УТВЕРЖДАЮ
Первый заместитель начальника управления образования
Могилёвского облисполкома
______________ О.В.Стельмашок
«_____» ноября 2015 г.

ЗАДАНИЯ
для проведения второго этапа республиканской олимпиады
по учебному предмету «Математика»

Дата проведения: 28 ноября 2015 г.
Время выполнения заданий: 10.00 – 14.30

IX класс

1. Найдите все пары натуральных чисел (*m; n*) таких, что $13m+31n=2015$.

2. Докажите, что при положительных a, b c и d верно неравенство
$$(a+b+c+d)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)\geq 16.$$

3. Гипотенуза прямоугольного треугольника делится точкой касания вписанной окружности на отрезки длиной m и n. Пусть h – высота это треугольника, опущенная на гипотенузу. Докажите, что $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\frac{2}{h}$.

4. Можно ли при помощи цифр 0, 3, 5, 7, 8 записать натуральное число, которое бы являлось квадратом некоторого другого натурального числа? Каждую цифру можно использовать неограниченное количество раз, а также не обязательно использовать все цифры.

5. Какое наибольшее количество фишек можно расставить на доске размера 7×7 клеток так, чтобы в каждом квадрате 2×2 содержалось бы не более двух фишек? В каждую клетку доски можно ставить не более одной фишки.

Пользоваться калькулятором не разрешается

Математика

IX класс. Решения.

Решения учащихся могут отличаться от авторских!

1. ***Решение.***

Заметим, что $2015 = 5\cdot 13\cdot 31$. Имеем: $13m + 31n = 5\cdot 13\cdot 31.$ Несложно видеть, что m должно быть кратно 31, а n должно быть кратно 13. Пусть m=31a, n=13b, где a и b – некоторые натуральные числа.

$13\cdot 31a + 31\cdot 13b = 5\cdot 13\cdot 31.$ $a + b = 5$; b = 5–a. Тогда m = 31a, n = 13(5–a) = 65–13a. Так как, m и n натуральные числа, то должны выполняться условия:

$$\begin{cases} 31a > 0 \\ 65 - 13a > 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} a > 0 \\ a < 5 \end{cases}.$$

Отсюда следует, что a может принимать значения 1, 2, 3 или 4.

При a=1: m = 31, n = 52.

При a=2: m = 62, n = 39.

При a=3: m = 93, n = 26.

При a=4: m = 124, n = 13.

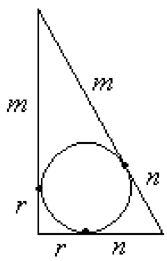
Ответ: (31; 52), (62; 39), (93; 26), (124; 13).

2. ***Решение.***

Раскрывая скобки, получим: $1 + \frac{a}{b} + \frac{a}{c} + \frac{a}{d} + \frac{b}{a} + 1 + \frac{b}{c} + \frac{b}{d} + \frac{c}{a} + \frac{c}{b} + 1 + \frac{c}{d} + \frac{d}{a} + \frac{d}{b} + \frac{d}{c} + 1$. Так как сумма взаимно обратных положительных чисел не меньше 2, то $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$, $\frac{a}{c} + \frac{c}{a} \geq 2$, $\frac{a}{d} + \frac{d}{a} \geq 2$, $\frac{b}{c} + \frac{c}{b} \geq 2$, $\frac{b}{d} + \frac{d}{b} \geq 2$, $\frac{c}{d} + \frac{d}{c} \geq 2$. Сложив почленно эти неравенства и добавив к каждой части число 4, получим требуемое.

3. ***Решение.***

Доказательство.



Докажем сначала, что площадь S прямоугольного треугольника может быть вычислена по формуле: $S = mn$. Пусть r – радиус вписанной окружности. Тогда, используя свойства касательных из одной точки к окружности, имеем: $S = \frac{1}{2}(m + r)(n + r)$

Докажем, что $\frac{1}{2}(m + r)(n + r) = mn$. Последнее равенство равносильно равенству $mr + nr + r^2 = mn$. (1)

Используя теорему Пифагора, получаем: $(m + r)^2 + (n + r)^2 = (m + n)^2$. Отсюда после несложных преобразований получаем (1). Итак, площадь прямоугольного треугольника $S = mn$ (2).

Но $S = \frac{1}{2}(m + n)h$ (3).

Приравняв правые части (2) и (3), получаем: $\frac{h}{2} = \frac{mn}{m + n}$

Тогда $\frac{2}{h} = \frac{m+n}{mn} = \frac{m}{mn} + \frac{n}{mn} = \frac{1}{n} + \frac{1}{m}$. Что и требовалось доказать.

4. ***Решение***.

Предположим, что существует число n, такое, что десятичная запись числа n^2 состоит из указанных цифр. Несложно проверить, что последней цифрой точного квадрата может быть 0, 1, 4, 5, 6, 9. Из предложенных цифр последними цифрами точного квадрата могут быть 0 или 5.

Пусть n^2 оканчивается на 5. Тогда и число n оканчивается на 5, т.е. n можно представить в виде $n = 10k + 5$, где $к$ – некоторое натуральное число или 0. Но $n^2 = (10k+5)^2 = 100k^2 + 100k + 25$, а это означает, что предпоследней цифрой числа n^2 будет 2. Однако, двоек среди цифр, указанных в условии, нет. Получаем, что n^2 не может оканчиваться на 5.

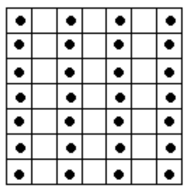
Пусть теперь n^2 оканчивается на 0. Значит, число n кратно 10**,** т.е. $n = k \cdot 10^m$, где m и $к$ некоторые натуральные числа, причем последняя цифра числа $к$ – не нуль. Тогда $n^2 = k^2 \cdot 10^{2m}$. Это означает, что если в записи числа n^2 отбросить все нули, стоящие справа, то останется запись числа $к^2$ и последней цифрой в этой записи будет не 0 и не 5, т.е. одна из цифр: 3, 7, 8. Получили противоречие. Получается, что такого числа n^2 не существует.

Ответ: нельзя.

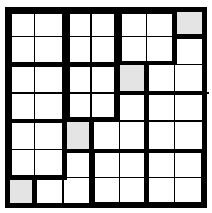
5. Решение.

<u>Указание для жюри</u>. Если в задаче получен правильный ответ, но не доказано, что это наибольшее возможное количество фишек, то за задачу выставляется 50% баллов от максимально возможных.

Приведем пример расстановки на доске 7×7 клеток 28 фишек так, чтобы выполнялись требования задачи.



Пусть теперь на доске стоят не менее 29 фишек. Докажем, что в этом случае обязательно найдется квадрат 2×2, в котором содержатся не менее трех фишек. Разобьем доску на фигурки, содержащие 3 или 4 клетки следующим образом:



Получили 12 фигурок и 4 отдельно стоящие клетки. В 12 фигурках стоит не менее 29–4=25 фишек. Значит, найдется фигурка, в которой будет стоять не менее трех фишек.

Ответ: 28 фишек.