

Теорія до самостійної роботи

Логарифми, логарифмічні рівняння

Як правило, при зведенні числа a в певну степінь x отримаємо нове число $b = a^x$. Якщо відомі значення самої степені числа і основи, то знайти показник степені можна через нову дію – знаходження логарифма числа: $x = \log_a b$. Значення параметра a називають основою логарифма, а значення b – вираз, або значення під логарифмом. Тож логарифм числа з заданою основою – це такий показник степені, в яку треба звести основу щоб отримати число від логарифмом: $x = \log_a b \sim b = a^x$. Треба зазначити, що основою логарифма і значенням під логарифмом може бути тільки додатні значення: $a > 0$; $b > 0$. Наприклад, $\log_2 8 = 3$; $\log_3 9 = 2$; $\log_2 \frac{1}{16} = \log_2 (2^4)^{-1} = \log_2 2^{-4} = -4$.

Часто використовуються логарифми з основою 10, для них використовується особлива форма запису: $\log_{10} b = \lg b$. Наприклад, $\lg 100 = 2$; $\lg 0,0001 = -4$.

Також особлива форма запису існує для натуральних логарифмів: $\log_e z = \ln z$. Число $e \approx 2,73$, його називають експонентою.

Властивості логарифмів:

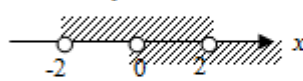
1. $\log_a a = 1$; $\log_a 1 = 0$; $\log_a a^k = k$; $a^{\log_a p} = p$.
2. $\log_a x \cdot y = \log_a x + \log_a y$; $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$;
3. $\log_a x^n = n \cdot \log_a x$; $\log_{a^m} x = \frac{1}{m} \log_a x$; $\log_{a^m} x^n = \frac{n}{m} \log_a x$;
4. $\log_{a^{nk}} x^{nk} = \log_{a^n} x^n$;
5. $\log_a x = \frac{\log_c x}{\log_c a}$;
6. $\log_a x = \frac{1}{\log_x a}$;

Розглянемо приклади розрахунків з використанням властивостей логарифмів:

- 1) $\log_2 (2^x \cdot 32) = \log_2 2^x + \log_2 2^5 = x + 5$;
- 2) $k = \log_2 5$; $\lg 32 = ?$ $\lg 32 = \lg 2^5 = 5 \lg 2 = 5 \cdot \frac{1}{\log_2 10} = \frac{5}{\log_2 5 \cdot 2} = \frac{5}{\log_2 5 + \log_2 2} = \frac{5}{k+1}$.
- 3) $\log_a 11 = b$; $\log_a \sqrt[4]{11} = ?$; $\log_a \sqrt[4]{11} = \log_a 11^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{4} \cdot \log_a 11 = \frac{1}{4} \cdot b = \frac{b}{4}$.
- 4) $5^{\log_5 4 + 2 \log_5 3} = 5^{\log_5 16} \cdot 5^{\log_5 9} = 16 \cdot 9 = 153$.

Логарифмічні рівняння: $\log_a f(x) = \log_a g(x) \equiv \begin{cases} \text{ОДЗ: } \begin{cases} f(x) > 0; \\ g(x) > 0; \end{cases} \\ f(x) = g(x); x \in \text{ОДЗ} \end{cases}$

Наприклад:

- $\log_x 27\sqrt{3} = 3,5;$ ОДЗ: $x > 0;$
 $\log_x 27\sqrt{3} = \log_x x^{3,5}; \quad \log_x 3^{3,5} = \log_x x^{3,5}; \quad x = 3.$
- $\log_{1+x}(2x^3+2x^2-2x-2) = 3;$ ОДЗ: $2x^3+2x^2-2x-2 > 0;$
 $\log_{1+x}(2(x-1)(x+1)^2) = \log_{1+x}(1+x)^3;$ $2(x-1)(x+1)^2 > 0;$
 $2(x-1)(x+1)^2 = (1+x)^3;$ $x > 1; x \in (1; \infty).$
 $(x+1)^2(2x-2-1-x) = 0;$
 $x_1 = 3; \quad x_2 = -1$ — не належить ОДЗ. **Відповідь:** 3.
- $\log_3(4-x^2) - \log_3 x = 1;$ ОДЗ: $\begin{cases} 4-x^2 > 0; \\ x > 0; \end{cases}$
 $\log_3 \frac{4-x^2}{x} = \log_3 3;$ 
 $\frac{4-x^2}{x} = 3; \quad \frac{4-x^2}{x} - 3^{1/x} = 0; \quad x \in (0; 2).$
 $4-x^2-3x = 0; \quad x_1 = 1; \quad x_2 = -4$ — не належить ОДЗ; **Відповідь:** 1.

Системи показникових та логарифмічних рівнянь.

Наприклад: $\begin{cases} \log_y x + \log_x y = 2; \\ x^2 + y = 6y^{\log_y 2}. \end{cases} \quad \begin{cases} \log_y x + \frac{1}{\log_y x} = 2; \\ x^2 + y = 6 \cdot 2. \end{cases} \quad \text{ОДЗ: } x > 0; y > 0.$

Спростимо і рівняння: $t = \log_y x; \quad t + \frac{1}{t} = 2; \quad t^2 - 2t + 1 = 0; \quad t = 1.$

$\log_y x = 1; \quad y = x.$ То ж система прийме вигляд: $\begin{cases} y = x; \\ x^2 + x - 12 = 0. \end{cases}$

$x_1 = -4; \quad x_2 = 3.$ x_1 — не входить в ОДЗ. $y = x = 3.$ **Відповідь:** (3; 3).

Логарифмічні нерівності $\log_a f(x) \lessgtr \log_a g(x)$;

Нерівність тотожна системі нерівностей:

$$\text{Для } a > 1, \begin{cases} f(x) > 0; \\ g(x) > 0; \\ f(x) \lessgtr g(x). \end{cases}, \text{ або для } a < 1, \begin{cases} f(x) > 0; \\ g(x) > 0; \\ f(x) \gtrless g(x). \end{cases}$$

$$\text{Наприклад: } \log_{\frac{1}{3}} \frac{3x-1}{x+2} < 1; \quad \log_{\frac{1}{3}} \frac{3x-1}{x+2} < \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{3}; \quad \begin{cases} \frac{3x-1}{x+2} > 0; \\ \frac{3x-1}{x+2} > \frac{1}{3}; \end{cases}$$

$$\frac{3x-1}{x+2} > 0 \quad \begin{array}{c} -2 \qquad 1/3 \\ \hline \bullet \qquad \bullet \\ \hline \end{array} \xrightarrow{x}$$

$$\frac{3x-1}{x+2} - \frac{1}{3} > 0; \quad \frac{9x-3-x-2}{3(x+2)} > 0; \quad \frac{8x-5}{x+2} > 0; \quad \begin{array}{c} -2 \qquad 5/8 \\ \hline \bullet \qquad \bullet \\ \hline \end{array} \xrightarrow{x}$$

Знаходимо спільний розв'язок:

$$x \in (-\infty; -2) \cup \left(\frac{5}{8}; \infty\right). \quad \begin{array}{c} -2 \qquad 1/3 \qquad 5/8 \\ \hline \bullet \qquad \bullet \qquad \bullet \\ \hline \end{array} \xrightarrow{x}$$

Самостійна робота

Тема: Логарифмічні рівняння та нерівності

Мета: Закріпити набуті знання та навички, перевірити їх при виконанні практичних завдань.

Завдання:

1. Засвоїти теоретичний матеріал згідно теми;
2. Виконати письмово приведені завдання;
3. Зробіть висновки.

Варіант 1

Розв'язати рівняння і нерівності

1. $\lg(x-1) + \lg(x+1) = 3\lg 2 + \lg(x-2)$
2. $\log_1 \sqrt[3]{2x-1} - \log_1(x-2) = 0$
3. $3\lg^4(x-1) - 10\lg(x-1) + 3 = 0$
4. $\log_3 x + \log_9 x + \log_{27} x = 5,5$
5. $\log_3(4^x - 3) + \log_3(4^x - 1) = 1$
6. $\log_3(2x+3) > \log_3(x-1)$
7. $\log_1(3x-1) > -3$
8. $\log_3 \frac{8-12x}{x-6} > 2$
9. $\log_3(x-3) + \log_3(x-1) \leq 1$
10. $\log_{0,5} \log_2 \frac{x}{x+1} > 0$
11. $\log_5 \sqrt[3]{x} - 2\log_{25} x > 2$

Варіант 2

Розв'язати рівняння і нерівності

1. $\lg x + \lg(x+1) = \lg(5-7x) - \lg 2$
2. $\lg(x-2) - \lg \sqrt{3x-6} = \lg 2$
3. $3\lg x^4 - \lg^4(-x) = 9$
4. $\log_3 x + \log_{\sqrt[3]{3}} x + \log_{\frac{1}{3}} x = 6$
5. $\log_2(9-2^x) = 3-x$
6. $\log_{0,7}(x+4) > \log_{0,7}(19-4x)$
7. $\log_{0,5}(1+2x) \geq -1$
8. $\log_1 \frac{3x-1}{x+2} < 1$
9. $\log_4(x+3) + \log_4(x+15) \leq 3$
10. $\log_1 \log_3 \frac{x-2}{1-x} > -1$
11. $\log_7^2 x - \log_7 x^2 \leq 3$

Варіант 3

Розв'язати рівняння і нерівності

- $\lg(x+5) - \lg(3x+25) = \lg(x-15) - \lg 17$
- $\lg 5 - 1 = \lg(x-3) - \lg \sqrt[3]{3x+1}$
- $4\log_4^2(-x) + 2\log_4 x^2 + 1 = 0$
- $\log_2 x + \log_8 x + \log_{16} x = \frac{19}{6}$
- $\log_2(2^x - 3) + x = 2$
- $\log_{0.4}(5x+1) < \log_{0.4}(3-2x)$
- $\log_2(x^2 - 2x) \geq 3$
- $\log_{\frac{1}{3}} \frac{3x+1}{x+1} > -1$
- $\log_6(x-2) + \log_6(x-1) \leq 1$
- $\log_{\frac{1}{3}} \log_2 \frac{3x+6}{x+6} \leq 0$
- $\log_5^2 x + 0.5\log_5 x^2 \leq 6$

Варіант 4

Розв'язати рівняння і нерівності

- $\log_6(x+1) + \log_6(2x+1) = 1$
- $\log_3(x-5) - \log_3 2 = \log_3 \sqrt[3]{3x-20}$
- $\frac{1}{5-4\lg x} + \frac{4}{1+\lg x} = 3$
- $\log_x 2 - \log_4 x + \frac{7}{6} = 0$
- $\log_2(9^{x-1} + 7) = 2 + \log_2(3^{x-1} + 1)$
- $\log_{0.3}(2-3x) > \log_{0.3}(5x-1)$
- $\log_{\frac{1}{5}}(1-2x) \geq -2$
- $\log_{1.5} \frac{2x-8}{x-2} < 0$
- $\log_3(2x-1) + \log_3(x-9) < 2$
- $\log_{\frac{1}{3}} \log_2 \frac{x-1}{2-x} > -1$
- $\lg^2 x - \lg x - 2 \geq 0$

Варіант 5

Розв'язати рівняння і нерівності

- $\log_4(x+3) - \log_4(x-1) = 2 - \log_4 8$
- $\frac{1}{2}\lg(2x-1) + \lg \sqrt[3]{x-9} = 1$
- Знайти цілі корені рівняння $\frac{2}{7-\lg x} + \frac{9}{11+\lg x} = \frac{13}{12}$
- $\log_5^2(9x) - 5\log_3 x = 16$
- $\log_2(4^x + 1) = x + \log_2(2^{x+3} - 6)$
- $2\log_{0.4}(-x) > \log_{0.4}(10-9x)$
- $\log_2(x^2 - 3x + 2) < 1$
- $\log_2 \frac{x}{x-1} \leq -1$
- $\log_{0.5}(x-1) + \log_{0.5} x \geq -1$
- $\log_{0.1} \log_3 \frac{x^2+5}{x+1} < 0$
- $\log_{0.5}^2(3x+1) > \log_{0.5}(3x+1) + 6$

Варіант 6

Розв'язати рівняння і нерівності

1. $2\log_7(x-2) = \log_7(x-10)^2 - 2$ 2. $\frac{1}{2}\lg x + 3\lg\sqrt[3]{x+2} = \lg\sqrt[3]{x(x+2)} + 2$

3. Знайти цілі корені рівняння $\frac{\lg(6-x)}{2} = \frac{1}{3\lg(6-x)-1}$

4. $\log_{\frac{1}{2}}^2(4x) + \log_2 \frac{x^4}{8} = 8$

5. $x-1 + \log_4 3 = \log_4(5^x - 4^{x-1})$

6. $2\log_{\frac{1}{3}}(-x) < \log_{\frac{1}{3}}(7-6x)$

7. $\log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 5x + 6) > -1$

8. $\log_{\frac{1}{4}x+3} \frac{x-3}{4} \geq -\frac{1}{2}$

9. $\log_{0.2}(x-1) + \log_{0.2}(x+3) \geq -1$

10. $\log_{0.5}\log_8 \frac{x^2-2x}{x-3} \leq 0$

11. $\frac{1}{\log_3 x - 2} > \frac{1}{\log_3 x}$