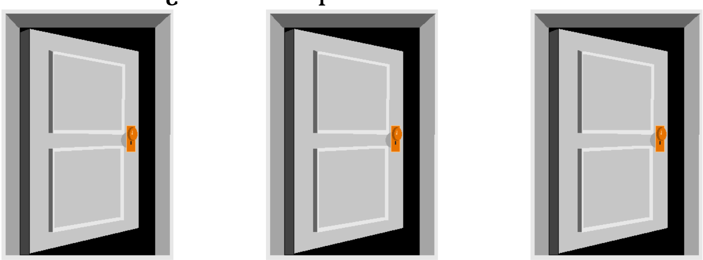
a) escucha la radio o ve la Tv.
b) no escucha la radio y no ve la Tv.
c) escucha la radio pero no ve la Tv.
****

De 150 pacientes, 90 tienen una enfermedad cardíaca, 50 tienen cáncer y 20 tienen ambas enfermedades.
a) Representar la situación mediante un diagrama de Venn.
b) Determinar la probabilidad de que una persona tomada al azar tenga una sola de las dos enfermedades.
****

El 30% de los clientes de una tienda de música solicita la colaboración de los dependientes y el 20% realiza una compra antes de abandonar la tienda. El 15% de los clientes piden la colaboración de los dependientes y hacen una compra.
a) Calcule la probabilidad de que un cliente ni compre, ni solicite la colaboración de los dependientes.
b) Sabiendo que un cliente ha realizado una compra, ¿cuál es la probabilidad de que no haya solicitado colaboración a los dependientes?
Un personal tiene cargados dos programas antivirus A_1 y A_2 que actúan simultánea e independientemente. Ante la presencia de un virus, el programa A_1 lo detecta con una probabilidad de 0,9 y el programa A_2 con una probabilidad de 0,8. Calcular de forma razonada:
a) La probabilidad de que un virus cualquiera sea detectado.
b) La probabilidad de que un virus sea detectado por el programa A_1 y no por el A_2.
****

Un 65% de los alumnos de un centro han aprobado Matemáticas, un 70% ha aprobado Filosofía y un 53% ha aprobado ambas materias. Si se elige al azar un estudiante, calcula la probabilidad de que:
a) Calcula la probabilidad de que haya aprobado al menos una de las dos materias.
b) Si aprobó Matemáticas, ¿cuál es la probabilidad de haber aprobado filosofía?
****

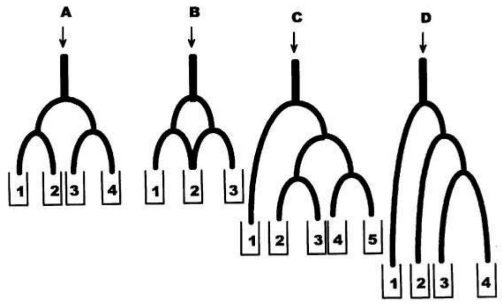
En un concurso de televisión se presentan al concursante tres puertas. Dos de ellas no tienen nada detrás y en la otra se gana un maravilloso coche deportivo. El concursante elige una puerta y el presentador, antes de abrir la puerta elegida y para darle más emoción al juego, abre otra puerta, que no tiene nada detrás. Naturalmente, el presentador sabe dónde está el coche, así que siempre puede abrir la puerta que no lo tiene. Tras abrir la puerta, pregunta al concursante si mantiene su decisión o prefiere cambiarla. Y la cuestión es: ¿merece la pena cambiar o no varía en nada la situación?



Cabe preguntarse también qué estrategia seguir en el caso de que haya más de tres puertas, y de que el presentador vaya abriendo, una a una, puertas sin premio, al tiempo que ofrece cada vez la posibilidad de cambiar. ¿Conviene cambiar cada vez que lo ofrece? ¿Es suficiente hacerlo alguna de las veces en que lo ofrece? ¿Es mejor cambiar sólo al final? ¿Es indiferente?
Todo ello debe justificarse, claro, calculando las probabilidades en cada caso.
****

Imagínate que disponemos de 1000 bolas iguales y del mismo peso. Las introducimos una tras otra por la entrada de cada uno de los siguientes dispositivos.

¿Cuántas crees que se depositarán en cada cajetín?



****

Dos equipos de baloncesto se enfrentan en una final al mejor de tres partidos. La estadística de los enfrentamientos anteriores señala que el equipo A ha ganado el 60% de los partidos y el equipo B lleva ganados el 40%. ¿Cuál es la probabilidad de que la final deba decidirse en un tercer partido?

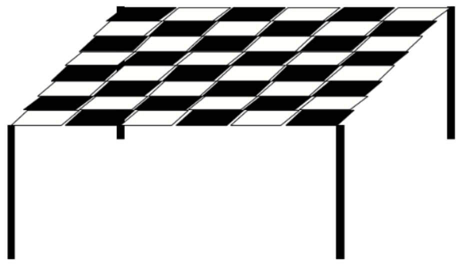
****

VARIOS

Una camioneta de transporte colectivo realiza un recorrido en el que hay 10 paradas fijas. Si al salir de la terminal se han subido cuatro personas desconocidas entre sí, ¿cuál es la probabilidad de que dos personas bajen en una misma parada?

Diez gaviotas (dos blancas y ocho grises) iban volando sobre un río cuando de pronto se posaron al azar en un tronco, formando una hilera. ¿Cuál es la probabilidad de que las dos gaviotas blancas estén juntas?

En una feria, los jugadores lanzan monedas sobre un tablero a cuadros. Si la moneda cae tocando una línea divisoria, el jugador la pierde. Si rueda y cae fuera del tablero, la recupera. Pero si la moneda queda totalmente dentro de un cuadrado, el jugador recupera la moneda y se lleva un premio. ¿Cuál es la probabilidad de ganar en este juego?



Un teclado de ordenador tiene los siguientes tipos de teclas:

Tipo de tecla	Nº Teclas
Letras	27
Números	10
Signos de puntuación	11
Otras	38

a) Si pulsamos una tecla al azar, ¿qué probabilidad hay de que sea una letra?
b) Si pulsamos dos teclas al azar de forma consecutiva, ¿qué probabilidad hay de que ninguna sea una letra?
c) Si pulsamos cuatro teclas de forma consecutiva, ¿qué probabilidad hay de que formemos la palabra COSA?

Estoy a punto de mandar 10 cartas a un concurso. Suponiendo que en cada sorteo semanal se elegirá una sola carta de entre mil, ¿qué me conviene más: mandar todas la misma semana, cada una en semana distinta o qué?

En un grupo de tres chicos y tres chicas cada uno está enamorado de una persona del sexo opuesto. ¿Qué posibilidad hay de que uno sea correspondido? ¿Y dos? ¿Y todos? ¿Y si fueran seis chicos y seis chicas?

Las tres monedas de Martin Gardner
En mayo de 2010 falleció, a los 95 años, el matemático estadounidense Martin Gardner, considerado el padre de la matemática recreativa y un excelente divulgador científico.
Durante casi treinta años escribió la sección Juegos matemáticos de la revista Scientific American, que en España se publica como Investigación y Ciencia, y más de 70 libros.
No es exagerado decir que es una de las personas que más han hecho pensar a la humanidad. Y lo seguirá haciendo, gracias a sus libros y a Internet.
Este es un fragmento del libro "Matemáticas para divertirse"
Joe: "Voy a arrojar tres monedas al aire. Si todas caen cara, te daré diez centavos. Si todas caen cruz, te daré diez centavos. Pero si caen de alguna otra manera, tú me darás cinco centavos a mí".
Jim: "Déjame pensarlo un minuto. Al menos dos monedas tendrán que caer igual, porque si hay dos diferentes, la tercera tendrá que caer igual que una de las otras dos. Y si hay dos iguales, entonces la tercera tendrá que ser igual o diferente de las otras dos. Las probabilidades están parejas con respecto a que la tercera moneda sea igual o diferente. Por tanto, hay las mismas probabilidades de que las monedas muestren el mismo lado como que no. Pero Joe está apostando diez centavos contra cinco que no serán todas iguales, de modo que las probabilidades están a mi favor. ¡Bien, Joe, acepto la apuesta!".
Martin Gardner, Matemáticas para divertirse

a) ¿Fue bueno para Jim haber aceptado la apuesta?
b) Busca en Internet y elabora una breve biografía de Martin Gardner que contenga al menos dos problemas suyos.

José Antonio es profesor de Matemáticas y quiere que cada día salgan a la pizarra el mismo número de niños que de niñas. Para ello, ha pensado en construir una ruleta en la que si sale el color rojo salga a la pizarra uno de los niños y si sale el verde salga una de las niñas.
Si en la clase hay 20 niñas y 10 niños, ¿cómo debería ser la ruleta para que haya la misma probabilidad de salir niño o niña?
****

VARIOS CONDICIONADA
En una ciudad se sabe que el 55% de las personas son mujeres y el 40% son mujeres y mayores de edad. Asimismo, el 35% de las personas de esa ciudad son hombres mayores de edad. Se elige al azar una persona y resulta ser mayor de edad, ¿cuál es la probabilidad de que esta persona sea, además, mujer?

****
En un colegio se pregunta a sus alumnos su materia favorita. El 50% elige educación física, el 20% elige matemáticas, el 20% elige música y el resto elige inglés.
a) Representa aproximadamente en un diagrama de sectores los datos anteriores.

b) Si se elige al azar dos alumnos del centro, ¿qué probabilidad hay de que para ambos sea la educación física la materia favorita?
c) Si en el colegio estudian 300 alumnos, ¿qué probabilidad hay de elegir un alumno cuya materia favorita sean las matemáticas?
****

En un colegio de 300 alumnos el 35% son chicas y el resto chicos.
a) ¿Qué probabilidad hay de elegir un alumno al azar y que sea chico?
b) ¿Qué probabilidad hay de elegir al azar dos alumnos y que ambos sean chicos?
****

En un aula hay 30 alumnos, de los cuales el 20% son rubios, el 50% son morenos y el 30% son castaños. Calcular:
a) La probabilidad de que al elegir un alumno al azar sea rubio.
b) La probabilidad de que al elegir dos alumnos al azar sean ambos morenos.
c) La probabilidad de que al elegir dos alumnos al azar tengan ambos el mismo color del pelo.
d) La probabilidad de que al elegir dos alumnos al azar tengan ambos distinto color del pelo.
****
****

El siguiente cuadro muestra la distribución de la producción de energía eléctrica en España en el año 2005.

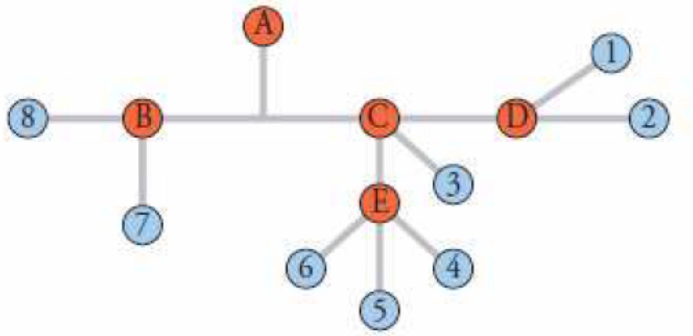
Producción estimada de España por tipo de instalación (GWh)

	2005
Renovables y Residuos	48.938
Hidroeléctrica	(23.178)
Eólica	(20.616)
Biomasa y otras	(2.319)
Residuos (R.S.U, R.I,...)	(2.825)
Coegeneración y tratamiento de residuos (purines, todos)	36.134
Térmicas cinvencionales y de ciclo combinado	150.300
Nucleares	57.550
Total	**292.922**

Fuente: UNESA

a) ¿Por qué si se suman todos los datos de producción de las diferentes energías el resultado es mayor que el total (292.922 Gwh)?
b) ¿Qué porcentaje supuso la producción de energía nuclear del total de la energía eléctrica producida?
c) Realizar un diagrama de sectores en el que se muestre la aportación de cada fuente de energía renovable al total de la producción de la energía. (Agrupar las renovables en un solo sector)
d) Si se consume un Gwh de energía eléctrica renovable, ¿Qué probabilidad se tiene de que sea eólica?
****

Para moverse por las grandes ciudades, el metro es una buena solución. El siguiente gráfico representa parte del plano del metro de París. La probabilidad de que un tren que llegue a un nudo (A, B, C, D y E) de líneas, continúe por cualquiera de las líneas que salen de él, es la misma.



a) ¿Cuál es la probabilidad de que un viajero que sube a un tren en A sin fijarse adonde se dirige llegué a C?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que un viajero que sube a un tren en A sin fijarse adonde se dirige llegué a E?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que un viajero que sube a un tren en A sin fijarse adonde se dirige llegué a la estación 5?

****

Durante un descanso en una central nuclear varios operarios recortan las letras de la palabra URANIO y las introducen en una bolsa. A continuación, se sacan las 6 letras de manera consecutiva.

a) Calcula la probabilidad de que la primera letra que extraen no sea la N.

b) Calcula la probabilidad de que la secuencia forme de nuevo la palabra URANIO

****

Según un artículo de PCWorld publicado en mayo de 2010, el 71% de la población española visita páginas web de información general, un 57% entra en páginas que ofrecen información local. Asimismo, un 65% entra en páginas de música, un 56% en películas y un 50% consumen páginas de viajes. Si seleccionamos dos personas españolas al azar.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que las dos visiten páginas web de información general?

b) ¿Y la de que una de ellas visite páginas de música y la otra no?

****

La probabilidad de que una persona sea morena es 0,6; la de que tenga lo ojos marrones es 0,7 y la de que sea morena y tenga los ojos marrones es 0,42. Calcula la probabilidad de que si elegimos una persona al azar:

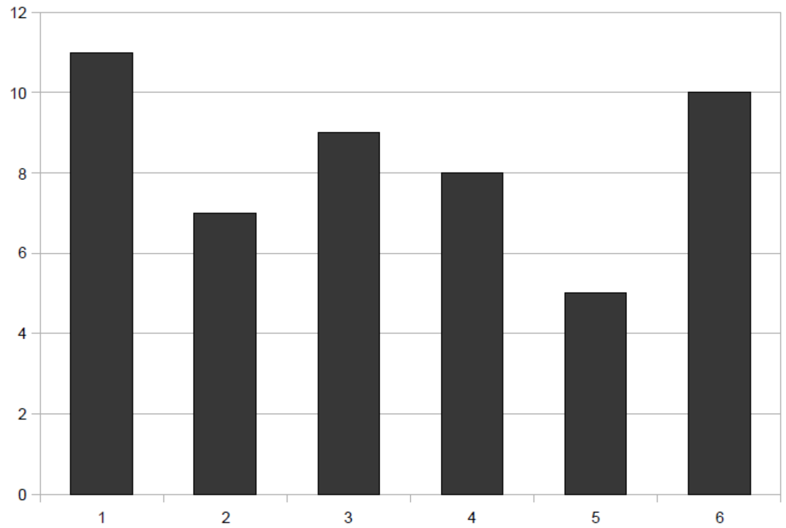
a. No sea morena

b. Sea morena o tenga los ojos marrones

c. Sea morena y no tenga los ojos marrones

****

El lanzamiento de un dado nos da como resultado el siguiente gráfico:



a.- Realiza una tabla que refleje la probabilidad de que salga cada uno de los valores del dado, con los valores que hemos obtenido hasta ahora.

b.- Responde verdadero (V) o falso (F):

( ) En el gráfico está claro que en el eje de las X se representan los valores que toma la variable y en el eje de las Y la cantidad de veces que salió cada valor.

( ) Estamos tratando con sucesos dependientes.

( ) Si se siguen repitiendo estos porcentajes se podría afirmar que el dado está defectuoso

( ) La probabilidad del suceso "que salga par" es mayor que la probabilidad del suceso "que salga impar".

( ) La probabilidad de que salga un valor menor que 2 es de 0,11

c.- Calcula la media de los resultados en el lanzamiento del dado

****

Los carros del supermercado:

Alex, Maria y Elena están en el supermercado con sus padres respectivos. Mientras esperan en la coia de la caja deciden jugar a ver quién adivina cuánto dinero hay juntando las tres monedas que han metido sus padres en los carros.

Tienen genes matemáticos, por eso no responden al tun tun, sino que hacen cálculos sabiendo que los carros aceptan monedas de 50 céntimos, 1 euro y 2 euros.
- ¿Por que nadie dice 5,5 euros?
- ¿Qué cantidad deberian decir para tener más posibilidad de acertar?

Para seguir divirtiéndose también deciden jugar si la cantidad es exacta o decimal.
- En este segundo juego, ¿quién tendria más posibilidad de acertar?
- ¿En cuál de los dos juegos es más fácil ganar?

Razona las respuestas.
****

El señor Frac-thales aprovecha cualquier oportunidad para vestirse de gala. En esta ocasión, ha acudido a una gala benéfica en favor de los niños que no saben matemáticas, en la que tiene la oportunidad de jugar en una tómbola. Después de entregar un donativo, le ponen por delante tres tarjetas:

INTÉNTALO
DE
NUEVO

Frac-thales decide jugar tres veces antes de ir a recoger sus premios (caso de que le toquen). A su lado está Eulerín, que le pregunta qué tal le ha ido, a lo que Frac-thales responde:

- “En mi segundo intento he sacado peor tarjeta que en el primero”.

¿Cuántas posibilidades existen de que la tercera tarjeta también sea peor que la primera? Justifica la respuesta.
****

El profesor de Matemáticas le propuso a Arquimedín la siguiente cuestión:
“En la clase de al lado 6 estudiantes saben español, 7 inglés y 5 francés. De estos sólo uno habla los tres idiomas. De los demás, se sabe que exactamente 2 saben sólo español e inglés, exactamente 2 saben sólo inglés y francés y 1 único alumno sabe sólo español y francés. ¿Cuántos estudiantes hay en la clase?”.
Arquimedín le contestó: “Profesor, estoy convencido que 12”.
¿Es correcta la contestación? Razona tu respuesta.
****

A Antonio le han regalado una entrada para el cine. Para decidir a cuál de sus dos hijos, Benito o Carmen, dársela, les plantea el siguiente juego:
“Sin que me hayáis visto, he dispuesto seis cartas boca abajo, formando un círculo. El dorso de todas ellas es azul, pero tres de ellas son rojas en su cara frontal y tres son negras. Las he colocado de tal forma que las de cada color estén consecutivas.
Pues bien, el juego consistirá en que Benito dará la vuelta a una de ellas. Si la carta es roja perderá la entrada de cine. En otro caso, siguiendo el sentido de las agujas del reloj, Carmen dará la vuelta a la siguiente carta. Si es roja perderá la entrada. Si es negra, Benito girará la siguiente carta y así sucesivamente hasta que alguien encuentre una carta roja, siendo entonces quien pierda la entrada de cine”.
Llegados a este punto, Carmen le preguntó a su padre el motivo por el que empezaba Benito y no ella.
Para saber si la protesta tiene fundamento, contesta a la siguiente pregunta: ¿Tienen las mismas posibilidades de ganar ambos? Si la respuesta es negativa, ¿quién tiene más posibilidades de ganar: el que empieza primero o el segundo? Razona las respuestas.
****

En el desván hemos encontrado un dado muy antiguo. Mi abuelo nos ha dicho que no se puede trabajar con él, pues están desgastados los bordes y no todos los números tienen la misma probabilidad de salir (mi abuelo es maestro, por eso habla tan bien).
Para comprobarlo hemos tirado el dado 1000 veces (mi abuelo es bastante riguroso) y anotado los resultados en una tabla que hemos resumido en este gráfico:

Los resultados que hemos obtenido ¿dan la razón a mi abuelo?
A mi primo le ha gustado el dado, a mí también. Mi abuelo dice que nos lo sorteemos. Nos propone que tiremos el dado y si sale par, el dado será para mí; si sale impar, para mi primo.
¿Crees que el juego es equitativo?
****

Una amiga de mi mujer trabaja en Madrid, pero su familia es de Burgos. Su novio vive en Córdoba con su familia. Esta chica pasa el fin de semana indistintamente en Burgos o en Córdoba, cuando sale los viernes por la tarde del trabajo, va directamente a la estación de autobuses y toma el primer autobús que salga, bien para Burgos, bien para Córdoba.
Los autobuses a Burgos salen cada hora en punto. Los de Córdoba siempre cinco minutos después. Bueno, el caso es que el novio harto de no verla, se casó con otra el mes pasado.
¿Cuál era el motivo por el cual el novio la veía tan poco?, es decir, ¿por qué ella viajaba tan pocas veces a Córdoba?
SOLUCIÓN
Es más probable que ella siempre tome el bus que sale a la hora, ya que tiene 55 minutos en los cuales tomara el bus a la ciudad de sus padres, en cambio solo 5 minutos en los cuales viajaría a la ciudad de su novio. Más específico aún, si llega a la hora y 6 minutos, el próximo bus a salir será el de la hora, si llega a la hora y 59 minutos, idem.
El novio no habría terminado con ella si los buses salieran, uno a la hora, y el otro a la media hora, ya que así el tomar un bus sería equiprobable, es decir, cada uno tendría probabilidad 1/2.
****

En un equipo de fútbol tenemos 11 jugadores, cuyas camisetas están numeradas del 1 al 11. Elegimos al azar 6 de ellos. ¿Cuál es la probabilidad de que la suma de los números de las camisetas sea impar?
****

En la literatura los duelos suelen ser entre dos, pero en esta ocasión tenemos tres contendientes: Mr. A, Mr. B y Mr C. Resulta que Mr. A solo acierta una de cada tres y Mr. B dos de cada tres, mientras que Mr. C acierta siempre. Para equilibrar, primero tira A, luego B y luego C. ¿Cuál es la mejor estrategia de A? ¿Disparar a Mr. B o a Mr. C?
****

La prueba estaba compuesta por tres ejercicios, el profesor elige un alumno de cada grupo para que resuelva un ejercicio, y todos sus compañeros puedan comprobar sus soluciones.
¿Cuál de las siguientes afirmaciones es cierta?
A. La probabilidad de elegir una chica es igual en los tres grupos.
B. La probabilidad de elegir chico es mayor en el grupo 3.
C. La probabilidad de elegir chica es mayor en el grupo 1.
D. La probabilidad de elegir chico es menor en el grupo 2.

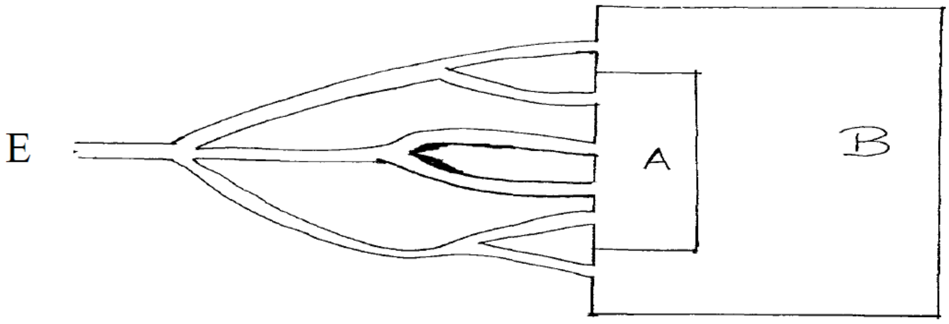
****

El profesor y los alumnos quieren que los padres vean los ejercicios que han realizado en clase. Para elegir el alumno que repartirá los trabajos a toda la clase, primero se sortea el grupo, le tocó al grupo 1, después se vuelve a realizar un sorteo entre las personas de ese grupo, para ver a quién se le encarga el reparto. ¿Qué probabilidad hay de que salga una persona con una calificación de ocho?
****

En un salón del Lejano Oeste juegan a las cartas Clint McGauss, John Euclidean. Kirk O`Newton y Robert Eisnteniak. El juego consiste en obtener 21 puntos o quedarse lo más cerca posible, pero sin pasarse.

Cada carta desde el 2 hasta el 10 tiene un valor igual a su número, las figuras (J, Q y K) valen ll y el as vale l. Además, hay cuatro palos para cada conjunto de esas 13 cartas: picas, tréboles, diamantes y corazones.
En la primera mano se reparten 2 cartas boca aniba a cada jugador:
Clint Mcfiauss: 6 de trébol y 5 de picas.
John Euclidearr 8 de rombos y J de picas.
Kirk O'Newton: 4 de corazones y as de rombos.
Robert Einsteniak: 3 de corazones y 7 de trébol.
a) ¿Cuántas posibilidades de obtener 21 puntos tiene Clint McGauss si pide una tercera carta? ¿Y de sobrepasar los 21 puntos?
b) John Euclidean no sabe si plantarse o pedir más cartas. Como es un poco tramposo ha marcado la baraja y sabe que la carta que le va a tocar a Clint McGauss es de corazones. ¿Qué posibilidad hay de que Clint McGauss le gane con esa única carta de más, si él se planta?
Razona las respuestas.
****

Si alguien entra en el laberinto de la figura por E y avanza tomando siempre al azar un camino entre los posibles que se le presentan, ¿qué probabilidad tiene de acabar en A?



****

BOTES DE PINTURA
Una fábrica de pintura asigna un código a cada bote que sale de la cadena de producción. El código termina en un número de orden que va aumentando de uno en uno a medida que se van etiquetando los sucesivos botes. Automáticamente, la cadena somete a un control de calidad a todos los botes cuyo código termina en cero.
A continuación, la mercancía se envasa en cajas de 12 botes y pasa al almacén, lista para su distribución comercial.
a) Escribe los códigos de los tres primeros botes que se someterán al control de calidad después del que lleva el código AD45NH00684.
b) Si el código anterior corresponde al bote que completó una caja, escribe los códigos de los botes sometidos al control de calidad en las tres cajas siguientes.
c) ¿Cuántos botes de una misma caja pueden sufrir el control de calidad?
d) ¿Qué tanto por ciento de las cajas contienen dos botes pasados por el control de calidad?
e) ¿Cuál es la probabilidad de que una caja, elegida al azar, contenga dos botes que hayan sido controlados?
****

Problema de Monthy Hall
Un concursante debe elegir entre 3 puertas, 1, 2 y 3, una tenía un coche y en las otras dos un plátano
El concursante debe elegir una puerta y si tiene el coche se lo lleva.
El concursante, por ejemplo, elige la puerta 1. El presentador le abre una de las puertas, 2 o 3 y le muestra que hay un plátano. Y le pregunta al concursante, ¿quiere quedarse con la puerta 1 o quiere cambiar? ¿Qué le conviene al concursante?
Solución: Conviene cambiar
Las posibilidades son: CPP, PCP, PPC. Hay doble probabilidad de ganar si cambio que si no lo hago

****

Fórmulas de Bayes

Usando la definición de probabilidad condicionada y el teorema de la probabilidad total deducimos

$$\begin{cases} p(A_1/A) = \dfrac{p(A_1 \cap A)}{p(A)} \\ p(A_2/A) = \dfrac{p(A_2 \cap A)}{p(A)} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\boxed{\underline{\textbf{fórmulas de Bayes}}: \begin{cases} p(A_1/A) = \dfrac{p(A_1).p(A/A_1)}{p(A)} \\ p(A_2/A) = \dfrac{p(A_2).p(A/A_2)}{p(A)} \end{cases}, \text{ siendo } p(A) = p(A_1).p(A/A_1) + p(A_2).p(A/A_2)}$$

<u>Nota</u>: Las fórmulas son válidas para más de 2 sucesos, por ejemplo, para 3 sucesos A_1 , A_2 , A_3 incompatibles 2 a 2, tales que $A_1 \cup A_2 \cup A_3 = E$ y A un suceso cualquiera.

<u>Ejemplo</u>

En la misma situación del ejemplo anterior: Si la bola extraída es azul,

La probabilidad de que se haya sacado la bola de la urna U_1 sería

$$p(A_1/A) = \frac{P(A_1 \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A_1).P(A/A_1)}{P(A)} = \frac{\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{5}}{\frac{13}{20}} = \frac{8}{13}$$

La probabilidad de que se haya sacado la bola de la urna U_2 sería

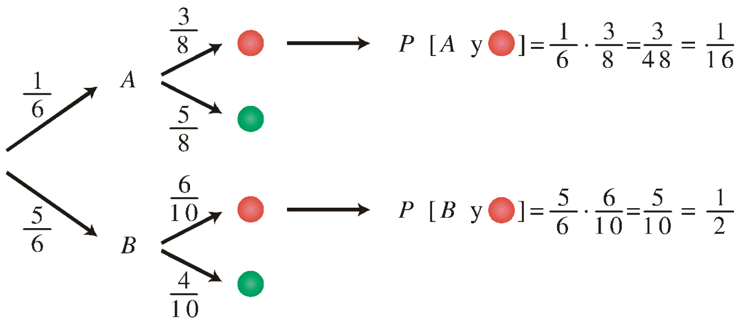
$$p(A_2/A) = \frac{P(A_2 \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A_2).P(A/A_2)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}}{\frac{13}{20}} = \frac{5}{13}$$

Una bola bolsa, *A*, contiene 3 bolas rojas y 5 verdes. Otra bolsa, *B*, contiene 6 bolas rojas y 4 verdes. Lanzamos un dado: si sale un uno, extraemos una bola de la bolsa *A*; y si no sale un uno, la extraemos de *B*.

a) ¿Cuál es la probabilidad de obtener una bola roja?

b) Sabiendo que salió roja, ¿cuál es la probabilidad de que fuera de *A*?

Hacemos un diagrama en árbol:



a) $P[R] = \frac{1}{16} + \frac{1}{2} = \frac{9}{16}$

b) $P[A/R] = \dfrac{P[A \text{ y } R]}{P[R]} = \dfrac{1/16}{9/16} = \dfrac{1}{9}$

Se tienen dos urnas U1 y U2 cuyo contenido en bolas rojas, azules y verdes es; en la urna U1 4 bolas azules, 3 bolas rojas y 3 verdes, en la urna U2 4 rojas, 5 azules y una verde. Se lanzan tres monedas y si se obtienen exactamente dos caras seguidas se extrae una bola de la urna U1, en otro caso se extrae de la urna U2. Se pide:

a) Espacio muestral para el experimento aleatorio de lanzar tres monedas.

b) Calcular la probabilidad de que la bola extraída sea azul.

Se tira una moneda trucada 2 veces y se sabe que p(cc) = 4/25 , p(cx) = p(xc) = 6/25 y p(xx) = 9/25. ¿Cuál es la probabilidad de que salga al menos una cara? [Solución: 16/25]

****

Se tiran 3 monedas al aire y sean los sucesos:

A = salir al menos una cara B = salir al menos dos cruces

C = salir dos caras y una cruz. a) Calcula la probabilidad de:

A , B , C , A^c , B^c , $A \cap B$, $B \cup C$, $A^c \cup B^c$, $(B \cup C)^c$, $A - B$ y $B - A$.

b) Comprueba que $C \subset A$ y por tanto $p(C) < p(A)$ c) Averigua si son incompatibles A y B

d) ¿Son incompatibles B y C?

[**Solución**: a) p(A) = 7/8 ; p(B) = 1/2 ; p(C) = 3/8

$p(A^c) = 1/8$; $p(B^c) = 1/2$; $p(A \cap B) = 3/8$; $p(B \cup C) = 7/8$ $p(A^c \cup B^c) = 5/8$; $p[(B \cup C)^c] = 1/8$; $p(A - B) = 1/2$ $p(B - A) = 1/8$ c) Son compatibles d) Sí]

****

Se realiza el experimento de lanzar tres monedas al aire. Sean los sucesos: A = "salir exactamente 2 caras" B = Salir exactamente 1 cara C = Salir al menos 1 cruz D = salir al menos 2 cruces

F = salir exactamente 3 caras

G = salir 2 caras y 2 cruces H = salir menos de 4 caras.

a) Indica el espacio muestral, los sucesos anteriores y sus contrarios

b) Comprueba que $D \subset C$ y que por tanto $C^c \subset D^c$

c) Representa en diagrama de Venn el suceso A y su complementario

****

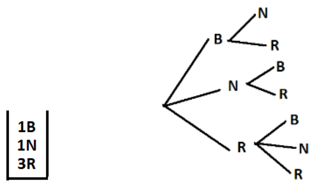
En un experimento se lanza al aire 12 monedas. Si el experimento se repite muchas veces, ¿cuál de los siguientes resultados se producirá más a menudo?

a) 2 caras y 10 cruces b) 6 caras y 6 cruces c) 5 caras y 7 cruces d) 7 caras y 5 cruces

****

Una bolsa contiene 1 bola blanca, 1 bola negra y 3 bolas rojas. Sacamos una bola y luego, sin devolverla a la bolsa, sacamos otra bola.

a) Obtén, mediante diagrama de árbol, el espacio muestral



E = { BN , BR , NB , NR , RB , RN , RR }

b) Describe los sucesos: A = "la segunda bola es negra" , B = " La primera bola es roja "

A = { BN , RN } B = { RB , RN , RR }

c) Determina los sucesos $\bar{A}$ y $\bar{B}$

$\bar{A}$ = " La 2ª bola no es negra " = { BR , NB , NR , RB , RR } $\bar{B}$ = " La primera bola no es roja " = { BN , BR , NB , NR }

d) Explica si es cierto que A y B son compatibles Son compatibles, pues podemos sacar la 1ª bola negra y la 2ª roja
****

Tenemos en el bolsillo 3 monedas de 1 € y 5 monedas de 50 céntimos. Sacamos al azar una tras otra. Calcula la probabilidad de que: a) La última moneda sea de 1 € b) Las tres primeras monedas sean de 50 céntimos c) Las dos primeras monedas sean distintas. [**Solución**: a) 3/8 b) 5/28 c) 15/28]
****

Dados

Se lanzan 2 dados. Halla la probabilidad de: a) No salgan números distintos
b) No salga el 6 en ninguno de ellos c) No salga el 1 doble d) la suma de los puntos sea 6
e) la diferencia de sus puntos sea 2 f) el producto de sus puntuaciones sea 6 g) la suma de los puntos sea menor que 5 h) obtener puntuaciones distintas en ambos dados?
****

Consideramos el experimento aleatorio de lanzar dos dados distintos y anotar el producto de sus puntuaciones.
a) ¿Cuál es la probabilidad de que dicho producto sea igual a 6?
b) Si sabemos que el producto ha sido 4, ¿cuál es la probabilidad de que hayan salido los dos dados con la misma puntuación?

****

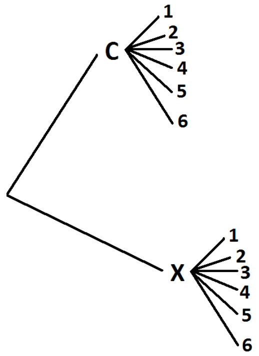
Tiramos 2 dados y anotamos la suma de los puntos. Sean los sucesos A = "obtener un número par"
B = "obtener un múltiplo de 3" C = obtener un número menor que 4"
D = "obtener un múltiplo de 4" .
a) Describe el espacio muestral y los sucesos A, B, C y D.
b) Haz un diagrama de Venn con los sucesos E , A y B y determina A U B y A ∩ B
c) Comprueba las leyes de Morgan con los sucesos A y B
d) Determina el suceso A - C
e) Los sucesos B y C, ¿son compatibles?
****

Se lanza un dado tetraédrico 2 veces y se anotan los resultados de la cara inferior.
Halla la probabilidad de que el producto de sus puntos:
a) Sea par b) No sea 6 c) Sea un múltiplo de 5
d) Sea 3 ó 4 e) Sea inferior a 10 f) Sea par o primo
****

Lanzamos dos dados y, con los números que aparecen formamos una fracción menor o igual que uno. Juan dice que, en la próxima tirada, la fracción será reducible y Pepe que será irreducible.
¿Quién de los dos crees que tiene más posibilidades de acertar?
****

Al cumpleaños de Isabel asisten doce amigas y amigos. En la entrada le dan a cada uno una tarjeta con un número del 1 al 12. Durante la fiesta se hará un sorteo, lanzando dos dados y sumando los puntos de las caras superiores.
Si pudieras elegir, ¿qué número preferirías? ¿Por qué?
****

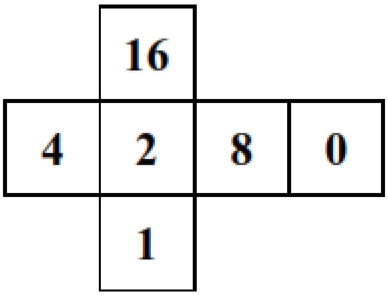
Considera el experimento aleatorio que consiste en tirar una moneda y después un dado.
a) Escribe el espacio muestral usando un diagrama de árbol



b) Describe el suceso A = “salir múltiplo de 3 y cara” y después calcula su probabilidad

****

Un dado especial, al desarrollarlo tiene la configuración que se acompaña. Al lanzar dos dados iguales a éste, ¿qué sumas se pueden obtener?; ¿cuál es la que tiene más probabilidad de aparecer?



****

¿Cuántas veces se debe lanzar un dado para tener un 95% de posibilidades de que salga al menos un seis?

****

Se lanza un dado y, a continuación, tantas monedas como puntos se hayan obtenido en el lanzamiento del dado. (Tanto el dado como las monedas se suponen equilibradas). Calcular.

a) la probabilidad de obtener exactamente 3 caras.

b) El número medio de caras que se obtendrán

c) la probabilidad de que la puntuación del dado fuese 5, si se sabe que se han obtenido 3 caras.

****

Disponemos de tres dados en los que hemos pintado las caras así:

Primer dado: 1 1 2 2 3 3

Segundo 1 1 1 2 2 2

Tercero 0 0 1 1 2 2

Encuentra las siguientes probabilidades:

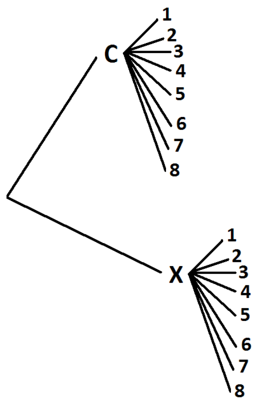
a) que los tres dados den un número par

b) que los tres tengan el mismo número

c) que la suma de los tres dados sea par

****

Se lanza una moneda y luego se saca una bola de una bolsa que tiene 8 monedas numeradas del 1 al 8. Obtén el espacio muestral



barajas

Extraemos dos cartas de una baraja española. Calcula la probabilidad de obtener:

a) Dos ases b) Ningún as c) Algún as

****

¿Cuál será la probabilidad de obtener tres copas al extraer tres cartas de una baraja de 40? ¿Y que ninguna sea copa?

****

Extraemos dos cartas de la baraja española. Calcula la probabilidad de que la primera sea un caballo y la segunda un rey, si la primera carta no de devuelve a la baraja después de la extracción.

bolas

Una bolsa contiene 3 bolas azules, 2 rojas y 1 verde. Sacamos las 2 bolas sin reemplazamiento.

a) Describe el espacio muestral b) Describe los sucesos: A = "la primera bola es roja" B = " La segunda bola es azul "

C = " Una bola es azul y la otra verde" D = ninguna bola es azul F = " las 2 bolas son verdes "

c) Describe el suceso contrario de cada uno de los anteriores

d) Averigua si son compatibles o incompatibles: 1) A y B 2) A y C 3) A y D 4) B y C 5) B y D 6) C y D

****

Una bolsa contiene 2 bolas verdes, 3 negras y 1 blanca. Sacamos las 2 bolas sin devolver a la bolsa.

a) Describe el espacio muestral

b) describe los sucesos: A = "la primera bola es blanca" B = " La segunda bola es verde "

C = " Una bola es blanca y la otra negra" D = " las 2 bolas son blancas "

c) Describe el suceso contrario de A y de B

d) ¿Son B y C compatibles? e) ¿Y A y C?

****

Se realiza el experimento de sacar sucesivamente con reemplazamiento 3 bolas de una urna que contiene 1 bola roja y 1 verde.

Sean los sucesos: A = "salir exactamente 2 bolas rojas" B = Salir exactamente 1 bola roja

C = Salir al menos una bola verde D = salir al menos 2 bolas verdes

F = salir exactamente 3 bolas rojas G = salir 3 bolas rojas y 3 verdes H = salir 3 bolas de color.

a) Indica el espacio muestral, los sucesos anteriores y sus contrarios

b) Comprueba que $C \subset D$ y que por tanto $D^c \subset C^c$

c) Representa en diagrama de Venn el suceso A y su complementario

****

Tenemos 2 urnas A y B. La urna A tiene 1 bola roja y 4 verdes; la urna B tiene 3 bolas rojas y 2 verdes Sacamos una bola de A y la echamos en la urna B; luego sacamos una bola de B. Halla las siguientes probabilidades:

a) Las dos bolas han sido rojas b) Las dos bolas han sido verdes

c) La primera bola ha sido roja y la segunda verde d) La segunda bola ha sido roja sabiendo que la primera ha sido verde

****

Sacamos una bola de una bolsa que contiene 2 bolas azules, 2 rojas y 1 verde; después, sin devolverla a la bolsa, sacamos otra bola. Usa un diagrama de árbol para determinar la probabilidad de que la segunda bola haya salido verde
****

En una bolsa hay 9 bolas numeradas del 1 al 9. ¿Cuál es la probabilidad de que al sacar 3 bolas con reemplazamiento las tres sean números pares? ¿Y si las extracciones se hacen sin reemplazamiento?
****

Para adjudicar un premio entre tres estudiantes se prepara una bolsa con dos bolas negras y una bola blanca. Los tres van sacando, por orden, una bola que no devuelven. Quien saque la bola blanca gana. ¿Quién lleva más ventaja: el primero, el segundo o el tercero?
****

Dentro de una bolsa hay dos bolas blancas y una bola negra. Manuela mete la mano y, sin mirar, saca dos bolas. ¿Qué es más fácil: que sean del mismo color o que sean de colores diferentes?
Solución:
Es más fácil que sean de colores diferentes.
Explicación: Hay tres posibilidades: A. Extraer dos bolas blancas. B. Extraer la bola negra y una de las dos bolas blancas. C. Extraer una de las bolas blancas y la bola negra. En dos de estas posibilidades se extraen bolas de colores diferentes; por lo tanto, es más fácil.
****

Disponemos de tres cajas con dos bolas en cada una de ellas. En una caja las dos bolas son blancas, en otra, las dos son negras y en la otra una blanca y otra negra. Sin conocer las cajas y sin ver el contenido de ellas, meto la mano al azar y saco una bola blanca.
¿Cuál es la probabilidad de que la otra bola que queda en la caja sea blanca?
****

Una urna contiene n bolas negras y 3 blancas. Al azar, un jugador debe extraer las bolas una a una (sin remplazamiento), pierde si no consigue extraer dos blancas seguidas; si saca las dos primeras blancas, gana una cantidad c y en caso contrario, su ganancia se duplica con cada bola negra extraída antes de la pareja de blancas.
a) Determinar la probabilidad de perder que tiene el jugador.
b) Determinar la cantidad a pagar por el jugador, cuando pierde, para que el beneficio esperado sea nulo.
****

(árbol)De una urna que contiene 7 bolas azules y 5 verdes se extraen dos bolas al azar sin devolución ¿Cuántas son las probabilidades de los resultados posibles?
****

(árbol)Una urna contiene 3 bolas rojas y 2 verdes. Otra urna contiene 2 bolas rojas y 3 bolas verdes. Se toma al azar una bola de cada urna ¿Cuál es la probabilidad de que ambas bolas sean del mismo color? ¿Y de que sean de distinto color?
****

(árbol)En un hotel hay 3 cajas fuertes. En una de ellas hay 6 joyas buenas y 2 falsas; en otra, 5 joyas buenas y 1 falsa; y en la tercera hay 6 joyas valiosas y 3 falsas. Suponiendo que un ladrón solo puede abrir una caja fuerte y llevarse una joya, calcula la probabilidad de que se lleve la bisutería.
****

(árbol)En un instituto se están aplicando experimentalmente la ESO y los alumnos están repartidos de la siguiente forma: 40% en 1º, 30% en 2º, 20% en 3º y el resto en 4%. El porcentaje de aprobados en cada curso está en el 70% en 1º, 60% en 2º, 40% en tercero y 30% en 4º. Si elegimos un alumno de este instituto ¿Cuál es la posibilidad de que haya aprobado? ¿Y de que haya suspendido?

(árbol)Una mesa de despacho tiene dos cajones. El primero contiene 4 rotuladores rojos y dos azules. El segundo contiene 3 rotuladores rojos y 3 azules. Se abre un cajón y se extrae un rotulador ¿cuál será la probabilidad de que se haya abierto el segundo y se haya cogido un rotulador rojo?
****

(árbol)Dos jugadores (A y B) inician cierto juego con 300 € cada uno. Al finalizar cada partida, el ganador recibe 100 € del perdedor. Sabiendo que A tiene probabilidad 0.6 de ganar cada partida y que el juego finaliza cuando alguno de los dos se quede sin dinero, contestar justificando la respuesta:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que A tengan el mismo dinero con el que empezaron tras jugar 2 partidas?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que A tenga 400 € tras jugar 3 partidas?
c) ¿Cuál es la probabilidad de finalizar el juego tras jugar 3 partidas?

****

(árbol)Se considera el sexo de los hijos de las familias de tres hijos. Suponiéndolos de distinta edad, calcula los sucesos a) A = "el hijo mayor es una hembra" b) B = "los dos hijos pequeños son varones" c) A^c d) B^c e) $A \cup B$ f) $A \cap B$ g) $A^c \cap B$ h) $A - B$ i) $(A \cup B)^c$ j) $A^c \cap B^c$ k) $(A \cap B)^c$ l) $A^c \cup B^c$. Comprueba las leyes de Morgan para los sucesos A y B

****

(árbol)Un jugador que suele encestar el 70% de sus tiros, tiene que lanzar una falta personal. Si el jugador acierta el primer tiro, puede repetir el lanzamiento. Por lo tanto, es posible que consiga 0 puntos (fallando el primer lanzamiento) o 1 punto (acertando el primero y fallando el segundo) o 2 puntos (acertando los dos) ¿Qué probabilidad tiene en cada caso?

****

Tenemos dos monedas, una normal y otra con dos caras. Se elige una moneda al azar y se lanza. La probabilidad de elegir la moneda normal es 3/4. ¿Cuál es la probabilidad de elegir la moneda de dos caras sabiendo que ha salido cara en el lanzamiento?

****

(dados)Se lanzan dos dados equilibrados de seis caras tres veces consecutivas.
1. Calcular la probabilidad de que en los tres lanzamientos salga el seis doble.
2. Calcular la probabilidad de que en los tres lanzamientos salga un doble distinto del seis doble.

****

(baraja)De una baraja española de 40 cartas se extraen sucesivamente tres cartas al azar. Determinar la probabilidad de obtener:
1. Tres reyes.
2. Una figura con la primera carta, un cinco con la segunda y un seis con la tercera.
3. Un as, un tres y un seis, en cualquier orden.

****

(dados)En un experimento aleatorio consistente en lanzar simultáneamente tres dados equilibrados de seis caras, se pide calcular la probabilidad de cada uno de los siguientes sucesos: "Obtener tres unos", "Obtener al menos un dos", "Obtener tres números distintos" y "Obtener una suma de cuatro".

****

(árbol cajas)Una urna contiene dos bolas. La urna se llenó tirando una moneda equilibrada al aire dos veces y poniendo una bola blanca por cada cara y una negra por cada cruz. Se extrae una bola de la urna y resulta ser blanca. Hallar la probabilidad de que la otra bola de la urna sea también blanca.

****

(monedas)En un juego consistente en lanzar dos monedas indistinguibles y equilibradas y un dado de seis caras equilibrado, un jugador gana si obtiene dos caras y un número par en el dado, o bien exactamente una cara y un número mayor o igual a cinco en el dado.
1. Calcúlese la probabilidad de que un jugador gane.
2. Se sabe que una persona ha ganado. ¿Cuál es la probabilidad de que obtuviera dos caras al lanzar las monedas?

****

(monedas)Calcúlese la probabilidad de cada uno de los sucesos siguientes:
1. Obtener dos caras y una cruz en el lanzamiento de tres monedas equilibradas e indistinguibles.
2. Obtener una suma de puntos igual a seis o siete en el lanzamiento de dos dados de seis caras equilibrados e indistinguibles.

****

(baraja)La baraja española consta de diez cartas de oros, diez cartas de copas, diez cartas de espadas y diez cartas de bastos.
Se extraen tres cartas. Averiguar razonadamente cuál es la probabilidad de que al menos una de las cartas de oros en los siguientes supuestos:

a) No se devuelven las cartas después de la extracción.
b) Después de cada extracción se devuelve la carta a la baraja antes de la extracción siguiente.
****

(árbol)Una moneda está trucada de manera que la probabilidad de salir cara es doble que la de salir cruz. Se lanza la moneda y si sale cara se elige al azar un número entre el 1 y el 5; si sale cruz se elige al azar un número entre el 1 y el 3. Calcula la probabilidad de los siguientes sucesos:
a) Salga cara en la moneda.
b) Salga cruz en la moneda.
c) Resulte elegido el número 5.
d) Resulte elegido un número par.
****

(dado)Se dispone de un dado equilibrado de seis caras, que se lanza seis veces con independencia. Calcúlese la probabilidad de cada uno de los sucesos siguientes:
1. Obtener al menos un seis en el total de los lanzamientos.
2. Obtener un seis en el primer y último lanzamientos y en los restantes lanzamientos un número distinto de seis.
****

Se dispone de cinco cajas opacas. Una contiene una bola blanca, dos contienen una bola negra y las otras dos están vacías. Un juego consiste en ir seleccionando al azar y secuencialmente una caja no seleccionada previamente hasta obtener una que contenga una bola.
Si la bola de la caja seleccionada es blanca, el jugador gana; si es negra, el jugador pierde.
1. Calcúlese la probabilidad de que el jugador gane.
2. Si el jugador ha perdido, ¿cuál es la probabilidad de que haya seleccionado una sola caja?
****

Se lanza un dado trucado de forma que la probabilidad de obtener cada resultado es proporcional al número respectivo. Calcula la probabilidad de que al lanzarlo salga un número par
****

Se tiene un dado trucado de forma que la probabilidad de los resultados pares es 1/9 cada una y la de los resultados impares es 2/9 cada una. Si se tira el dado, ¿cuál es la probabilidad de que salga un número menor que 4?
****

Se tiene un dado trucado de forma que la probabilidad de los resultados impares es 7/30 cada una y la de los resultados pares es 1/10 cada una. Si se tira el dado, ¿cuál es la probabilidad de que salga un número mayor que 3?
****

Una experiencia aleatoria consiste en preguntar a tres personas distintas elegidas al azar, si son partidarias o no de consumir un determinado producto.
a) Escribe el espacio muestral asociado a dicho experimento, utilizando la letra "s" para la respuestas afirmativas y la "n" para las negativas.
b) ¿Qué elementos del espacio muestral anterior constituyen el suceso "al menos dos de las personas son partidarias de consumir el producto".
c) Describe el suceso contrario de "más de una persona es partidaria de consumir el producto".
****

Sean A, B y C tres sucesos de un experimento aleatorio. Expresa en función de ellos y sus contrarios los sucesos:
a) Se realizan A y B b) Se realiza A y B pero no C c) Se realiza al menos uno de los tres
d) No se realiza ninguno de los tres e) Se realiza solamente uno de los tres
f) Se realizan exactamente dos de ellos g) No se realiza ni A ni B h) Se realiza A pero no C
i) Se realizan los 3 sucesos j) Se realiza al menos uno de los 3 k) Se realizan al menos 2 de los tres
l) No se realiza A pero si se realizan B y C
****

Se saca una bola de una urna que contiene 10 bolas numeradas del 1 al 10. Expresa en forma de uniones e intersecciones: a) salir impar y no múltiplo de 3 b) salir par o múltiplo de 3
c) salir impar y múltiplo de 3
****

Sean A y B dos sucesos aleatorios de forma que p(A) = 3/10 , p(B) = 3/5 , p(A ∩ B) = 1/5. Calcula:
a) $p(A^c)$ b) p(A U B)
****

Sean A y B dos sucesos tales que p(A) = 0,24 , p(B) = 0,36 y p(A U B) = 0,6. ¿Son A y B incompatibles?
****

Sean A y B dos sucesos asociados a un cierto experimento aleatorio. Sabiendo que p(A) = 2/3, p(B) = 1/5 y p(A U B) = 4/5. Se pide la probabilidad de que: a) Se verifiquen A y B
b) No se verifique A c) No se verifique B
d) No se verifique ni A ni B e) Se verifique A y no B
[Solución: a) 1/15 b) 1/3 c) 4/5 d) 1/5 e) 3/5]
****

Sean A y B dos sucesos aleatorios de forma que p(A) = 1/6 , p(B) = 1/4 , p(A ∩ B) = 1/3.
Calcula: a) $p(A^c)$ b) $p(B^c)$ c) p(A U B)
****

Sean A y B dos sucesos aleatorios de forma que p(A) = 3/10 , p(B) = 3/5 , p(A ∩ B) = 1/5. Calcula:
a) $p(A^c)$ b) p(A U B)
****

Sean A y B dos sucesos tales que P(A) = 0,4 $P(B^c)$ = 0,7 y P(A U B) = 0,6 , donde B^c es el suceso contrario de B. a) ¿ Son independientes A y B ? b) Calcule $P(A/B^c)$
****

Se dispone de la siguiente información relativa a los sucesos A y B: p(A) = 0,6 p(B) = 0,2 p(A ∩ B) = 0,12
1. calcular las probabilidades de los sucesos (A U B) y (A/(A U B))
2. ¿Son incompatibles? ¿Son independientes?
****