

1ο σετ επαναληπτικών 3.1 – 3.4

Γεωμετρία Α΄ ΕΠΑΛ

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

1) Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ) αν είναι σωστές ή (Λ) αν είναι λανθασμένες.

α) Κάθε σημείο που ισαπέχει από τα άκρα ενός ευθύγραμμου τμήματος ανήκει στην μεσοκάθετο του τμήματος.

β) Σε κάθε τρίγωνο το ύψος είναι διάμεσος και διχοτόμος.

γ) Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και μία γωνία ίση, τότε είναι ίσα.

δ) Το μοναδικό σημείο που ισαπέχει από τα άκρα ενός ευθύγραμμου τμήματος είναι το μέσο του.

ε) Ίσες χορδές ενός κύκλου έχουν ίσα αποστήματα και αντίστροφα.

στ) Αν δύο τρίγωνα έχουν από μία πλευρά ίση και δύο ίσες γωνίες μία προς μία, τότε αυτά είναι ίσα.

ζ) Αν ένα τρίγωνο έχει μία οξεία γωνία, τότε αυτό είναι οξυγώνιο.

η) Το κάθετο τμήμα από το κέντρο ενός κύκλου σε μία χορδή του, διχοτομεί την χορδή και το αντίστοιχο τόξο της.

θ) Αν δύο τρίγωνα έχουν τις γωνίες τους ίσες μία προς μία, τότε είναι ίσα.

ι) Αν δύο τρίγωνα έχουν τις πλευρές τους ίσες μία προς μία, τότε είναι ίσα.

ια) Σε δύο τρίγωνα απέναντι από ίσες πλευρές βρίσκονται ίσες γωνίες.

ιβ) Σε δύο ίσα τρίγωνα απέναντι από ίσες γωνίες βρίσκονται ίσες πλευρές.

ιγ) Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο γωνίες ίσες μια προς μία, τότε θα έχουν και την τρίτη τους γωνία ίση.

ιδ) Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία, τότε θα έχουν και την τρίτη τους πλευρά ίση.

ιε) Το ευθύγραμμο τμήμα που ξεκινά από μία κορυφή ενός τριγώνου και καταλήγει στο μέσο της απέναντι πλευράς της λέγεται διάμεσος.



ιζ) Το κάθετο ευθύγραμμο τμήμα που φέρεται (ξεκινά) από μία κορυφή ενός τριγώνου προς την ευθεία της απέναντι πλευράς ονομάζεται ύψος.

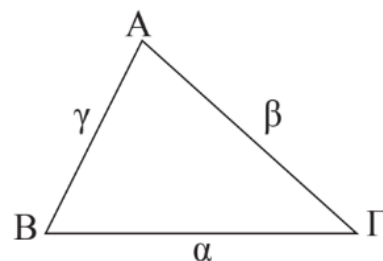
ιη) Το ευθύγραμμο τμήμα που φέρεται από μία κορυφή τριγώνου και καταλήγει στο μέσο της απέναντι πλευράς λέγεται διχοτόμος.

ιθ) Το ευθύγραμμο τμήμα που φέρεται από μία κορυφή τριγώνου, χωρίζει την γωνία της κορυφής αυτής σε δύο ίσα μέρη και καταλήγει στην ευθεία της απέναντι πλευράς της, ονομάζεται διχοτόμος.

2) Να συμπληρώσετε τα κενά με τις κατάλληλες λέξεις.

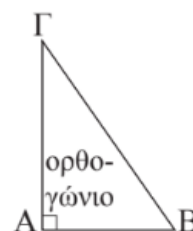
α) Σε κάθε τρίγωνο οι και του ονομάζονται **κύρια στοιχεία του**. Στο παρακάτω τρίγωνο ΑΒΓ, πλευρές είναι οι , , , (ή με πεζό μονόγραμμα, που βρίσκεται απέναντι από την κορυφή Α, , που βρίσκεται απέναντι από την κορυφή και , που βρίσκεται απέναντι από την κορυφή). Γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ είναι οι , και (ή αντίστοιχα με ονομασία τριών γραμμάτων είναι οι , και).

β) Η γωνία του τριγώνου που περιέχεται μεταξύ δύο πλευρών λέγεται γωνία των πλευρών αυτών, π.χ. στο διπλανό τρίγωνο ΑΒΓ, περιεχόμενη γωνία των πλευρών ΑΒ και ΒΓ είναι η γωνία



γ) Οι γωνίες του τριγώνου που έχουν τα άκρα μιας πλευράς λέγονται γωνίες της πλευράς αυτής, π.χ. στο παραπάνω τρίγωνο ΑΒΓ, προσκείμενες γωνίες της πλευράς ΒΓ είναι οι και

δ) Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο η πλευρά που βρίσκεται απέναντι από την ορθή γωνία ονομάζεται , ενώ οι άλλες δύο πλευρές ονομάζονται Για παράδειγμα, στο διπλανό ορθογώνιο τρίγωνο, ορθή γωνία είναι η , απέναντί της είναι η πλευρά (που λέγεται) και οι δύο

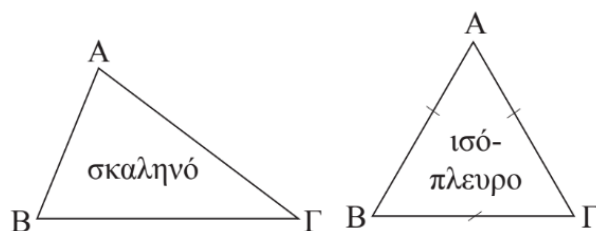


πλευρές (..... και) που συνθέτουν την ορθή γωνία (λόγω καθετότητας δημιουργείται η ορθή των 90°).

ε) Σε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $AB = AG$, η πλευρά ΒΓ ονομάζεται και το σημείο Α του.



στ) Το τρίγωνο που έχει όλες του τις πλευρές άνισες ονομάζεται, ενώ το τρίγωνο που έχει όλες του τις πλευρές ίσες ονομάζεται Το ισόπλευρο έχει επίσης όλες του τις γωνίες ίσες με $^\circ$.



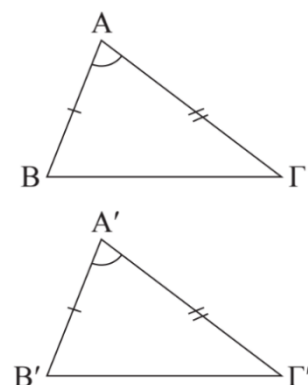
ζ) Εκτός από το ορθογώνιο, ανάλογα με τα είδη των γωνιών τους υπάρχουν και άλλα δύο τρίγωνα, το που έχει έστω μία από τις τρεις του γωνίες και το στο οποίο όλες του οι γωνίες είναι

η) Στα δευτερεύοντα στοιχεία ενός τριγώνου έχουμε τρία ευθύγραμμα τμήματα, το, τη και τη

θ) Οι ίσες πλευρές που βρίσκονται απέναντι από ίσες γωνίες καλούνται ή

ι) Γενικά, αν δύο τρίγωνα έχουν τις ίσες μία προς μία και τις ίσες μία προς μία τότε είναι **ίσα**. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα σε δύο ίσα τρίγωνα, « απέναντι από ίσες να βρίσκονται πάντα ίσες και το αντίστροφο ».

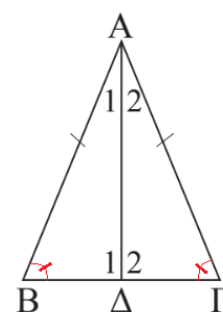
ια) «Αν δύο τρίγωνα έχουν πλευρές ίσες μία προς μία και την σε αυτές τις πλευρές γωνία ίση, τότε θα είναι ». Αυτό είναι το 1^ο κριτήριο ισότητας τριγώνων που εν συντομία καλείται



ιβ) Η άμεση συνέπεια της ισότητας δύο τριγώνων μέσω του κριτηρίου Π-Γ-Π είναι ότι «απέναντι από ίσες βρίσκονται πάντα ίσες » .

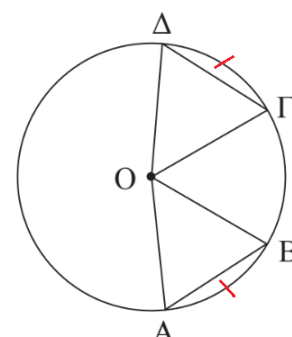
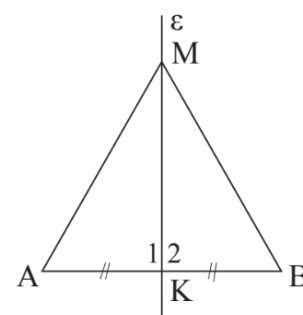
ιγ) Κάθε ισοσκελές τρίγωνο έχει δύο πολύ βασικές ιδιότητες.

- i) Οι στη βάση του γωνίες είναι ίσες και
- ii) η διχοτόμος, το ύψος και η διάμεσος που φέρονται (ξεκινάνε, άγονται) από την του ταυτίζονται.



Δηλαδή, με βάση το διπλανό ισοσκελές τρίγωνο ABΓ, οι γωνίες και είναι ίσες ως στη βάση του και το τμήμα είναι ταυτόχρονα, και

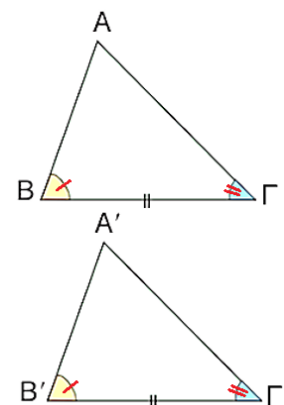
ιδ) « Κάθε σημείο της μεσοκαθέτου ενός ευθυγράμμου τμήματος από τα άκρα του ». Στο διπλανό σχήμα, η ευθεία είναι μεσοκάθετος του ευθυγράμμου τμήματος Με βάση το παραπάνω πόρισμα, το σημείο M που βρίσκεται στην μεσοκάθετο (ε) θα ισαπέχει από τα άκρα του ευθυγράμμου τμήματος AB, δηλαδή θα ισχύει : = Το ίδιο συμβαίνει και με οποιοδήποτε άλλο σημείο που ανήκει πάνω στην (ε), όπως για παράδειγμα το σημείο K, άρα ισχύει και =



ιε) « Αν δύο τόξα ενός κύκλου είναι ίσα, τότε και οι τους θα είναι ίσες ». Με βάση το διπλανό σχήμα, αν γνωρίζουμε ότι τα τόξα $\widehat{AB}$ και $\widehat{\Gamma\Delta}$ είναι ίσα, τότε θα είναι ίσες και οι αντίστοιχες, δηλαδή θα ισχύει =

ιστ) « Αν δύο τρίγωνα έχουν από πλευρά και τις προσκείμενες σε αυτή την πλευρά ίσες μία προς μία, τότε είναι ίσα ». Στο διπλανό σχήμα, τα δύο τρίγωνα έχουν από μία πλευρά ίση = και τις προσκείμενες στις ίσες πλευρές τους γωνίες ίσες, δηλαδή ... = ... και ... = ...

Ικανοποιείται με αυτόν τον τρόπο το 2^ο κριτήριο ισότητας τριγώνων ή κοινώς

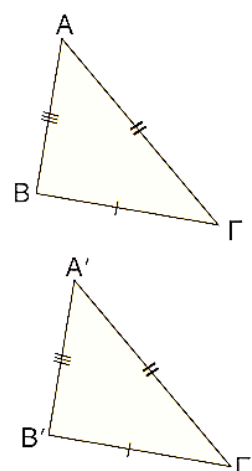


ιζ) Η άμεση συνέπεια της ισότητας δύο τριγώνων μέσω του κριτηρίου Γ-Π-Γ είναι ότι «απέναντι από ίσες βρίσκονται πάντα ίσες ».

ιη) « Αν δύο τρίγωνα έχουν τις τους ίσες μία προς μία, τότε είναι ίσα ». Με βάση το διπλανό σχήμα είναι :

..... = = =

Ικανοποιείται με αυτόν τον τρόπο το 3^ο κριτήριο ισότητας τριγώνων ή κοινώς



ιθ) Κάθε σημείο που από τα άκρα ενός ευθυγράμμου τμήματος είναι σημείο της του τμήματος αυτού.

κ) Η μεσοκάθετος ενός ευθυγράμμου τμήματος είναι ο (2 κενά) των σημείων του επιπέδου που ισαπέχουν από τα άκρα του τμήματος αυτού.

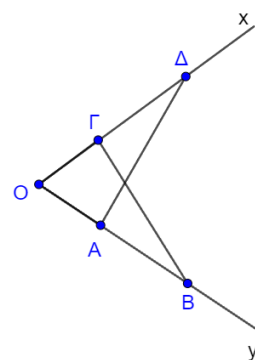
κα) «Αν οι χορδές δύο τόξων μικρότερων του ημικυκλίου (σε έναν κύκλο) είναι ίσες, τότε είναι ίσα και τα τους. Το ίδιο ισχύει και αν πρόκειται για χορδές του ημικυκλίου.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1*) Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$. Στην προέκταση της πλευράς ΓB παίρνουμε τμήμα BE τέτοιο ώστε $\Gamma B = BE$. Όμοια, στην προέκταση της πλευράς AB παίρνουμε τμήμα τέτοιο ώστε $AB = BD$. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και BED είναι ίσα.

2)** Έστω γωνία $\hat{xOy}$ και $O\delta$ η διχοτόμος της. Αν A και B τυχαία σημεία των Oy και Ox (των πλευρών της γωνίας) αντίστοιχα, τέτοια ώστε $OA = OB$ και Σ τυχαίο σημείο της διχοτόμου $O\delta$, να αποδείξετε ότι $\Sigma A = \Sigma B$.

3*) Στο διπλανό σχήμα είναι $OA = OG$ και $OB = OD$. Να αποδείξετε ότι $B\Gamma = AD$.



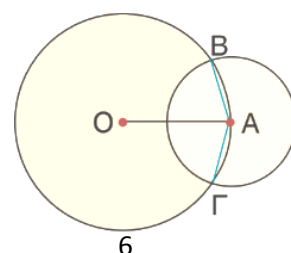
4)** Έστω ισοσκελές τρίγωνο με $AB = B\Gamma$. Στη βάση του παίρνουμε αντίστοιχα τα σημεία Δ , E τέτοια ώστε να ισχύει $BD = \Gamma E$. Να αποδείξετε ότι $AD = AE$.

5)** Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$. Στις πλευρές AB , $B\Gamma$ και ΓA παίρνουμε σημεία Δ , E , Z τέτοια ώστε να ισχύει $AD = BE = \Gamma Z$. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΔEZ είναι ισόπλευρο.

6*) Έστω ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με βάση $B\Gamma$. Προεκτείνουμε τις ίσες πλευρές AB και $A\Gamma$ κατά ίσα τμήματα BD και ΓE αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι $\Gamma\Delta = BE$.

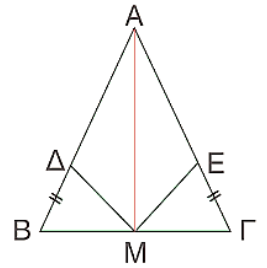
7*)** Σε ένα παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ να αποδείξετε ότι το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα μέσα K , N των πλευρών $\Delta\Gamma$ και ΓB είναι ίσο με το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα μέσα Λ , M των $A\Delta$ και AB .

8)** Αν O , A είναι τα κέντρα των κύκλων του διπλανού σχήματος, να αποδείξετε ότι η AO διχοτομεί τη γωνία BAG .



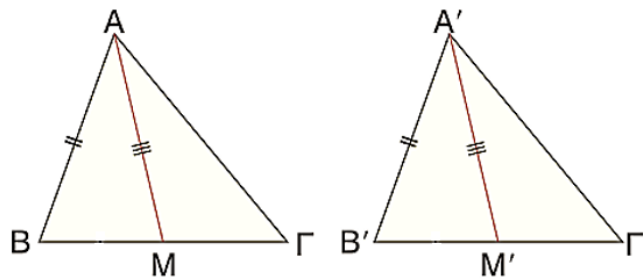
9***) Στο ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ το σημείο M είναι μέσο της βάσης $B\Gamma$. Αν είναι $B\Delta = \Gamma E$, να αποδείξετε ότι:

- το τρίγωνο $M\Delta E$ είναι ισοσκελές,
- τα τρίγωνα $A\Delta M$ και AEM είναι ίσα.



10**) Στα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ του παρακάτω σχήματος οι διάμεσοι AM και $A'M'$ είναι ίσες. Αν $AB = A'B'$ τότε να αποδείξετε ότι:

- $\hat{B} = \hat{B}'$
- τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ είναι ίσα.



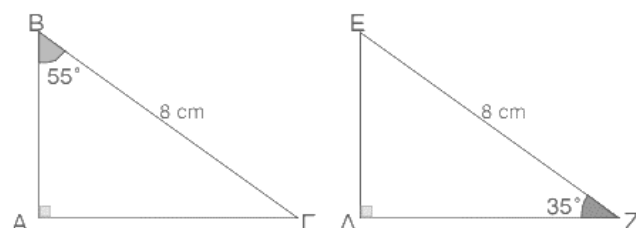
2ο σετ επαναληπτικών 3.5 – 3.6

Γεωμετρία Α' ΕΠΑΛ

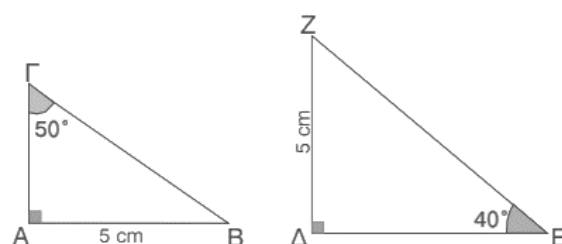
ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

1) Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ) αν είναι σωστές ή (Λ) αν είναι λανθασμένες.

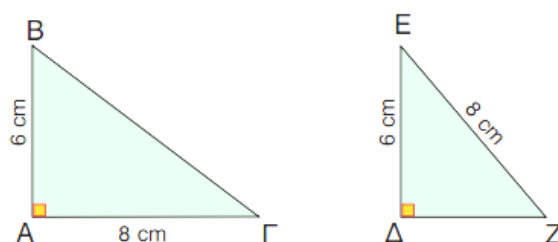
α) Τα τρίγωνα του διπλανού σχήματος είναι ίσα.



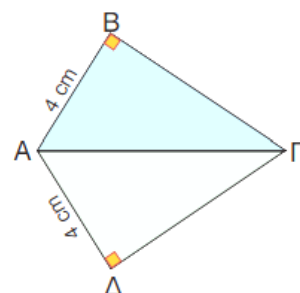
β) Τα τρίγωνα του διπλανού σχήματος είναι ίσα.



γ) Τα τρίγωνα του διπλανού σχήματος είναι ίσα.



δ) Τα τρίγωνα του διπλανού σχήματος είναι ίσα.



ε) Αν σε δύο τρίγωνα μία οξεία γωνία του ενός είναι ίση με μία οξεία γωνία του άλλου, τότε τα ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα.

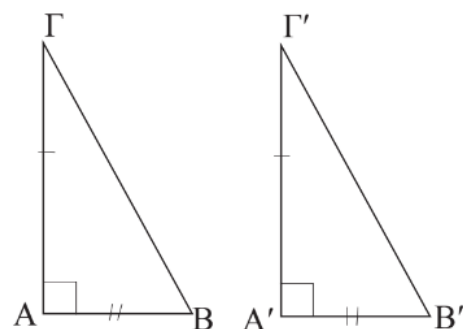
στ) Αν δύο ορθογώνια τρίγωνα έχουν μία πλευρά και μία οξεία γωνία ίσες, τότε είναι ίσα.

ζ) Η διχοτόμος μιας γωνίας είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων που ισαπέχουν από την κορυφή της γωνίας.

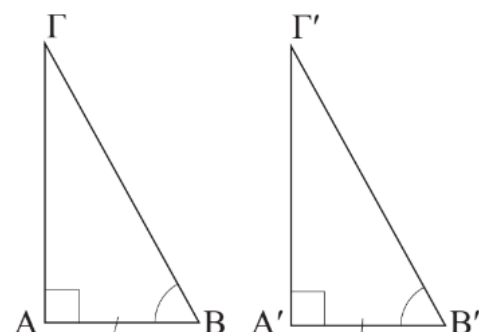
η) Η διχοτόμος μιας γωνίας είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων που ισαπέχουν από τις πλευρές της γωνίας.

2) Να συμπληρώσετε τα κενά με τις κατάλληλες λέξεις.

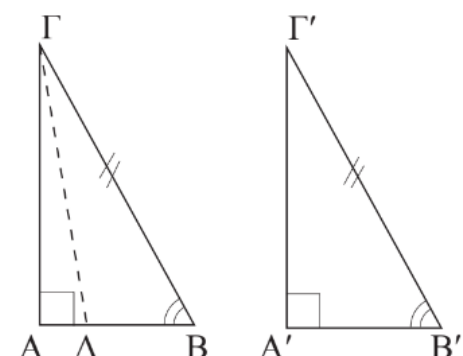
α) Δύο ορθογώνια τρίγωνα, που έχουν τις πλευρές του ίσες μία προς μία, τότε τα τρίγωνα είναι Με βάση το διπλανό σχήμα, είναι
 =
 =
 Οπότε θα ισχύει =



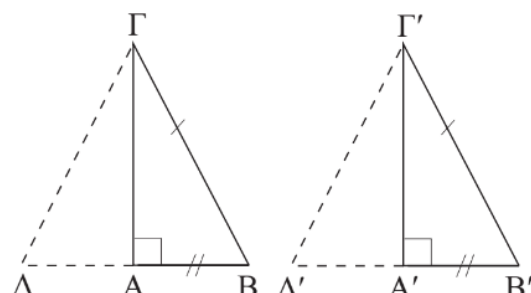
β) Δύο ορθογώνια τρίγωνα, που έχουν μία πλευρά και την σε αυτή ίσες μία προς μία, είναι ίσα. Με βάση το διπλανό σχήμα, είναι
 =
 =
 Οπότε θα ισχύει =



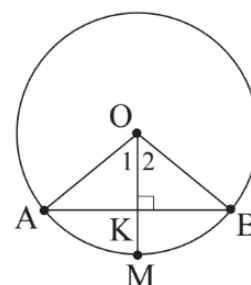
γ) Αν δύο ορθογώνια τρίγωνα έχουν την και μία αντίστοιχα ίσες μία προς μία, τότε είναι ίσα. Με βάση το διπλανό σχήμα, είναι
 =
 =
 Οπότε θα ισχύει =



δ) Αν δύο τρίγωνα έχουν την και μία πλευρά αντίστοιχα ίσες μία προς μία, τότε είναι ίσα. Με βάση το διπλανό σχήμα, είναι
 =
 =
 Οπότε θα ισχύει =



ε) Η κάθετος (λέγεται και απόστημα) που φέρεται από το κέντρο του κύκλου προς μία χορδή του, διχοτομεί την

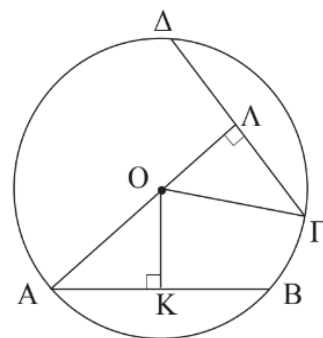


..... και το αντίστοιχο της. Με βάση το σχήμα είναι

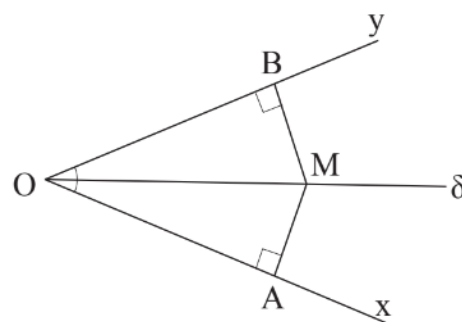
..... $\perp$

Οπότε ισχύουν = και =

στ) Δύο χορδές ενός κύκλου είναι ίσες αν και μόνο αν τα τους είναι ίσα. Με βάση το σχήμα αν = τότε ισχύει και =



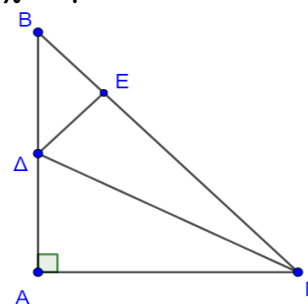
ζ) Κάθε σημείο της διχοτόμου μιας γωνίας από τις πλευρές τις και αντίστροφα, κάθε εσωτερικό σημείο της γωνίας που από τις πλευρές τις είναι σημείο της



Με βάση το σχήμα, αν $M \in O\delta$, τότε = και αντίστροφα, αν = τότε $M \in O\delta$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1***) Σε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) να φέρετε τη διχοτόμο $B\Delta$. Αν $\Delta E \perp B\Gamma$, να αποδείξετε ότι $AB = BE$.

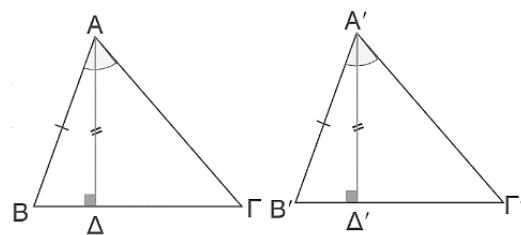


2**) Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$ και η διχοτόμος του $\Gamma\Delta$. Αν το ΔE είναι κάθετο στη $B\Gamma$, να αποδείξετε ότι $\Gamma A = \Gamma E$.

3*) Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ έχουν $\hat{A} = \hat{A}'$ και $AB = A'B'$. Αν τα ύψη τους $A\Delta$ και $A'\Delta'$ είναι ίσα, να αποδείξετε ότι :

α) $\hat{B} = \hat{B}'$

β) τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ είναι ίσα.



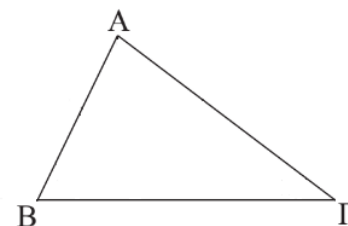
4*) Δίδεται τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$. Από το μέσο M της AB φέρουμε $M\Delta$ και $M\Gamma$. Να αποδείξετε ότι τα ευθύγραμμα τμήματα $M\Gamma$ και $M\Delta$ είναι ίσα.

5*) Δίδεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) και το ύψος του $A\Delta$. Αν M τυχαίο σημείο του $A\Delta$, να αποδείξετε ότι :

α) τα τρίγωνα MBA και $M\Gamma A$ είναι ίσα,

β) το τρίγωνο $BM\Gamma$ είναι ισοσκελές.

6***) Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$. Στην προέκταση της πλευράς AB παίρνουμε σημείο E , ώστε $BE = AB$ και στην προέκταση της $A\Gamma$ παίρνουμε σημείο Z , ώστε $\Gamma Z = A\Gamma$. Αν $A\Delta$ ύψος του τριγώνου και EH , $Z\Theta$ τα κάθετα τμήματα προς την ευθεία $B\Gamma$, τότε:



i) να συγκριθούν τα τρίγωνα $AB\Delta$ και EBH , καθώς και τα $A\Gamma\Delta$ και $Z\Gamma\Theta$,

ii) να αποδειχθεί ότι $EH = Z\Theta$.