

ĐỀ THI KHẢO SÁT CHẤT LƯỢNG ĐỘI TUYỂN HSG LẦN 1

Môn TOÁN 10

Thời gian: 120 phút.

Câu 1 (2,0 điểm) Cho hàm số $y = (m - 2)x^2 - (3m - 1)x + 2m + 1$ có đồ thị (P_m) với m là tham số.

- Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (P_1) của hàm số đã cho khi $m = 1$.
- Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng $d: y = (1 - m)x + m$ cắt đồ thị (P_m) tại

hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn $\frac{3}{x_1} + \frac{3}{x_2} = \frac{2}{2x_1x_2 - x_1 - x_2} + 4$.

Câu 2 (1,0 điểm)

Xác định phương trình của parabol (P) đi qua điểm $A(-1; -1)$, nhận đường thẳng $x = 2$ làm trục đối xứng và cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng -6 .

Câu 3 (3,0 điểm) Giải các phương trình và hệ phương trình sau:

- $\sqrt{x^2 - 4x + 3} = \sqrt{2x - 5}$.
- $\sqrt{x - 1} + \sqrt{6 - x} + \sqrt{-x^2 + 7x - 6} = 5$.
- $$\begin{cases} x^2 - x + \sqrt{x} = xy + \sqrt{y + 1} \\ 2x^3 + 1 = x\sqrt{4x^2 + 5y^2 - 5} + 9y \end{cases}$$

Câu 4 (2,0 điểm)

Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có $A(2; -1)$, $B(-1; 3)$ và $C(5; 3)$.

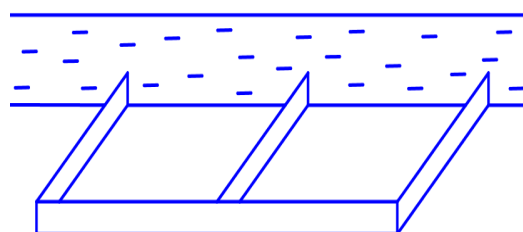
- Tính chu vi của tam giác ABC và góc $\hat{A}$.
- Xác định tọa độ điểm H là hình chiếu vuông góc của điểm C trên đường thẳng AB .

Câu 5 (1,0 điểm)

Cho tam giác ABC cân tại A có $AB = 1$ và $\hat{BAC} = 120^\circ$. Gọi M là điểm thuộc cạnh AC sao cho $AM = 2MC$. Xác định vị trí của điểm N trên cạnh BC sao cho AN vuông góc BM .

Câu 6 (1,0 điểm)

- Tìm tất cả các giá trị của tham số m để trên đồ thị (C) của hàm $y = x^2 + mx + 5 - m$ có hai điểm phân biệt đối xứng nhau qua gốc tọa độ O .
- Một người nông dân có 6 triệu đồng để làm một hàng rào chữ E dọc theo một con sông (như hình vẽ bên) làm một khu đất có hai phần là hình chữ nhật để trồng rau. Đối với một hàng rào song song bờ sông thì chi phí nguyên vật liệu là 60000 đồng một mét, còn đối với ba mặt hàng rào song song nhau thì chi phí

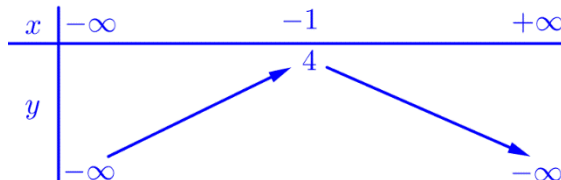
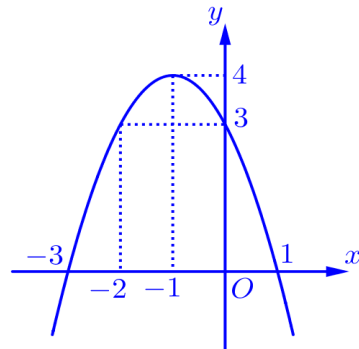


nguyên vật liệu là 40000 đồng một mét. Tính diện tích lớn nhất của khu đất rào thu được.

----- HẾT -----

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

ĐÁP ÁN

Câu	Đáp án	Điểm m
1 (2,0 điểm)	Cho hàm số $y = (m - 2)x^2 - (3m - 1)x + 2m + 1$ có đồ thị (P_m) với m là tham số. a. (1,0 điểm) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (P_1) của hàm số đã cho khi $m = 1$.	
	Với $m = 1$ $\Rightarrow$ Hàm số trở thành $y = -x^2 - 2x + 3$. ▪ Tập xác định: $D = \mathbb{R}$. ▪ Sự biến thiên: Vì $a = -1 < 0$ nên ta có bảng biến thiên:	0,25
	 $\Rightarrow$ Hàm số đồng biến trên $(-\infty; -1)$ và nghịch biến trên $(-1; +\infty)$.	0,25
	▪ Đồ thị: Đỉnh của (P_1) là $I(-1; 4)$. Trục đối xứng là đường thẳng $x = -1$. Vì $a = -1 < 0$ nên parabol (P_1) có bề lõm quay xuống dưới. 	0,5
	b. (1,0 điểm) Tìm giá trị m để đường thẳng $d: y = (1 - m)x + m$ cắt đồ thị (P_m) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn $\frac{3}{x_1} + \frac{3}{x_2} = \frac{2}{2x_1x_2 - x_1 - x_2} + 4$.	
	Hoành độ giao điểm của (P_m) và d là nghiệm của phương trình: $(m - 2)x^2 - 2mx + m + 1 = 0 \quad (1)$ (P_m) cắt d tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow (1)$ có hai nghiệm phân biệt. $\hat{D} \begin{cases} m - 2 \neq 0 \\ \Delta' = m + 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \hat{D} \begin{cases} m \neq 2 \\ m > -2 \end{cases} (*)$	0,25

	$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{2m}{m-2} \\ x_1 x_2 = \frac{m+1}{m-2} \end{cases}$		0,25
	Vì x_1, x_2 là nghiệm của (1) nên ta có: $\hat{U} \frac{3(x_2 + x_1)}{x_1 x_2} = \frac{2}{2x_1 x_2 - (x_1 + x_2)} + 4 \hat{U} \frac{6m}{m+1} = \frac{2}{\frac{2}{m-2}} + 4.$ Giả thiết $\hat{U} \frac{6m}{m+1} = m+2 \hat{U} m^2 - 3m + 2 = 0 \hat{U} \begin{cases} m = 1 \\ m = 2 \end{cases}$		0,25
	Kết hợp điều kiện (*) $\Rightarrow m = 1$ thỏa mãn. Vậy giá trị m cần tìm là $m = 1$.		0,25
2 (1,0 điểm)	Xác định phương trình của parabol (P) đi qua điểm $A(-1; -1)$, nhận đường thẳng $x = 2$ làm trục đối xứng và cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng -6.		
	Giả sử phương trình parabol (P) là: $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$). $A(-1; -1) \in (P) \hat{U} a - b + c = -1$ (1)		0,25
	Đường thẳng $x = 2$ là trục đối xứng $\Rightarrow -\frac{b}{2a} = 2 \hat{U} 4a + b = 0$ (2)		0,25
	Do (P) cắt Oy tại điểm có tung độ -6 nên $B(0; -6) \in (P) \hat{U} c = -6$ (3)		0,25
	Từ (1), (2), (3) suy ra $\begin{cases} a = 1 \\ b = -4 \\ c = -6 \end{cases}$ (thỏa mãn) Vậy phương trình parabol (P) là $y = x^2 - 4x - 6$.		0,25
3 (3,0 điểm)	a. (1,0 điểm) $\sqrt{x^2 - 4x + 3} = \sqrt{2x - 5}$.		
	Phương trình $\hat{U} \begin{cases} 2x - 5 \geq 0 \\ x^2 - 4x + 3 = 2x - 5 \end{cases} \hat{U} \begin{cases} 2x - 5 \geq 0 \\ x^2 - 6x + 8 = 0 \end{cases}$		0,5
	$\hat{U} \begin{cases} x \geq \frac{5}{2} \\ x = 2 \\ x = 4 \end{cases} \hat{U} x = 4.$ (nếu thiếu điều kiện hoặc không loại nghiệm trừ 0,25 điểm)		0,25
	Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{4\}$.		0,25
	b. (1,0 điểm) $\sqrt{x-1} + \sqrt{6-x} + \sqrt{-x^2+7x-6} = 5$.		
	Điều kiện: $1 \leq x \leq 6$. Đặt $t = \sqrt{x-1} + \sqrt{6-x}$ ($t > 0$).		0,25

	$\hat{U} \quad t^2 = 5 + 2\sqrt{(x-1)(6-x)} \quad \hat{U} \quad \sqrt{-x^2 + 7x - 6} = \frac{t^2 - 5}{2}.$	
	$t + \frac{t^2 - 5}{2} = 5 \quad \hat{U} \quad t^2 + 2t - 15 = 0 \quad \hat{U} \quad \begin{cases} t = 3 \\ t = -5 \end{cases}$ Phương trình trở thành: Kết hợp với điều kiện $t > 0 \Rightarrow t = 3$.	0,25
	$t = 3 \Rightarrow \sqrt{-x^2 + 7x - 6} = 2 \quad \hat{U} \quad x^2 - 7x + 10 = 0 \quad \hat{U} \quad \begin{cases} x = 2 \\ x = 5 \end{cases} \quad (\text{thỏa mãn})$ Với	0,25
	Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là: $S = \{2; 5\}$.	0,25
	c. (1,0 điểm) $\begin{cases} x^2 - x + \sqrt{x} = xy + \sqrt{y+1} & (1) \\ 2x^3 + 1 = x\sqrt{4x^2 + 5y^2 - 5} + 9y & (2) \end{cases}$	
	Điều kiện: $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq -1 \\ 4x^2 + 5y^2 - 5 \geq 0 \end{cases} \quad (*)$ Khi đó, (1) $\hat{U} \quad x(x - y - 1) + \sqrt{x} - \sqrt{y+1} = 0$.	0,25
	$\hat{U} \quad x(\sqrt{x} - \sqrt{y+1})(\sqrt{x} + \sqrt{y+1}) + (\sqrt{x} - \sqrt{y+1}) = 0.$ $\hat{U} \quad (\sqrt{x} - \sqrt{y+1})\left(\frac{x}{\sqrt{x} + \sqrt{y+1}} + 1\right) = 0.$ $\hat{U} \quad \begin{cases} \sqrt{x} = \sqrt{y+1} \\ \frac{x}{\sqrt{x} + \sqrt{y+1}} + 1 = 0 \quad (VN \text{ do } x \geq 0) \end{cases}$ $\hat{U} \quad x = y + 1 \quad \hat{U} \quad y = x - 1.$ (Nếu học sinh nhân liên hợp mà không xét $\sqrt{x} + \sqrt{y+1} = 0$ trừ 0,25)	0,25
	Thay $y = x - 1$ vào (2) ta được: $2x^3 + 1 = x\sqrt{9x^2 - 10x + 9} - 9x + 9 = 0$. $\hat{U} \quad 2x^3 - x\sqrt{x(9x - 10)} - (9x - 10) = 0 \quad (3)$ Đặt $\begin{cases} a = x\sqrt{x} & (a \geq 0) \\ b = \sqrt{9x - 10} & (b \geq 0) \end{cases}$ do (*) $\hat{U} \quad \begin{cases} x^3 = \frac{9}{10} \\ y^3 = -1 \end{cases}$ $2a^2 - ab - b^2 = 0 \quad \hat{U} \quad \begin{cases} a = b & (\text{tm}) \\ a = -\frac{b}{2} & (\text{loại}) \end{cases}$ Khi đó, (3) trở thành:	0,25
	Với $a = b \Rightarrow x\sqrt{x} = \sqrt{9x - 10} \quad \hat{U} \quad x^3 - 9x + 10 = 0 \quad (\text{do } (*))$	0,25

	$\begin{cases} x = 2 \\ x = -1 + \sqrt{6} \\ x = -1 - \sqrt{6} \end{cases} \begin{cases} (tm(*)) \vdash y = 1 \\ (tm(*)) \vdash y = -2 + \sqrt{6} \\ (loại) \end{cases}$ $\hat{U} (x - 2)(x^2 + 2x - 5) = 0$ $S = \{(2, 1), (-1 + \sqrt{6}, -2 + \sqrt{6})\}.$ Vậy tập nghiệm của hệ phương trình là	
4 (2,0 điểm)	Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có $A(2; -1), B(-1; 3)$ và $C(5; 3)$. a. (1,0 điểm) Tính chu vi của tam giác ABC và góc $\hat{A}$. Ta có: $\overrightarrow{AB} = (-3; 4) \vdash AB = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$. $\overrightarrow{AC} = (3; 4) \vdash AC = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$. $\overrightarrow{BC} = (6; 0) \vdash BC = \sqrt{6^2 + 0^2} = 6$. Do đó chu vi tam giác ABC là: $AB + BC + CA = 16$. Ta có: $\cos \hat{A} = \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{AB \cdot AC} = \frac{-9 + 16}{5 \cdot 5} = \frac{7}{25}$. Suy ra: $\hat{A} \approx 73^\circ 44'$. b. (1,0 điểm) Xác định tọa độ điểm H là hình chiếu của C trên đường thẳng AB. Giả sử $H(x_H; y_H) \vdash \overrightarrow{CH} = (x_H - 5; y_H - 3)$ và $\overrightarrow{AH} = (x_H - 2; y_H + 1)$. Do H là hình chiếu của C trên $AB \vdash \overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \hat{U} 3x_H - 4y_H = 3 \quad (1)$ Mà $H \in AB \vdash \overrightarrow{AH}$ cùng phương $\overrightarrow{AB} \hat{U} \frac{x_H - 2}{-3} = \frac{y_H + 1}{4}$. $\hat{U} 4x_H + 3y_H = 5 \quad (2)$	0,25 0,25 0,25 0,25 0,25 0,25
	Từ (1) và (2) suy ra: $\begin{cases} x_H = \frac{29}{25} \\ y_H = \frac{3}{25} \end{cases}$ Vậy tọa độ điểm H là $H(\frac{29}{25}; \frac{3}{25})$.	0,25
5 (1,0 điểm)	Cho tam giác ABC cân tại A có $AB = 1, \hat{BAC} = 120^\circ$. Gọi M là điểm thuộc cạnh AC sao cho $AM = 2MC$. Xác định điểm N trên cạnh BC sao cho $AN \perp BM$. Vì $AM = 2MC$ và $\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{MC}$ cùng hướng nên $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{MC} \hat{U} \overrightarrow{AM} = 2(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AM}) \hat{U} \overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$	0,25

	$BM = AM - AB = \frac{2}{3}AC - AB.$ Suy ra	
	Giả sử $BN = kBC$ ($0 \leq k \leq 1$). $\vec{AN} - \vec{AB} = k(\vec{AC} - \vec{AB}) \Rightarrow \vec{AN} = k\vec{AC} + (1-k)\vec{AB}.$	0,25
	Do $\vec{AN} \perp \vec{BM} \Rightarrow \vec{AN} \cdot \vec{BM} = 0 \Rightarrow \left(\frac{2}{3}\vec{AC} - \vec{AB}\right) \cdot \left(k\vec{AC} + (1-k)\vec{AB}\right) = 0.$ $\Rightarrow \frac{2k}{3}AC^2 + (k-1)AC^2 + \frac{2-5k}{3}\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 0.$ $\Rightarrow \frac{2k}{3} + (k-1) + \frac{2-5k}{3}\vec{AB} \cdot \vec{AC} \cdot \cos \widehat{BAC} = 0.$ $\Rightarrow \frac{2k}{3} + k - 1 + \frac{2-5k}{3} \cdot \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow k = \frac{8}{15}.$	0,25
	Vậy điểm N thuộc cạnh BC thỏa mãn $15BN = 8BC$.	0,25
5 (1,0 điểm)	a. (0,5 điểm) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để ...	
	Giả sử $M(x; y)$ và gọi N là điểm đối xứng của M qua $O \Rightarrow N(-x; -y).$ Ta có $M(x; y) \in (C) \Rightarrow y = x^2 + mx + 5 - m \quad (1)$ $N \in (C) \Rightarrow -y = (-x)^2 + m(-x) + 5 - m \Rightarrow y = -x^2 + mx - 5 + m \quad (2)$	0,25
	$(1), (2) \Rightarrow x^2 + mx + 5 - m = -x^2 + mx - 5 + m \Rightarrow x^2 + 5 - m = 0 \quad (3)$ Giả thiết (3) có hai nghiệm phân biệt $\Rightarrow D' = m - 5 > 0 \Rightarrow m > 5.$ Vậy giá trị m cần tìm là: $m > 5.$	0,25
	b. (0,5 điểm) Tính diện tích lớn nhất của khu đất rào thu được.	
	Giả sử độ dài của một hàng rào vuông góc bờ sông là $x(m)$ và độ dài của hàng rào song song với bờ sông là $y(m)$ ($x, y > 0$). Khi đó, tổng số tiền để mua hàng rào là $3x \cdot 40000 + y \cdot 60000 = 6.1000000.$ $\Rightarrow y = 100 - 2x$	0,25
	Diện tích khu đất là $S = x \cdot y = x(100 - 2x) = -2(x - 25)^2 + 1250 \leq 1250.$ Vậy diện tích khu đất lớn nhất là $1250(m^2)$ khi $x = 25(m)$ và $y = 50(m).$	0,25

Chú ý: Các cách giải khác đáp án và đúng đều cho điểm tối đa.