

Electricité - Optique - Mécanique

(Options T et TA) Durée 4 heures

INDICATIONS GENERALES

L'épreuve comporte trois problèmes indépendants qui devront être traités sur des copies séparées.

Barème indicatif sur 20 points

- Electricité 10 points
- Optique 5 points
- Mécanique 5 points

Les divers graphes demandés seront représentés sur les feuilles de copie ; l'usage du papier millimétré est exclu.

Les candidats respecteront scrupuleusement les notations des énoncés.

ELECTRICITE

Le problème suivant traite des propriétés d'un semi-conducteur, le silicium, et de la modélisation d'une jonction PN réalisée à partir de silicium ; il ne nécessite aucune autre connaissance sur les semi-conducteurs que celles qui sont indiquées dans l'énoncé. La résolution littérale des trois parties peut être menée de manière indépendante, par contre les applications numériques font appel à des données réparties dans tout l'énoncé.

Première Partie : Mise en évidence de quelques ordres de grandeur.

Pour réaliser du silicium de "type N", on a incorporé à du silicium pur, du phosphore, à raison de $N_D = 1,5 \cdot 10^{21}$ atomes de phosphore par m^3 de silicium ; pour réaliser du silicium de "type P", on a incorporé à du silicium pur, du bore, à raison de $N_A = 3 \cdot 10^{23}$ atomes de bore par m^3 de silicium ; on suppose que les atomes de phosphore ou de bore sont régulièrement répartis dans le cristal de silicium.

DETERMINER

- 1.1 - Pour le silicium pur le nombre d'atomes par m^3
- 1.2 - Pour un volume donné de silicium de type N le rapport du nombre d'atomes de silicium au nombre d'atomes de phosphore
- 1.3 - La masse de phosphore à incorporer à 1 kg de silicium pour obtenir la concentration N_D indiquée pour le silicium de type N.

On donne :

- Les masses atomiques du silicium et du phosphore :

$$Si = 28 \text{ g.mol}^{-1}, P = 31 \text{ g.mol}^{-1}$$

- La masse volumique du silicium 2330 kg.m^{-3}
- Le nombre d'Avogadro $6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$

Deuxième Partie : Calculs de conductivités.

On considère un milieu conducteur homogène dans lequel coexistent 2 types de porteurs de charge régulièrement répartis :

- Des porteurs de charge positive $+q$ à raison de p porteurs par m^3
- Des porteurs de charge négative $-q$ à raison de n porteurs par m^3 .

Dans ces conditions, $\vec{v}$ étant la vitesse moyenne d'un porteur de charge soumis à un champ électrique $\vec{E}$, on définit la mobilité μ_p des porteurs positifs par $\vec{v} = \mu_p \cdot \vec{E}$ et la mobilité μ_n des porteurs négatifs par $\vec{v} = -\mu_n \cdot \vec{E}$.

2.1- Exprimer la densité de courant j en un point quelconque de ce milieu homogène soumis à un champ électrique uniforme d'intensité E ; en déduire l'expression de la conductivité σ de ce milieu en fonction de q , n , p et des mobilités.

2.2 - Calculer numériquement.

2.2.1 - La conductivité σ_n et la résistivité ρ_n du silicium de type N en considérant que le phénomène de conduction y est dû uniquement à la présence de $n = N_D$ électrons par m^3 , ces électrons ayant une charge $-q = -1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ et une mobilité $\mu_n = 0,15 \text{ m}^3 \cdot \text{V}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$.

2.2.2 - La conductivité σ_p et la résistivité ρ_p du silicium de type P en considérant que le phénomène de conduction y est dû uniquement à la présence de $p = N_A$ porteurs positifs par m^3 , ces porteurs ayant une charge $+q = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ et une mobilité $\mu_p = 0,05 \text{ m}^3 \cdot \text{V}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$.

2.2.3 - La conductivité σ_i et la résistivité ρ_i du silicium à l'état pur en considérant que le phénomène de conduction y est dû à la fois à la présence de $n = n_i$ électrons par m^3 et de $p = n_i$ porteurs positifs par m^3 , tous ces porteurs ayant les caractéristiques précédemment indiquées. On donne $n_i = 1,5 \cdot 10^{-3} \text{ m}^{-3}$.

Troisième Partie : Modélisation d'une jonction PN.

On suppose associés dans un barreau de section constante S (figure E1) du silicium de type N ($x > 0$) et du silicium de type P ($x < 0$) obtenus à partir d'un réseau cristallin homogène et continu.

On adopte les hypothèses suivantes :

- L'ensemble est au repos c'est-à-dire qu'aucune différence de potentiel extérieure ne lui est appliquée.
- L'ensemble est à la température ambiante et dans ces conditions tous les atomes de phosphore du silicium de type N ont libéré un électron et sont devenus des ions P^+ , tous les atomes de bore du silicium de type P ont capté un électron et sont devenus des ions B^- .
- A **l'intérieur** d'une "zone de transition" (fig. E1) limitée par les abscisses $-x_p$ et $+x_n$, il ne subsiste que des ions liés au réseau cristallin, tous les porteurs mobiles ayant quasiment disparu.
- A **l'extérieur** de cette zone de transition, il y a à la fois des ions fixes et des porteurs mobiles régulièrement répartis de manière que la densité volumique totale de charge y soit nulle.

- A l'intérieur du barreau, les relations sont obtenues à partir de celles qui s'appliquent dans le vide, en substituant à la permittivité du vide ϵ_0 , la permittivité $\epsilon = \epsilon_0 \cdot \epsilon_r$ avec $\epsilon_r = 12$ et $\epsilon_0 = 8,84 \cdot 10^{-12}$ u S.I.
- 3.1 - Justifier la valeur constante du potentiel dans les zones Si N et Si P (fig. E1) à **l'extérieur** de la zone de transition ; on appellera V_N le potentiel de la zone N et V_P celui de la zone P.
- 3.2 - Préciser les valeurs de la densité volumique de charge dans les différentes régions du barreau.
On pourra s'aider d'une représentation graphique.
- 3.3 - Etudier la répartition du potentiel V et du champ électrique E à **l'intérieur** de la zone de transition ; en utilisant les conditions aux limites, donner les expressions du champ électrique E et du potentiel V en fonction de l'abscisse x pour chacune des deux parties de la zone de transition.
- 3.4 - Représenter le champ E et le potentiel V en fonction de x pour l'ensemble du barreau ; justifier la continuité de E et de V pour $x = 0$.
- 3.5 - En exploitant cette continuité, établir une relation entre N_D , N_A , x_n et x_p ; donner une interprétation de cette relation en invoquant des charges électriques. Exprimer ensuite x_n et x_p en fonction de ϵ , q , N_D , N_A et $V_o = V_N - V_P$.
Exprimer aussi $d = x_n + x_p$ (on pourra calculer d'abord d^2).
- 3.6 - Simplifier les expressions précédentes de x_n , x_p et d dans l'hypothèse $N_A \gg N_D$ et calculer numériquement x_n et x_p en micromètre avec les valeurs déjà indiquées et $V_o = 0,7$ V. Commenter ces valeurs numériques.
- 3.7 - Lorsqu'on relie les zones N et P à une source de tension V_R très supérieure à V_o (fig. E2), on peut admettre que l'étude électrostatique précédente reste valable à condition de substituer V_R à V_o dans les résultats obtenus ; calculer les valeurs numériques de x_n correspondant à $V_R = 10$ V puis $V_R = 100$ V.
- 3.8 - La représentation du champ électrique E au 3.4 fait **apparaître** l'existence d'une valeur extrême E_M ; exprimer E_M en fonction de q , ϵ , V_R et N_D . Calculer sa valeur numérique pour $V_R = 100$ V.
- 3.9 - Dans le silicium, le champ électrique ne peut dépasser une valeur critique $E_{cr} = 3.10 \text{ V.m}^{-1}$; pour quelle valeur de la tension V_R , cette valeur critique est-elle atteinte ?

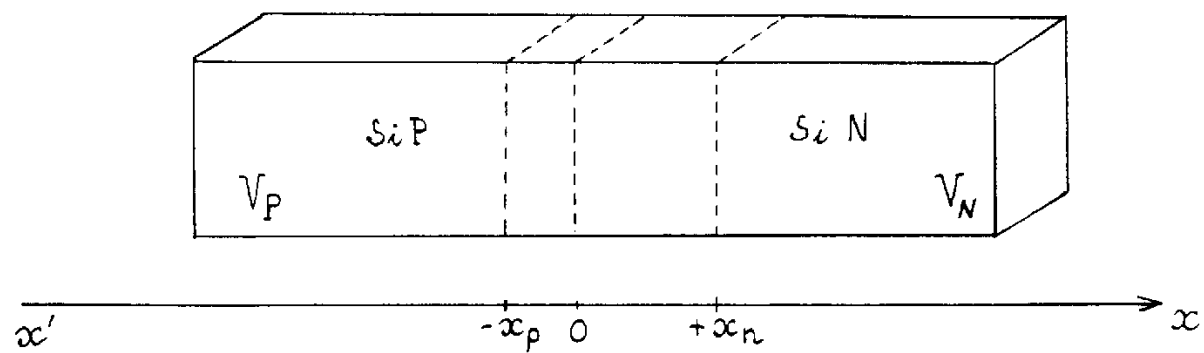


Figure E1

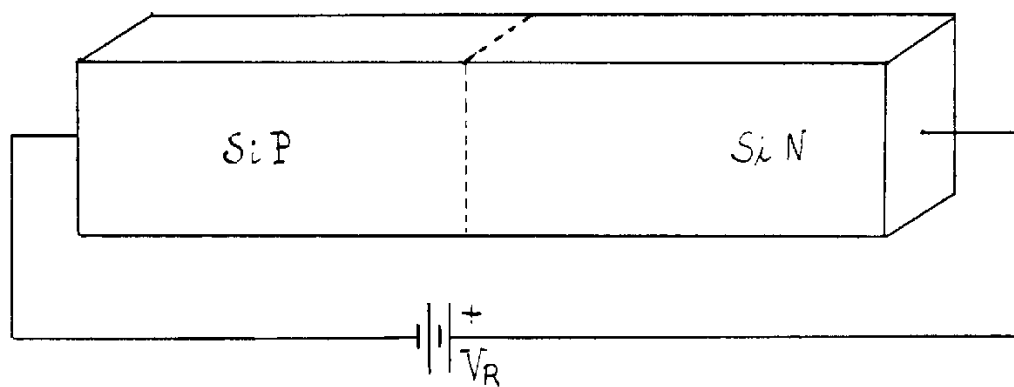


Figure E2

OPTIQUE

Remarque: La deuxième partie peut être traitée indépendamment de la première.

Première partie - Sur la figure 01, L_1 représente une lentille mince convergente, utilisée dans les conditions de Gauss, de foyers F_1 et F'_1 , de distance focale f_1 ($f_1 = |\overline{O_1F'_1}|$). AB est un disque lumineux de diamètre Φ , centré en H sur l'axe optique de la lentille; H est situé à une distance p du centre O_1 de la lentille

$$(p = |\overline{O_1H}|).$$

1.1 - Faire la construction géométrique de l'image A'B' de AB formée par la lentille.

1.2 - Soient H' le centre de A'B', Φ' le diamètre de l'image et p' la distance de O_1 à H'. Exprimer p' en fonction de p et f_1 ainsi que Φ' en fonction de Φ , p et f_1 .

Calculer p' et Φ' en utilisant les données suivantes $\Phi = 1$ cm; $f_1 = 2,4$ cm; $p = 10$ cm. Donner les résultats à 0,01 cm près.

1.3 - On place une deuxième lentille mince convergente L_2 , de centre O_2 , de foyers F_2 et F'_2 , à droite de la première comme indiqué sur la figure 02. Les deux lentilles sont séparées par une distance d supérieure à la somme des distances focales.

Faire la construction géométrique de l'image A''B'' de AB formée par le système des deux lentilles.

(Il n'est pas nécessaire de faire un dessin à l'échelle à partir des valeurs numériques données ci-après).

1.4 - Soient Φ'' le diamètre de l'image A''B'', H'' son centre et p'' la distance de O_2 à H''. Exprimer p'' en fonction de f_1 , f_2 , p et d. Exprimer Φ'' en fonction de Φ , p', p'' et d. Calculer p'' et Φ'' pour $f_2 = 7,2$ cm, $d = 12$ cm et les valeurs de Φ , p et f_1 données en 1.2.

1.5 - Les deux lentilles L_1 et L_2 constituent un système optique caractérisé par un 'foyer objet' F et un 'foyer image' F'. Exprimer la distance s entre O_2 et F' en fonction de f_1 , f_2 et d. Donner la valeur numérique de s.

1.6 - Comment faudrait-il modifier les positions des deux lentilles de la figure 02 pour que le foyer image du système soit rejeté à l'infini ?

1.7 - Calculer le grandissement du système ainsi obtenu pour un objet se trouvant à l'infini.

Deuxième partie - L'onde (que l'on suppose plane et monochromatique, de longueur d'onde $\lambda = 0,6 \mu\text{m}$) issue du système décrit dans la première partie, constitue le faisceau d'entrée d'un interféromètre de Michelson (Fig. 03). La lame séparatrice LS réfléchit 50% et transmet 50% de la lumière incidente et n'a pas d'autres effets sur l'onde réfléchie ou transmise.

2.1 - Un photodétecteur ponctuel est placé dans le bras N°4 de l'interféromètre. On suppose que les bras 2 et 3 ont la même longueur initiale. Soit $x = 0$ la position initiale du miroir M_2 . On déplace M_2 jusqu'à la position $x = 1,2 \mu\text{m}$.

Représenter graphiquement le signal donné par le détecteur en fonction de la position x du miroir M_2 .

2.2 - A la place du détecteur représenté sur Fig. 03, on introduit un écran opaque incliné par rapport à la direction de propagation de la lumière. Décrire la distribution de l'intensité lumineuse observée sur l'écran. Est-ce que cette distribution dépend de l'orientation de l'écran ?

2.3 - On introduit maintenant dans l'interféromètre l'onde émise par une source S en forme de fente mince, perpendiculaire au plan du dessin (Fig. 04). S émet une lumière monochromatique à $\lambda = 0,6 \mu\text{m}$; son centre est situé dans le plan de symétrie de l'interféromètre, à une distance $2L$ du centre C de la lame séparatrice LS. La lame LS est orientée à 45° par rapport à la direction SC. Les miroirs M_1 et M_2 , de centres A et B, placés respectivement à une distance L de la séparatrice sont perpendiculaires entre eux et sont inclinés dans le même sens par rapport aux axes respectifs d'un angle α petit (voir figure 04).

L'écran utilisé pour l'observation des franges d'interférence est situé à une distance $2L$ de la séparatrice. Faire la construction graphique des sources S_1 et S_2 dont semblent provenir les deux ondes qui se superposent dans le bras contenant l'écran. Soit O le milieu du segment S_1S_2 . (La construction sera facilitée si vous utilisez dans cette construction l'image du miroir M_2 par la séparatrice).

2.4 - Exprimer la distance S_1S_2 en fonction de L et α .

Calculer cette distance pour $L = 1 \text{ m}$ et $\alpha = 5.10^{-3} \text{ rad}$.

2.5 - Exprimer la distance de O à l'écran en fonction de L et α .

Calculer cette distance.

2.6 - Décrire les franges observées sur l'écran. Exprimer l'interfrange i et donner sa valeur numérique.

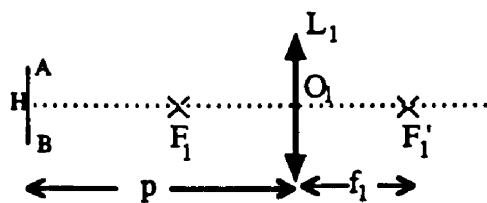


Figure 01

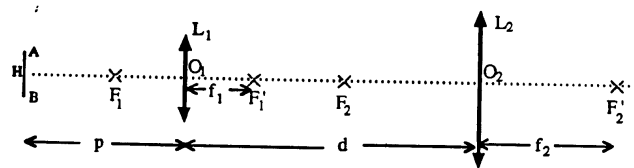


Figure 02

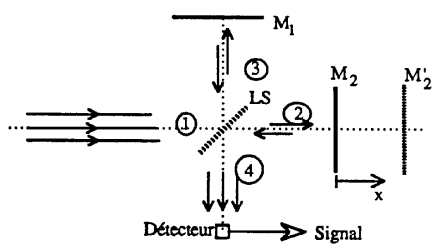


Figure 03

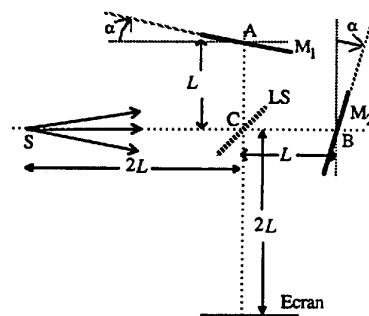


Figure 04

MECANIQUE

On étudie divers régimes de fonctionnement d'un dispositif mobile en rotation autour d'un axe horizontal $x'x$.

Première Partie · Equation générale du fonctionnement.

Le moteur d'entraînement (M) fournit un couple de moment $C_M(t)$ par rapport à l'axe $x'x$ (figure M1).

L'ensemble des éléments en rotation, de moment d'inertie total J par rapport à $x'x$, oppose un couple de frottement visqueux de moment proportionnel à la vitesse de rotation. Soit F en $N.m.s.(rad)^{-1}$ la valeur du coefficient de proportionnalité correspondant (résistance mécanique).

Le récepteur mécanique (R) oppose en outre un couple résistant dont le moment C_o par rapport à $x'x$ est constant.

On appelle $\theta(t)$ l'angle de rotation définissant à chaque instant la position d'un point M appartenant au rotor du moteur et $\Omega(t)$ la vitesse angulaire correspondante (figures M1 et M2).

1.1 - Montrer que la loi de variation $\Omega(t)$ s'obtient à partir d'une équation différentielle de la forme :

$$(1) \quad T_1 \frac{d\Omega}{dt} + \Omega = \Omega_1$$

Exprimer T et Ω_1 à partir des données littérales : J , F , C_M et C_o .

1.2 - Le dispositif étant initialement à l'arrêt, on suppose que le moteur applique brutalement à $t = 0$ un couple de moment $C_M = 0.50 \text{ Nm}$ (figure M3).

Sachant que : $J = 4910 \text{ g.cm}^2$, $F = 143.10^{-6} \text{ N.m.s.(rad)}^{-1}$, $C_o = 0,48 \text{ Nm}$:

a) Déterminer et représenter graphiquement la loi de variation $\Omega(t)$.

b) Préciser la valeur de $\Omega(t)$ à l'instant $t' = 3 T_1$.

c) A partir de quel instant t'' peut-on considérer que la vitesse a atteint une valeur limite Ω_1 constante à moins de 1‰ près. Préciser la valeur Ω_1 .

Deuxième Partie : Entraînement par moteur électrique.

En réalité, le moteur d'entraînement (M) est du type "à courant continu". Il est commandé par une tension $u(t)$ et le principe de son fonctionnement impose :

$$C_M(t) = A.u(t) - B.\Omega(t)$$

$B\Omega(t)$ représente un terme lié à la force contre-électromotrice du moteur.

On se contentera d'appliquer la relation donnée sans avoir à l'interpréter.

2.1 - Etablir l'équation différentielle (2) permettant de déterminer $\Omega(t)$ à partir de la tension $u(t)$.

On l'écrira sous la forme :

$$(2) \quad T_2 \frac{d\Omega}{dt} + \Omega = \Omega_2$$

2.2 - Le catalogue du constructeur donne pour le moteur : $A = 0,111 \text{ N.m.V}^{-1}$; $B = 0,0186 \text{ N.m.s.(rad)}^{-1}$.

Le moment d'inertie total est : $J = 4910 \text{ g.cm}^2$ et la résistance mécanique : $F = 143.10^{-6} \text{ N.m.s.(rad)}^{-1}$.

Le couple résistant permanent reste $C_o = 0,48 \text{ Nm}$.

Le système étant initialement immobile, on applique à $t = 0$ une tension $u = 50 \text{ V}$ (figure M4).

a) Déterminer et représenter graphiquement la loi $\Omega(t)$.

b) Préciser l'accélération angulaire à $t = 0$ et la vitesse limite Ω_l que prend l'ensemble.

Troisième Partie : Entraînement par motoréducteur (figure M5).

Le moteur entraîne, par l'intermédiaire d'un réducteur de vitesse, un récepteur mécanique de moment d'inertie J_C par rapport à son axe $\omega'\omega$. Ce récepteur présente un frottement négligeable et oppose un couple résistant de moment C_R par rapport à $\omega'\omega$. On appelle $\Omega_C(t)$ la vitesse angulaire du récepteur mécanique.

Le réducteur, supposé sans inertie propre et de rendement égal à 1, est défini par la relation :

$$\frac{\Omega_C}{\Omega} = \frac{1}{N}$$

Soit J_M le moment d'inertie propre du moteur.

3.1 - Montrer que l'équation différentielle (2) établie à la question 2.1 est applicable à condition de prendre pour J et C_o des valeurs que l'on déterminera par des considérations énergétiques simples en fonction de J_M , J_C , N , C_R .

3.2 - a) Sachant que : $J_M = 2350 \text{ g.cm}^2$; $J_C = 4 \text{ kg.m}^2$, déterminer N pour que J ait la valeur 4910 g.cm^2 .

b) Calculer C_R pour que $C_o = 0,48 \text{ N.m}$.

3.3 - A $t = 0$, on applique au moteur supposé immobile une tension "en rampe" : $u(t) = 25 t$ (u exprimée en volts et t en secondes) - (figure M6).

Déterminer la loi $\Omega_c(t)$.

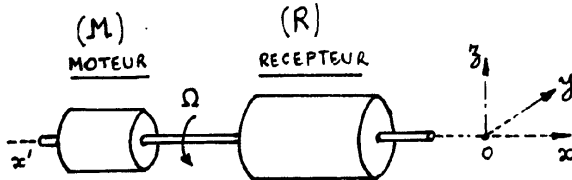


Figure M1

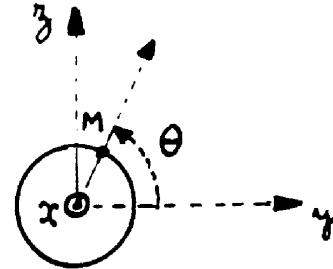


Figure M2

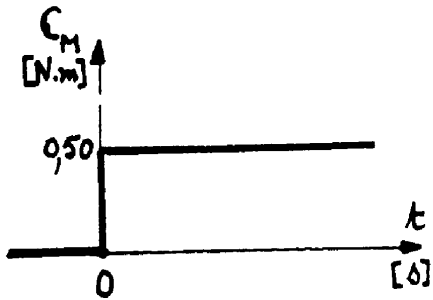


Figure M3

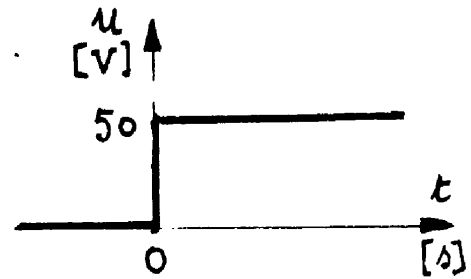


Figure M4

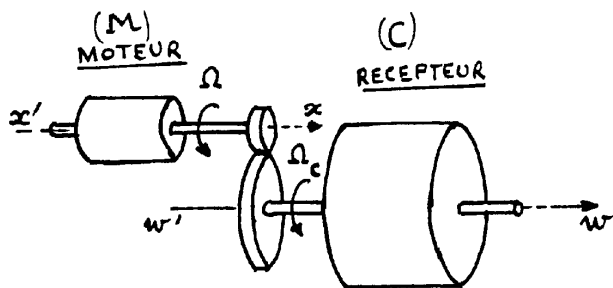


Figure M5

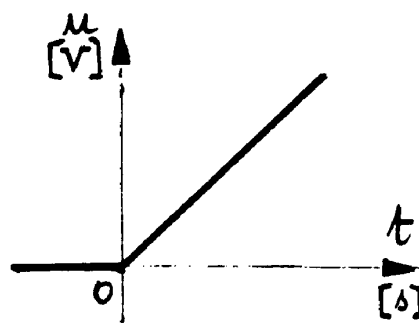


Figure M6