

ÉTUDE DE LA STABILISATION D'UN SATELLITE PAR GRADIENT DE GRAVITÉ

La terre est supposée constituée de couches concentriques homogènes de centre O. Elle exerce

sur un point matériel M de masse m une force attractive : $\vec{F} = -\mu m \vec{OM} / OM^3$ avec $\mu = 4.10^{14} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-2}$.

Soit :

$R(O, \overset{\text{w}}{x}, \overset{\text{w}}{y}, \overset{\text{w}}{z})$ le repère barycentrique de la terre, considéré ici comme repère absolu

Galiléen

$R_1(G, \overset{\text{w}}{u}, \overset{\text{w}}{v}, \overset{\text{w}}{w})$ le repère associé aux coordonnées polaires d'un point G du plan xOy : $\overset{\text{w}}{u}$ est radial, $\overset{\text{w}}{v}$ est orthoradial.

$R_2(G, \overset{\text{w}}{X}, \overset{\text{w}}{Y}, \overset{\text{w}}{Z})$ le repère principal d'inertie d'un satellite.

$R_3(G, \overset{\text{w}}{x}, \overset{\text{w}}{y}, \overset{\text{w}}{z})$ le repère barycentrique d'un satellite.

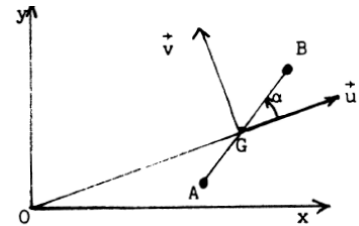
On envisage dans ce problème différents satellites dont le centre d'inertie G décrit une trajectoire circulaire de rayon r dans le plan xOy, à la vitesse angulaire ω , et on s'intéresse au mouvement autour du centre d'inertie.

Les 3 parties du problème sont indépendantes, à l'exception des questions II-3)c) et III-1)b).

I - SATELLITE EN FORME D'HALTÈRE

On considère un satellite constitué de deux masses ponctuelles A et B de même masse m , reliées par une tige rigide AB de masse négligeable ($AB = 2L$).

On s'intéresse à la rotation de AB autour de Gz, repérée par l'angle $\alpha = (\overset{\text{w}}{u}, \overrightarrow{AB})$



1) Pour quelles valeurs de α le moment en G des forces de gravitation que la terre exerce sur l'haltère est-il nul ?

2) En effectuant un développement limité en L/r , montrer que le terme principal de ce moment

est
$$\vec{M}_G = -\frac{3\mu m}{L} \left(\frac{L}{r} \right)^3 \sin(2\alpha) \vec{z}$$

3) Calculer la période des petites oscillations autour de la position d'équilibre stable.

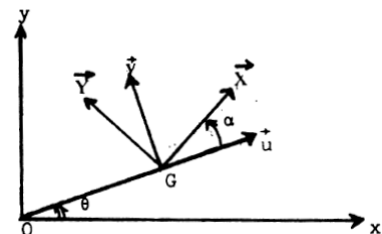
Application numérique : $r = 7000 \text{ km}$; $L = 5 \text{ m}$; $m = 4 \text{ kg}$.

II - SATELLITE PLAN

On considère un satellite en forme de plaque (P), de masse m . Dans toute cette partie, le plan GXY du satellite restera confondu avec le plan xOy.

La matrice représentant l'opérateur d'inertie en G du satellite sur la base $\overset{\text{w}}{X}, \overset{\text{w}}{Y}, \overset{\text{w}}{Z}$ de R_2 a pour expression :

$$(J) = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & A+B \end{pmatrix}$$



La position du satellite est repérée par $r = OG$ $\theta = (\overset{\text{w}}{x}, \overset{\text{w}}{u})$ et $\alpha = (\overset{\text{w}}{u}, \overset{\text{w}}{X})$

1)a) On appelle $\vec{F}$ et $\vec{M}_G$ les éléments de réduction en G du torseur des forces de gravitation appliquées au satellite :

$$[T] \begin{cases} \vec{F} = F_r \vec{u} + F_\theta \vec{v} \\ \vec{M}_G = M \vec{e} \end{cases}$$

Exprimer le travail élémentaire dW des forces de gravitation en fonction de dr , $d\theta$, et $d\alpha$.

b) Soit $U(r, \alpha)$ l'énergie potentielle du satellite dans le champ de gravitation terrestre. Exprimer F_r , F_θ et M en fonction des dérivées partielles de U .

c) Calculer le moment en O des forces de gravitation appliquées au satellite. Commenter le résultat.

2)a) Calculer le moment cinétique barycentrique $\vec{\sigma}_G$ du satellite et son énergie cinétique barycentrique E_c dans R (repère barycentrique de la terre).

b) Donner deux intégrales premières du mouvement en précisant leur signification physique.

3) L'expression de U est : $U = \iint_P -\mu \frac{dm}{OM}$

On pose $\rho = GM$ et $\phi = (\vec{u}, \vec{GM})$

a) Calculer $\iint_P \rho^2 dm$ et $\iint_P \rho \cos \phi dm$.

Montrer que $\iint_P \rho^2 \cos^2 \phi dm = \frac{A+B}{2} + \frac{B-A}{2} \cos 2\alpha$

b) En effectuant un développement limité en ρ/r , montrer que l'expression de U au quatrième ordre près est :

$$U = -\frac{\mu m}{r} - \frac{\mu}{4r^3} [(A+B) + 3(B-A) \cos 2\alpha]$$

c) En déduire M et F_θ . Retrouver l'expression du I-2)

d) Application : (P) est une plaque circulaire homogène de masse m , de rayon R , portant deux surcharges ponctuelles symétriques par rapport à G, distantes de $2R$ et situées sur $G\vec{X}$

$$r = 42000 \text{ km} \quad m = 200 \text{ kg} \quad m' = 3 \text{ kg} \quad R = 4 \text{ m}$$

Calculer les valeurs maximales de $|F_\theta|$ et $|M|$, ainsi que le terme principal de F_r . Commenter les résultats numériques.

4) On fait maintenant les approximations : $F_r \approx -\frac{\mu m}{r^2}$ et $F_\theta \approx 0$. La valeur de M est celle trouvée au 3)c)

a) Calculer ω , r et la vitesse de G pour un satellite géostationnaire (période $T = 23 \text{ h } 56 \text{ mn } 04 \text{ s}$).

b) Ecrire le théorème du moment cinétique dans R_3

c) Donner l'équation différentielle en α dans le cas des petits angles. Montrer que le mouvement n'est stable que si $B > A$

Application numérique : calculer la période des petites oscillations pour $\frac{B-A}{B+A} = \frac{1}{4}$

d) Lorsque l'angle α n'est pas petit, trouver une équation différentielle du type : $\alpha'' = f(\alpha)$

Pour $B > A$ et une position α_0 donnée ($0 < \alpha_0 < \pi/4$) déterminer la condition sur α_0 ($\alpha_0 > 0$) pour que le mouvement ne soit pas révolutif.

Application numérique : $\alpha_0 = 40^\circ$

III - SATELLITE DE FORME QUELCONQUE

On note : α, β, γ les composantes dans R_2 du vecteur unitaire $\vec{u}$ de $\overrightarrow{OG}$. La matrice représentant l'opérateur d'inertie en G du satellite dans R_2 est

$$(J) = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}$$

Dans toute cette partie, on utilisera comme repère de projection le repère R_2

1)a) Montrer que les composantes du moment en G des forces de gravitation ont pour équivalents

$$M_{GX} = 3\omega^2 \beta \gamma (C - B)$$

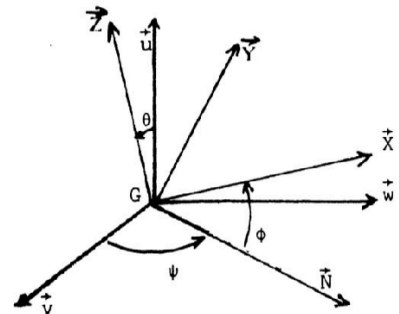
$$M_{GY} = 3\omega^2 \gamma \alpha (A - C)$$

$$M_{GZ} = 3\omega^2 \alpha \beta (B - A)$$

b) Retrouver le résultat du I-2)

2) La figure ci-contre indique la signification géométrique des angles d'Euler (ψ, θ, ϕ) repérant l'orientation de R_2 par rapport à R_1 .

$\vec{N}$ est le vecteur unitaire porté par $\vec{u} \wedge \vec{Z}$ ($\vec{u}$ et $\vec{Z}$ sont supposés non colinéaires).



On rappelle que le vecteur rotation de R_1 par rapport à R est $\omega \vec{w}$.

a) Exprimer en fonction de $\omega, \psi, \theta, \phi$ et des dérivées $\dot{\psi}, \dot{\theta}, \dot{\phi}$ les composantes sur la base $\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z}$ de R_2 du vecteur rotation $\vec{\Omega}$ de R_2 par rapport à R .

b) On pose $\theta = \pi/2 + \varepsilon$. En considérant ψ, ε, ϕ et leurs dérivées comme des infiniment petits, montrer que les composantes "linéarisées" de $\vec{\Omega}$ s'écrivent

$$\Omega_X = \dot{\psi} + \omega \psi \quad ; \quad \Omega_Y = \dot{\phi} - \omega \varepsilon \quad ; \quad \Omega_Z = \dot{\phi} - \omega$$

c) Calculer les composantes "linéarisées" du moment cinétique $\vec{\sigma}_G$ et du moment dynamique δ_G barycentriques.

3)a) Former le système d'équations différentielles linéaires en ψ, ε et ϕ .

b) Quelle relation doivent vérifier A, B et C pour que le couplage entre ε et ψ disparaisse ? Interpréter géométriquement ce résultat.

c) En supposant pour simplifier que la condition précédente est vérifiée, quelles inégalités doivent vérifier A, B et C pour que le mouvement autour de la position $\psi = 0, \theta = \pi/2, \phi = 0$ soit stable ?

d) Application numérique : $A = 300 \text{ m}^2 \cdot \text{kg}$; $B = 60 \text{ m}^2 \cdot \text{kg}$; $C = 360 \text{ m}^2 \cdot \text{kg}$; $r = 7000 \text{ km}$.

e) Calculer la période orbitale et les trois périodes d'oscillations en ψ, ε et ϕ . Comment peut-on envisager l'amortissement des oscillations précédentes ?

4) On suppose maintenant que $A = B$. On étudie les solutions de la forme, en notation complexe : $\varepsilon = \varepsilon_0 e^{i\Omega_0 t}$ et $\psi = \psi_0 e^{i\Omega_0 t}$ où Ω_0 est la pulsation des oscillations considérées.

a) Ecrire l'équation satisfaite par la pulsation Ω_0 .

b) Trouver la condition sur le rapport $x = A/C$ pour que le type de solution considérée existe.
Que se passe-t-il si cette condition n'est pas satisfaite ?

Pour garder la fonte english incorporée dans le fichier, ne pas supprimer cette ligne : M