Un altro esempio di discontinuità è dato da questa funzione: $y=\frac{x^2-1}{x+1}$.

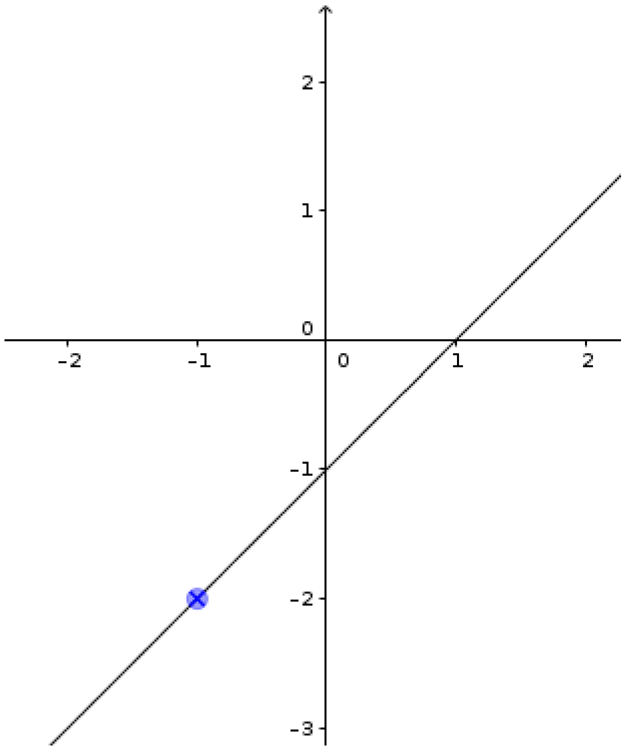
La funzione è definita solo quando il denominatore è diverso da zero, dunque per $x \neq -1$.

La funzione può scriversi anche, moltiplicando tutto per $(x+1)$:

$(x+1)y=(x-1)(x+1)$

$(x+1)y-(x-1)(x+1)=0$

$(x+1)(y-x+1)=0$



D'altra parte la frazione è semplificabile:

$$y=\frac{x^2-1}{x+1}=\frac{(x+1)(x-1)}{x+1}=x-1$$

dunque il grafico si riduce ad una retta; però la semplificazione non è valida per $x=-1$ dunque la funzione di partenza può così definirsi:

$$f(x)=\begin{cases} x-1 & se\, x\neq -1 \\ indefinita & se\, x=-1 \end{cases}$$

C'è quindi una discontinuità per $x=-1$, intuitivamente c'è un buco infinitamente piccolo e almeno in linea di principio per disegnare la retta dobbiamo staccare la matita dal foglio per un attimo in corrispondenza di $x=-1$.

Possiamo completare la funzione in modo da renderla continua?

Se la completiamo con un qualsiasi valore diverso da -2, per esempio

$$f(x)=\begin{cases} x-1 & se\, x\neq -1 \\ 3 & se\, x=-1 \end{cases}$$

la funzione resta discontinua, infatti $f(-1+dx)-f(-1) = -1 + dx -1 - 3 = -5 + dx$

mentre se completiamo la funzione con -2

$$f(x)=\begin{cases} x-1 & se\, x\neq -1 \\ -2 & se\, x=-1 \end{cases}$$

la funzione diventa continua sia a destra sia a sinistra:

$f(-1+dx)-f(-1) = -1 + dx -1 - (-2) = dx$

$f(-1-dx)-f(-1) = -1 - dx -1 - (-2)= -dx$

in entrambi i casi la differenza è infinitesima e dunque la funzione è continua sia a destra sia a sinistra.

Pertanto nella funzione $y=\frac{x^2-1}{x+1}$ in $x=-1$ è un punto di discontinuità è eliminabile.

Trascrivendo con i limiti $\lim_{x\to -1^+} f(x)=-2$ e $\lim_{x\to -1^-} f(x)=-2$ ma non si può dire che la funzione è continua in -1 perché $f(-1)$ non esiste.